
Martin Aigner
Günter M. Ziegler

Das BUCH der Beweise

Dritte Auflage

Mit Zeichnungen von Karl H. Hofmann

 Springer

Prof. Dr. Martin Aigner
FB Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Arnimallee 3
14195 Berlin
Deutschland
aigner@math.fu-berlin.de

Prof. Günter M. Ziegler
Institut für Mathematik, MA 6-2
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin
Deutschland
ziegler@math.tu-berlin.de

ISBN 978-3-642-02258-6

e-ISBN 978-3-642-02259-3

DOI 10.1007/978-3-642-02259-3

Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.de)

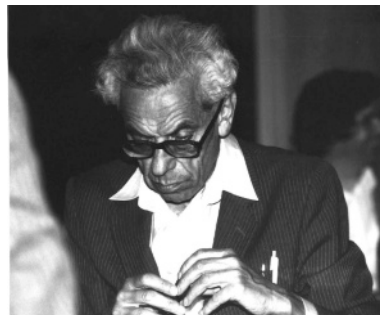
Vorwort

Paul Erdős erzählte gerne von dem BUCH, in dem Gott die *perfekten* Beweise für mathematische Sätze aufbewahrt, dem berühmten Zitat von G. H. Hardy entsprechend, dass es für hässliche Mathematik keinen dauerhaften Platz gibt. Erdős hat auch gesagt, dass man nicht an Gott zu glauben braucht, aber dass man als Mathematiker an das BUCH glauben sollte. Vor ein paar Jahren haben wir ihm vorgeschlagen, gemeinsam eine erste (und sehr bescheidene) Annäherung an das BUCH aufzuschreiben. Er hat die Idee enthusiastisch aufgenommen und sich, ganz typisch für ihn, sofort an die Arbeit gemacht und Seiten über Seiten mit Notizen und Vorschlägen produziert. Unser Buch sollte ursprünglich im März 1998 erscheinen, als Geschenk zu Erdős' 85stem Geburtstag. Durch seinen Tod im Sommer 1996 konnte er kein Koautor werden. Stattdessen ist dieses Buch seinem Andenken gewidmet.

Wir haben keine Definition oder Charakterisierung dafür, was einen Beweis zum BUCH-Beweis macht; anbieten können wir hier nur die Beispiele, die *wir* ausgewählt haben, in der Hoffnung, dass die Leser unseren Enthusiasmus teilen werden über brillante Ideen, schlaues Vorgehen, wunderschöne Einsichten und überraschende Wendungen. Wir hoffen auch, dass unsere Leser dies trotz aller Defizite in unserer Darstellung genießen können. Die Auswahl der Beweise hat Paul Erdős selbst stark beeinflusst. Er hat eine große Zahl der Themen vorgeschlagen, und viele der Beweise gehen direkt auf ihn zurück oder sie entstanden durch sein besonderes Talent dafür, die richtige Frage zu stellen oder die richtige Vermutung zu formulieren. So spiegelt dieses Buch in großem Umfang das wider, was nach Paul Erdős Beweise aus dem BUCH ausmacht.

Beschränkt wurde unsere Auswahl von Themen dadurch, dass wir für die Lektüre nicht mehr Mathematik voraussetzen wollten, als man im Grundstudium lernt. Ein bisschen Lineare Algebra, ein bisschen Analysis und Zahlentheorie, und ein gerüttelt Maß elementarer Konzepte und Ideen aus der Diskreten Mathematik sollten ausreichen, um alles in diesem Buch zu verstehen und zu genießen.

Wir sind den vielen Menschen unendlich dankbar, die uns bei diesem Projekt geholfen und unterstützt haben — unter ihnen den Studenten aus einem Seminar, in dem eine erste Version des Buches besprochen wurde, wie auch Benno Artmann, Stephan Brandt, Stefan Felsner, Eli Goodman, Hans Mielke und besonders Tom Trotter. Viele Leser der englischen Ausgabe dieses Buches haben uns geschrieben und mit ihren Anmerkungen und Hinweisen die zweite englische wie auch diese deutsche Ausgabe gefördert, unter ihnen Christian Elsholtz, Jürgen Elstrodt, Daniel Grieser,



Paul Erdős



„DAS BUCH“

Roger Heath-Brown, Lee L. Keener, Christian Leboeuf, Hanfried Lenz, Nicolas Puech, John Scholes, Bernulf Weißbach, Dirk Werner und *vielen* andere. Mit der Technik und Gestaltung dieses Buches haben uns unter anderem Margrit Barrett, Christian Bressler, Christoph Eyrich, Ewgenij Gawrilow, Michael Joswig und Jörg Rambau immens geholfen. Elke Pose danken wir für den Einsatz und den Enthusiasmus, mit dem sie viele viele kleine verrauschte Diktierkassetten in perfektes \LaTeX verwandelt hat. Herzlichen Dank schulden wir Ruth Allewelt und Karl-Friedrich Koch vom Springer-Verlag Heidelberg. Ganz besonderer Dank (er weiß wofür) geht an Torsten Heldmann. Karl Heinrich Hofmann danken wir für die wunderbaren Zeichnungen, mit denen wir diesen Band illustrieren dürfen, und dem großen Paul Erdős für seine Inspiration.

