REVETEMENTS CYCLIQUES II

(autour du théorème d'annulation de J. Kollâr)

Hélène ESNAULT et Eckart VIEHWEG

Université Paris VII and
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
D-5300 Bonn 3, Fed. Rep. of Germany

Universität - Gesamthochschule - Essen
Fachbereich 6, Mathematik
Universitätsstr. 2
D-4300 Essen 1, Fed. Rep. of Germany

MPI-SFB 85-4

REVÊTEMENTS CYCLIQUES II

(Autour du théorème d'annulation de J. Kollár)

Hélène ESNAULT et Eckart VIEHWEG

Dans la première partie de ce travail [4], nous avons discuté une généralisation du théorème d'annulation de Kodaira aux diviseurs à coefficients dans $\mathbb{Q}$, obtenue indépendamment par Y. Kawamata et le second auteur. Nous avons essayé de mettre en lumière le lien avec la théorie de Hodge de P. Deligne [2] .

Récemment, J. Kollár [7] a démontré une autre généralisation importante du théorème d'annulation de Kodaira. Il considère une variété algébrique projective X définie sur $\mathbb{C}$, un faisceau inversible semi-ample (1.8) $\mathcal{L}$ et un diviseur D associé à une puissance positive de $\mathcal{L}$. Alors le morphisme d'adjonction

$$H^q(X,\mathcal{L}^\alpha \otimes \omega_X(D)) \longrightarrow H^q(D,\mathcal{L}^\alpha \otimes \omega_D)$$

est surjectif pour $q \geqq 0$ et $\alpha > 0$. En fait S.G Tankeev avait déjà démontré [9] la même assertion pour $\mathcal{L}$ engendré par ses sections globales, D une section lisse de $\mathcal{L}$ et $\alpha = 1$.

Le but premier de cet article est de redonner une démonstration du résultat de J. Kollár dans l'esprit de [4], c'est-à-dire uniquement basée sur une interprétation de la théorie de Hodge de P. Deligne [2] (voir §1). En ce sens on fait le lien entre les deux points de vue présentés dans [7] et [4] . On ne surprendra pas les experts en annonçant que cette méthode conduit à une généralisation pour diviseurs à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de la surjectivité de l'application d'adjonction ((1.11) et (1.12)).

Ainsi que tout théorème d'annulation, celui-ci a des applications immédiates, par exemple à l'étude des variétés de grande dimension [6] . J. Kollár a lui-même réalisé que cela redémontrait le théorème de positivité de l'image directe du faisceau dualisant de Fujita-Kawamata [5] en en simplifiant considérablement la démonstration. De plus, la "faible positivité" devient effective. Dans le §2 nous discutons ces points. Combinés avec des méthodes inaugurées dans [11] , ils fournissent une forme explicite de l'additivité de la dimension de Kodaira dans une famille sur une base de type général ((2.8.b)).

Afin d'être complets, nous tirons de ce qui précède, de même que dans [7] , une forme relative du théorème d'annulation (3.1). Enfin, nous faisons dans (3.4) le lien entre les hypothèses de (1.12) qui semblent tomber du ciel et celles, elles très naturelles, développées tout récemment par Y. Kawamata [6] . Nous écrivons explicitement ce qui est déjà contenu implicitement dans [6] , à savoir le théorème d'annulation sous sa forme probablement la plus générale (3.5).

Au début 1984, nous avons reçu la première version du travail de J. Kollár. S'en est suivi un échange de lettres dans lesquelles sont discutés plusieurs points présentés ici, comme par exemple (2.8. b)) sous une forme plus faible et avec une démonstration bien trop compliquée ! Comme, dans la forme définitive de son travail, J. Kollár n'y revient pas, nous y revenons nous-mêmes. Nous le remercions, ainsi que Y. Kawamata, pour l'envoi régulier de leurs travaux.

1.- THÉORÈMES D'ANNULATION

Toutes les variétés considérées dans cet article sont projectives et définies sur $\mathbb{C}$. $\Omega_X^\bullet\langle D\rangle$ désigne le complexe des formes holomorphes sur X à pôles logarithmiques le long d'un diviseur à croisements normaux D .

