Musterlösungen der Aufgaben 19 und 20

Aufgabe 19. Die rekursive Definition von „t ist frei für x in α" lautet:

- Ist α atomar, so ist t frei für x in α;
- ist $\alpha = \neg\beta$ oder $\alpha = \beta \vee \gamma$ und ist t frei für x in β und frei für x in γ, so ist t frei für x in α;
- ist $\alpha = \exists y\beta$ und $x \neq y$ und t frei für x in β oder ist schlicht $x \notin \mathrm{frvar}(\alpha)$, so ist t frei für x in α.

Zum Substitutionssatz: Wir zeigen die Behauptung mit Induktion über den Aufbau von α:

IA Sei α atomar, also von der Form $\alpha = t \equiv t'$ oder $\alpha = r(x_1, \dots, x_n)$. Dann wird bei der Auswertung der Aussage $\mathfrak{A} \models \beta[\vec{b}]$ wegen der Auswertung der Terme $t_1, \dots, t_n$ in $\mathfrak{A}$ doch nur die Gültigkeit von $\alpha[\vec{a}]$ in $\mathfrak{A}$ überprüft. Deshalb gilt die Behauptung.

IS Die Behauptung gelte für α_0 und α_1, d.h: Entstehen β_0, β_1 aus α_0, α_1 so, wie β aus α entstanden ist (und sind die t_i frei für x_i in α_0 und α_1), so gilt $\mathfrak{A} \models \beta_i[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \alpha_i[\vec{a}]$.

Ist $\alpha = \neg\alpha_0$, so ist $\beta = \neg\beta_0$ und es gilt

$$\mathfrak{A} \models \beta[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \beta_0[\vec{b}] \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \not\models \alpha_0[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \alpha[\vec{a}].$$

Ist $\alpha = \alpha_0 \vee \alpha_1$, so ist $\beta = \beta_0 \vee \beta_1$ und es gilt

$$\mathfrak{A} \models \beta[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \beta_0[\vec{b}] \text{ oder } \mathfrak{A} \models \beta_1[\vec{b}] \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow}$$

$$\mathfrak{A} \models \alpha_0[\vec{a}] \text{ oder } \mathfrak{A} \models \alpha_1[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \alpha[\vec{a}].$$

Ist $\alpha = \exists x\alpha_0$, wobei $\alpha_0(x, x_1, \dots, x_n)$, und $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, so ist $\beta = \exists x\beta_0$, wobei $\beta_0(x, y_1, \dots, y_m)$, und es gilt

$$\mathfrak{A} \models \beta[\vec{b}] \Leftrightarrow \text{ ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \beta_0[a, \vec{b}] \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow}$$

$$\text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \alpha_0[a, \vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\exists x\alpha_0)[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \alpha[\vec{a}].$$

Ist $\alpha = \exists x\alpha_0$ und $x \in \{x_1 \dots, x_{nn}\}$ so permutiere die Variablen derart, dass $x = x_1$. Ausserdem müssen wir jetzt bei den Termen t_1 durch den Term x_1 ersetzen (weil x_1 ja durch den Quantor gebunden und deshalb bei der Termeinsetzung nicht mehr berücksichtigt wird). Wir betrachten also $\alpha = \exists x_1\alpha_0(x_1, \dots, x_n)$ und $\beta = \exists x_1\alpha_0(x_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n)$. Dann gilt

$$\mathfrak{A} \models \beta[\vec{b}] \Leftrightarrow \text{ ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \alpha_0[a, \underbrace{t_2^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]}_{a_2}, \dots, \underbrace{t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]}_{a_n}] \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow}$$

$$\mathfrak{A} \models (\exists x\alpha_0)[a_2, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \alpha[\vec{a}].$$

□

Aufgabe 20.

(a) Unser Gegenbeispiel sind die natürlichen Zahlen $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +, 0)$ und die Formeln $\phi = \exists yy + y \equiv x$ (x ist gerade) und $\psi = \forall y\neg y + y \equiv x$ (x ist ungerade). Dann gilt $\mathfrak{A} \models \forall x(\phi \vee \psi)$, aber $\mathfrak{A} \not\models \phi \vee \forall x\psi$, da die Formel $\phi \vee \forall x\psi$ eine freie Variable x hat, die mit einer ungeraden Zahl belegt werden kann.

(b) zu 18(a): $\exists x(\phi \vee \psi) \approx (\exists x\phi \vee \exists x\psi)$ und
zu 18(b): $\exists x(\phi \wedge \psi) \approx (\phi \vee \exists\psi)$, falls $x \notin \text{frvar}(\phi)$. Dafür, dass die Beweise hierfür nicht mehr nötig sind, kann man auf zwei Arten argumentieren (die aber eigentlich dasselbe besagen). Entweder man sagt:„Wir haben in Aufgabe 18 Aussagen über Ausdrücke bewiesen, die eigentlich nur al Abkürzungen für Formeln, die mit $\neg, \vee$ und $\exists$ gebildet werden. Wenn wir diese Abkürzungen ausschreiben erhalten wir Formeln, aus denen wir nur die $\neg$'s auflösen müssen." Oder man führt die Dualität der Paare $\vee, \wedge$ und $\exists, \forall$ an und sagt:„Der eine Beweis geht aus dem anderen durch ersetzen der jeweiligen Symbole durch ihre dualen und der jeweiligen Semantik durch die duale Semantik hervor."

(c) Zur rechten Seite: $\mathfrak{A} \models \forall x\exists y\phi(x, y)$ gdw. es ex. zu jedem $a \in A$ ein $b \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \phi[a, b]$. Wenn die linke Seite von $\mathfrak{A}$ erfüllt wird, also ein $c \in A$ existiert, so dass $\mathfrak{A}$ für beliebiges $d \in A$ die Aussage $\phi[d, c]$ wahr macht, dann können wir in der linken Seite stets dieses c als b wählen.

(d) Wieder die natürlichen Zahlen, diesmal so: $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, >)$ und $r =>$. Offensichtlich gibt es für jede natürliche Zahl eine größere, z.B. ihre Nachfolgerzahl. Allerdings existiert keine größte natürliche Zahl.