Musterlösung zu einem Teil von Aufgabe 13

Die Gewichtsfunktion, mit der wir arbeiten wollen, sei

$$g : C \cup X \cup F \to \mathbb{Z}, g(z) = \begin{cases} -1 & z \in C \cup X \\ s(z) & f \in F. \end{cases}$$

Quersummenkriterium für Terme (QSK): Ein Wort $w = w_1 \dots w_n \in (C \cup X \cup F)^*$ ist genau dann ein Term, wenn $\mathrm{qs}(w) = \sum_{i=1}^{n} g(w_i) = -1$ und für alle $0 \leq k < n$ gilt: $\sum_{i=1}^{k} g(w_i) \geq 0$.

Wir zeigen hier nur die Inklusion der Menge M aller Worte, die das Kriterium erfüllen in der Menge Tm der Terme. Wir benutzen Induktion über n, die Länge von w.

IA $n = 1$: Dann ist $w \in C \cup X$ und damit ein Term.

IS $n > 1$: Seien also alle Elemente von M mit Länge $< n$ bereits als Terme identifiziert (das ist die IV). w beginnt wegen der Anfangsstück-Bedingung mit einem Funktionssymbol f, $s(f) = m < n - 1$, da wir nur höchstens $n - 1$ mal -1 abziehen können und am Ende bei einer Quersumme $\mathrm{qs}(w) = -1$ landen müssen.

Wir wollen jetzt also die Teilworte von w

$$t_1 = w_2 \dots w_{k_1}, \dots, t_m = w_{k_{m-1}+1} \dots w_n$$

finden, für die das QSK erfüllt ist, und die deshalb nach der IV Terme sind, so dass schließlich auch $w = f t_1 \dots t_m$ als Term erkannt wird.

Wir betrachten jetzt als erstes das (eindeutig bestimmte) Anfangsstück $u_1 = f w_2 \dots w_{k_1}, k_1 \leq n$ von w, dessen Quersumme $\mathrm{qs}(u_1) = m - 2 = g(f) - 1$ ist und dessen eigene echte Anfangsstücke eine Quersumme $\geq m - 1$ haben. Doch dann erfüllt $t_1 := w_2 \dots w_{k_1}$ das QSK, hat Länge $k_1 - 1 < n$, ist also Term nach der IV (und u_1 ist $f t_1$).

Diesen Schitt verallgemeinernd betrachten wir die Anfangsstücke u_i von w, die

1. $\mathrm{qs}(u_i) = m - 1 - i$ und
2. $\mathrm{qs}(x) \geq m - i$ für alle echten Anfangsstücke x von u_i

erfüllen. Dann erfüllt für $i \leq m$ das eindeutig bestimmte Wort t_i mit $u_i = u_{i-1}^\frown t_i$ das QSK. Wir haben also die Terme gefunden, „auf die f angewendet wir".