THÉORÈME 1.1.- *Soient* X *une variété projective lisse,* L *un faisceau inversible engendré par ses sections globales,* C *et* D *deux diviseurs effectifs sans composante commune tels que* D *soit réduit et* $C+D$ *soit à croisements normaux. On suppose que* $\mathcal{O}(D)$ *soit contenu dans une puissance positive de* L *. Alors l'inclusion naturelle*

$$H^0(X,L^{-1}\otimes\Omega_X^q\langle D+C\rangle(-D))\longrightarrow H^0(X,L^{-1}\otimes\Omega_X^q\langle C\rangle)$$

est une bijection pour tout $q\geq 0$.

Démonstration

De même que dans [4] , (2.1), et [10], (theorem III), on utilise les arguments de F. Bogomolov [1].

Considérons le morphisme $f:X\longrightarrow Y$ défini par L . On a $L=f^*H$ pour un faisceau inversible H très ample. Si $H^0(L^{-1}\otimes\Omega_X^q\langle C\rangle)=0$, l'assertion est triviale. Sinon, il existe une injection $\theta: L\longrightarrow\Omega_X^q\langle C\rangle$ dont on veut montrer que l'image est contenue dans $\Omega_X^q\langle D+C\rangle(-D)$. On a

$$f^*d\,\mathbb{C}(Y)\wedge\theta(L)=0\ (*)\quad .$$

Pour montrer (*), prenons $g = s/t$ dans $\mathbb{C}(Y)$, où s et t sont dans $H^0(L)$. D'après Deligne [2], (3.2.13), les formes différentielles globales à pôles logarithmiques sont fermées. Dès lors on a $ds = dg \wedge t = 0$.

Soit maintenant $g \in \mathbb{C}(Y)$ tel que D soit contenu dans l'image inverse par f du diviseur défini par g . On écrit localement $f^*g = x^m.u$, pour x un paramètre local d'une composante irréductible de D et u une unité.

On a $f^*dg = m.x^{m-1}u.\,\omega_0$, où $\omega_0 = dx + m^{-1}.x.u^{-1}.du$ est un générateur local de $\Omega^1_X\langle C\rangle$ sur $\mathcal{O}_X$ au point considéré. Si γ est un générateur local de $\theta(L)$, on a $\omega_0 \wedge \gamma = 0$, et donc $\gamma = \omega_0 \wedge \gamma'$, où $\gamma' \in \Omega^{q-1}_X\langle C\rangle$. Comme $\omega_0 = x\,.\,(x^{-1}.dx + m^{-1}.u.du)$ est dans $\Omega^1_X\langle C + D\rangle(-D)$, on a prouvé que $\theta(L)$ est inclus dans $\Omega^q_X\langle C + D\rangle(-D)$ aux points génériques de D , et par suite sur X puisque les deux faisceaux sont localement libres.

Remarques

(1.2) L'argument montre en particulier que si $H^0(L^{-1} \otimes \Omega^q_X\langle C\rangle)$ est non nul, alors on a $q \geq \dim Y$. Autrement dit, dans ce cas on a $q \geq \kappa(L)$, où $\kappa(L)$ est la dimension de Kodaira de L [1] .

(1.3) L'hypothèse " L est engendré par ses sections globales" peut être affaiblie par les techniques de revêtement que nous expliquons par la suite.

(1.4) Posons $\tilde{D} = \amalg D_j$, où les D_j sont les composantes irréductibles de D , et notons $\Omega^q_{\tilde{D}}\langle C\rangle$ le faisceau des q-formes holomorphes à pôles logarithmiques le long de $\amalg D_j \cap C$. Alors le conoyau de l'inclusion $\Omega^q_X\langle C + D\rangle(-D) \longrightarrow \Omega^q_X\langle C\rangle$ est inclus dans $\Omega^q_{\tilde{D}}\langle C\rangle$, et lui est égal si $\tilde{D} = D$. En un point où D a pour équation locale $x_1 \dots x_k = 0$, C a pour équation locale $y_{k+i} \cdots y_{k+\ell} = 0$, pour un système local de coordonnées $(x_1,\dots,x_k,y_{k+1},\dots,y_{k+\ell},z_{k+\ell+1},\dots,z_n)$, $\Omega^q_X\langle C+D\rangle(-D)$ est engendré sur $\mathcal{O}_X$ par