Berlin, September 2001

Martin Aigner · Günter M. Ziegler

Vorwort zur dritten Auflage

Als wir dieses Projekt vor nunmehr fast fünfzehn Jahren (auf Englisch) begannen, konnten wir uns unmöglich vorstellen, welch wunderbare und andauernde Resonanz unser Buch über DAS BUCH haben würde, mit all den herzlichen Briefen, interessanten Kommentaren, neuen Auflagen, und bis heute 13 Übersetzungen. Es ist keine Übertreibung zu sagen, dass DAS BUCH ein Teil unseres Lebens geworden ist.

Die vorliegende dritte Auflage enthält neben zahlreichen Verbesserungen, die zum Teil von unseren Lesern vorgeschlagen wurden, fünf neue Kapitel: zwei Klassiker, das quadratische Reziprozitätsgesetz und den Fundamentalsatz der Algebra, zwei Kapitel über Packungsprobleme in der Ebene und ihre erstaunlichen Lösungen, und schließlich einen Höhepunkt in der jüngeren Graphentheorie, die chromatische Zahl der Kneser Graphen.

Wir danken allen, die uns über alle diese Jahre geholfen und ermutigt haben. Die zweite deutsche Auflage hat von besonders wertvollen Hinweisen von David Bevan, Anders Björner, Dietrich Braess, John Cosgrave, Hubert Kalf, Günter Pickert, Alistair Sinclair und Herb Wilf profitiert. Für die gegenwärtige Auflage danken wir besonders France Dacar, Oliver Deiser, Michael Harbeck, Stefan Hougardy, Hendrik W. Lenstra, Günter Rote, Carsten Schultz und Moritz Schmitt für ihre Beiträge. Ganz besonderer Dank gebührt Ruth Allewelt vom Springer-Verlag in Heidelberg sowie Christoph Eyrich, Torsten Heldmann und Elke Pose in Berlin. Und schließlich verdankt dieses Buch sein attraktives Erscheinungsbild nicht zuletzt Karl Heinrich Hofmann, der immer wieder neue wunderbare Zeichnungen beigezeichnet hat.

Berlin, Juli 2009

Martin Aigner · Günter M. Ziegler

Inhalt

Zahlentheorie 1

1. Sechs Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen 3
2. Das Bertrandsche Postulat 7
3. Binomialkoeffizienten sind (fast) nie Potenzen 15
4. Der Zwei-Quadrate-Satz von Fermat 19
5. Das quadratische Reziprozitätsgesetz 27
6. Jeder endliche Schiefkörper ist ein Körper 35
7. Einige irrationale Zahlen 41
8. Drei Mal $\pi^2/6$ 49

Geometrie 59

9. Hilberts drittes Problem: Zerlegung von Polyedern 61
10. Geraden in der Ebene und Zerlegungen von Graphen 71
11. Wenige Steigungen 77
12. Drei Anwendungen der Eulerschen Polyederformel 83
13. Der Starrheitssatz von Cauchy 91
14. Simplexe, die einander berühren 97
15. Stumpfe Winkel 103
16. Die Borsuk-Vermutung 111

Analysis 119

17. Mengen, Funktionen, und die Kontinuumshypothese 121
18. Ein Lob der Ungleichungen 139
19. Der Fundamentalsatz der Algebra 147
20. Ein Quadrat und viele Dreiecke 151

21. Ein Satz von Pólya über Polynome	161
22. Ein Lemma von Littlewood und Offord	169
23. Der Kotangens und der Herglotz-Trick	173
24. Das Nadel-Problem von Buffon	179

Kombinatorik _____ **183**

25. Schubfachprinzip und doppeltes Abzählen	185
26. Wenn man Rechtecke zerlegt	197
27. Drei berühmte Sätze über endliche Mengen	203
28. Gut genug gemischt?	209
29. Gitterwege und Determinanten	221
30. Cayleys Formel für die Anzahl der Bäume	227
31. Identitäten und Bijektionen	235
32. Vervollständigung von Lateinischen Quadraten	241

Graphentheorie _____ **249**

33. Das Dinitz-Problem	251
34. Ein Fünf-Farben-Satz	259
35. Die Museumswächter	263
36. Der Satz von Turán	267
37. Kommunikation ohne Fehler	273
38. Die chromatische Zahl der Kneser-Graphen	285
39. Von Freunden und Politikern	291
40. Die Probabilistische Methode	295

Über die Abbildungen _____ **305**

Stichwortverzeichnis _____ **307**