Zu Aufgabe 22: In der Übung war offen geblieben, wieso prädikatenlogische Tautologien stets von den in (b) und (c) angegebenen Funktionen auf 1 abgebildet werden. Das liegt daran, dass die Rekursionsvorschriften für $\neg$ und $\vee$ genau den Booleschen Funktionen für die Junktoren entsprechen, die bei der Ermittlung des Wahrheitswertes der aussagenlogischen Formlen befolgt werden. D.h: Substituieren wir in einer prädikatenlogischen Formel α Teilformeln durch Aussagevariable, so errechnet sich der Wert $f(\alpha)$ als der Wahrheitswert der entstandenen aussagenlogischen Formel unter der Belegung mit den f-Werten der substituierten Teilformeln. (Z.B: $\alpha = \beta \vee \neg\gamma$, substituiere β durch p und γ durch q und erhalte $\alpha' = p \vee \neg q$, die unter der Belegung $p = f(\beta)$ und $q = f(\gamma)$ einfach mal den Wahrheitswert $f(\alpha)$ annimmt.)

Für prädikatenlogische Tautologien folgt damit, weil die assoziierten aussagenlogischen Formeln eben unter jeder Belegung wahr werden, dass f auf ihnen stets den Wert 1 hat.

Musterlösung für Aufgabe 23

(a) Die beiden Regeln sind idempotent, d.h. werden sie zweimal hintereinander auf die Formel α angewandt, so ist die resultierende Formel wieder α. Deshalb müssen wir nur K-Beweise betrachten, bei denen die beiden Regeln immer abwechselnd angewendet werden.

Beginnen wir mit der Assoziativregel, dann kriegen wir

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = p \vee (q \vee r) & \alpha_5 = q \vee (r \vee p) \\ \alpha_2 = (p \vee q) \vee r & \alpha_6 = (r \vee p) \vee q \\ \alpha_3 = r \vee (p \vee q) & \alpha_7 = q \vee (r \vee p) \\ \alpha_4 = (r \vee p) \vee q & \alpha_8 = (q \vee r) \vee p \end{array}$$

und erhielten mit Anwendung der Kommutationsregel wieder α_1.

Beginnen wir mit der Kommutationsregel, so erhalten wir sofort die Formel, die oben mit α_8 bezeichnet ist und können bereits die Assotiativregel nicht mehr anwenden.

Damit steht oben eine Liste aller aus $p \vee (q \vee r)$ ableitbaren Formeln und $p \vee (r \vee q)$ ist nicht dabei.

(b) Für den ersten Teil macht man eigentlich Induktion über den Beweis. Man sieht aber bei näherem Hingucken, dass keine der Regeln das führende ℓ löscht und auch keine ein weiteres ℓ hinzufügt.

Die Antwort auf die Frage unter (3) ist „Nein !“ Wir zeigen, dass als Anzahlen von h's in abgeleiteten Wörtern keine Vielfachen von 3 vorkommen können, damit auch nicht die null. Hier führen wir die Beweisinduktion aus.

IA Im einzigen Axiom steckt genau ein h.

IS Die erste und die vierte Regel ändern die Anzahl der vorkommenden h's nicht. Die zweite verdoppelt sie (ist k nicht durch 3 teilbar, dann auch nich nicht $2k$), die dritte Regel zieht drei h's heraus.

(c) Jedes Element von X hat den trivialen K-Beweis aus X, in dem es selbst in der ersten und einzigen Beweiszeile steht. Ist Y Obermenge von X, so ist jeder K-Beweis aus X auch ein K-Beweis aus Y.

Die Idempotenz ist *etwas* aufwändiger zu zeigen. Mit (2) brauchen wir aber nur die Inklusion $\mathrm{Cl}_K(\mathrm{Cl}_K(X)) \subseteq \mathrm{Cl}_K(X)$ zu zeigen: Sei also $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n = \alpha)$ ein K-Beweis aus $\mathrm{Cl}_K(X)$. Wir wollen daraus einen K-Beweis aus X machen. Dabei müssen wir nur die Zeilen ersetzen, in denen α_i ein Element von $\mathrm{Cl}_K(X)$ ist. In diesem Fall gibt es aber nach der Definition von Cl_K einen K-Beweis von α_i aus X. Wir fügen also vor α_i diesen Beweis ein. Dann müssen wir nur noch umnummerieren und sind fertig.