$$(x_1 \dots x_k) \sum_{|I|+|J|+|K|=q} a_{IJK} \frac{dx_I}{x_I} \wedge \frac{dy_J}{y_J} \wedge dz_K \quad \text{où} \quad \frac{dx_I}{x_I} = \frac{dx_{i_1}}{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dx_{i_\nu}}{x_{i_\nu}} \ ,$$

$I = \{i_1,\dots,i_\nu\}$, $|I| = \nu$ etc ...

Donc $\Omega^q_X\langle C\rangle \longrightarrow \Omega^q_{\tilde{D}}\langle C\rangle$ est donné par

$$\sum_{|I|+|J|+|K|=q} b_{IJK}\, dx_I \wedge \frac{dy_J}{y_J} \wedge dz_K \longmapsto$$

$$\longrightarrow \sum_{\lambda \in \{1,\dots,k\}-I} b_{IJK}\big|_{D\lambda}\, dx_I \wedge \frac{dy_J}{y_J} \wedge dz_K$$

(1.5) Le théorème (1.1) dit donc que l'application naturelle

$$H^0(X, L^{-1} \otimes \Omega^q_X\langle C\rangle) \longrightarrow H^0(X, L^{-1} \otimes \Omega^q_{\tilde{D}}\langle C\rangle)$$

est nulle.

THÉORÈME 1.6.- *Soient* X *une variété projective lisse,* L *un faisceau inversible engendré par ses sections globales,* D *un diviseur effectif et réduit à croisements normaux. On suppose que* $\mathcal{O}(D)$ *soit contenu dans une puissance positive de* L *. Alors le morphisme de restriction*

$$H^q(X, L^{-i}) \longrightarrow H^q(D, L^{-i}|_D)$$

est nul pour tout $i > 0$ *et tout* $q \geq 0$.

Remarque 1.7.- Bien sûr on peut reformuler (1.6) comme suit :

$H^q(X, L^{-i}(-D)) \longrightarrow H^q(X, L^{-i})$ est surjectif pour tout $i > 0$ et tout $q \geq 0$.

Ou bien, dualement

$$H^p(X, \omega_X \otimes L^i) \longrightarrow H^p(X, \omega_X \otimes L^i(D))$$

est injectif pour tout $p = n-q \geq 0$ et tout $i > 0$.

Ou bien encore, le morphisme d'adjonction

$$H^p(X, \omega_X \otimes L^i(D)) \longrightarrow H^p(D, \omega_D \otimes L^i)$$

est surjectif pour tout $i > 0$ et tout $p \geq 0$.

Dans la suite, nous changerons souvent de l'une à l'autre notation.

Démonstration de (1.6)

Posons $N = i + 1$ et choisissons un diviseur lisse C sans composante commune avec D , tels que $D + C$ soit un diviseur à croisements normaux et $L^N = \mathcal{O}(C)$. On extrait la racine N-ième de C [4] , (1.7). On obtient les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "\pi"'] & \Delta \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "\pi'"] & \tilde{\Delta} \arrow[l, "r"'] \arrow[d, "\pi''"] \\
X & D \arrow[l] & \tilde{D} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où $\Delta = \pi^{-1}D$ et $\tilde{\Delta}$ est sa normalisation. Notons que Δ est réduit.

Considérons les deux diagrammes

$$\begin{tikzcd}
H^q(Z, \mathbb{C}) \arrow[r, "j^*"] \arrow[dr, "\Psi^*"'] & H^q(\Delta, \mathbb{C}) \arrow[d, "r^*"] \\
& H^q(\tilde{\Delta}, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$.

$$\begin{tikzcd} H^q(Z,\mathcal{O}_Z) \arrow[r, "j'^*"] \arrow[dr, "\psi'^*"'] & H^q(\Delta,\mathcal{O}_\Delta) \arrow[d, "r'^*"] \\ & H^q(\tilde{\Delta},\mathcal{O}_{\tilde{\Delta}}) \end{tikzcd}$$

liés par l'inclusion $\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}$.

On a

$$\operatorname{Ker} j'^* = \operatorname{Ker} \psi'^* \quad .$$

C'est ce qu'explique P. Deligne dans Hodge II et III, et que nous reproduisons ici pour la commodité du lecteur, qui peut déjà remarquer que cela est trivialement vrai si Δ est lisse.

D'après [2], (8.2.2), j^* et r^* sont des morphismes de structures de Hodge mixtes, et en tant que tels compatibles strictement aux filtrations par le poids et de Hodge [2], (2.3.5).

Sachant de plus que $\mathrm{Gr.}^W r^*$ est injectif et que $H^q(Z,\mathbb{C})$ et $H^q(\tilde{\Delta},\mathbb{C})$ portent en fait des structures de Hodge pures, on en déduit [2], (8.2.7), que $\operatorname{Ker} \Psi^* = \operatorname{Ker} j^*$.

Utilisant maintenant que $H^q(\mathcal{O})$ est un terme extrême de $\mathrm{Gr.}^F$, on en déduit que $\operatorname{Ker} \Psi'^* = \operatorname{Ker} j'^*$.

Nous renvoyons ici à J. Steenbrink [8], (§7), (§15), pour une description plus explicite de ces résultats.

Le groupe de Galois opère sur π, π', π'' et donc les diagrammes précédents sont décomposables en espaces propres. En particulier, on a

$$\begin{tikzcd} H^q(X,\mathcal{L}^{-i}) \arrow[r, "j_i^*"] \arrow[dr, "\Psi_i^*"'] & H^q(D,\mathcal{L}^{-i}|_D) \arrow[d] \\ & H^q(\tilde{D},\mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{D}}) \end{tikzcd} \quad .$$

Ainsi qu'il est expliqué dans [4] , (1.10), Ψ_i^* est par dualité de Hodge complexe conjugué de

$$H^0(X,\Omega^q_X\langle C\rangle \otimes \mathcal{L}^{-1}) \longrightarrow H^0(\tilde{D},\Omega^q_{\tilde{D}}\langle C\rangle \otimes \mathcal{L}^{-1}) \quad .$$

Cette application est nulle d'après (1.1) et (1.5), et donc j_i^* est nulle d'après ce qui précède.

(1.8) On dit d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur une variété X qu'il est numériquement positif si son degré sur toute courbe Γ tracée sur X vérifie $\mathrm{dg}_\Gamma \mathcal{L} \geq 0$. On dit de $\mathcal{L}$ qu'il est semi-ample si une de ses puissances positives est engendrée par ses sections globales.

THÉORÈME 1.9.- (J. Kollár). *Soient* X *une variété projective lisse,* L *un faisceau inversible semi-ample,* D *un diviseur effectif tel que* $\mathcal{O}(D)$ *soit contenu dans une puissance positive de* L *. Alors l'application naturelle*

$$H^q(X, L^{-i}(-D)) \longrightarrow H^q(X, L^{-i})$$

est surjective pour tout $i > 0$ *et tout* $q \geq 0$.

Démonstration

Nous réduisons (1.9) à (1.6) de la façon suivante :

a) On peut supposer que $L^\eta = \mathcal{O}(\lambda.D)$ pour deux entiers positifs λ et η . De fait, on a $L^\eta = \mathcal{O}(D+D')$, et il suffit bien sûr de prouver l'assertion pour $D+D'$, à cause de la factorisation

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] H^q(L^{-i}(-D-D')) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^q(L^{-i}) \\ & H^q(L^{-i}(-D)) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

.

b) Considérons la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

où π est un revêtement de X à singularités au plus rationnelles, et σ une désingularisation quelconque. Posons $L_1 = f^*L$, $D_1 = f^*D$. Si $H^q(L_1^{-1}(-D_1)) \longrightarrow H^q(L_1^{-i})$ est surjective pour tout $i > 0$ et tout $q \geq 0$, alors le théorème est démontré, puisque L^{-i} (resp. $L^{-i}(-D)$) est un facteur direct de $f_* L_1^{-i}$ (resp. $f_* L_1^{-i}(-D_1)$) et que f n'a pas de cohomologie relative.

c) Posons π = identité et prenons pour σ une désingularisation plongée de D . On peut ainsi supposer que D est un diviseur à croisements normaux, avec multiplicités.

d) Prenons pour π le revêtement de Kawamata [5], (Theorem (1.7)). On peut ainsi supposer $D = m.D_{\text{réd}}$.

e) Il suffit alors de prouver la surjectivité de $H^q(L^{-i}(-k.D_{\text{réd}})) \longrightarrow H^q(L^{-i}(-(k-1).D_{\text{réd}})$ pour tout $k \geq 1$, tout $i > 0$ et tout $q \geq 0$. Mais alors, d'après a), une puissance de $L^i((k-1).D_{\text{réd}})$ est égale à une puissance de L . En d'autres termes on peut supposer que D est réduit.

f) Prenons maintenant une puissance L^N de L qui soit engendrée par ses sections globales. Prenons une base de celles-ci de sorte que les diviseurs associés C_i

soient lisses et que les $C_i + D$ soient des diviseurs à croisements normaux. On construit un revêtement $\pi : X' \longrightarrow X$ comme revêtement successif d'extraction N-ième des C_i. Alors π^*L est engendré par ses sections globales, $\pi^{-1}D$ reste réduit et $\mathcal{O}(\pi^{-1}D)$ est contenu dans une puissance positive de π^*L. On applique alors (1.6).

(1.10) Nous généralisons maintenant le théorème (1.9) de façon évidente aux revêtements, ainsi que Kawamata [6], (3.2), l'a fait. On considère donc L inversible, B un diviseur effectif à croisements normaux et $L^N(-B)$, pour $N \in \mathbb{N}^*$, sur X projective et lisse. On introduit alors les faisceaux $L^{(i)} = L^i(-[\frac{i.B}{N}])$ [4], (1.8), et on étudie les applications

$$\phi_{i,q} : H^q(X, L^{(i)^{-1}}(-D)) \longrightarrow H^q(X, L^{(i)^{-1}})$$

pour D un diviseur effectif tel que $\mathcal{O}(D)$ soit inclus dans une puissance de $L^N(-B)$.

<u>Corollaires</u>

Soient X, L, N, B *et* D *comme dans* (1.10)

(1.11) *On suppose que* $L^N(-B)$ *est semi-ample. Alors* $\phi_{i,q}$ *est surjective pour* $i > 0$ *et* $q \geq 0$.

(1.12) *On suppose qu'il existe un faisceau inversible semi-ample* K *contenu dans* $(L^N(-B))^b$, *pour un* $b \in \mathbb{N}^*$, *tel que* $(L^N(-B))^{b.\gamma} \otimes K$ *soit semi-ample pour tout* $\gamma \geq 0$. *Alors* $\phi_{i,q}$ *est surjective pour* $i > 0$ *et* $q \geq 0$.

<u>Remarque</u> (1.13).- Une situation typique où la condition de (1.12) est remplie est la suivante : il existe un morphisme $f : X \longrightarrow Z$, un faisceau inversible M, numériquement positif et de dimension de Kodaira maximale, tel que $f^*M = (L^N(-B))^\alpha$, pour un $\alpha > 0$. Alors $K = f^*K'$, où K' est un faisceau ample, dont on peut supposer qu'il est contenu dans M. Bien sûr $M^\gamma \otimes K'$ est ample pour tout $\gamma > 0$.

On remarque ainsi que (1.11) est un cas particulier de (1.12).

<u>Démonstration de (1.11)</u>

Ecrivons $L^{N.k}(-k.B) = M$, où M est engendré par ses sections globales. Choisissons une section C lisse sans composante commune avec B telle que $B + C$ soit un diviseur à croisements normaux. Extrayons la racine (N.k)-ième de $C + k.B$: $\pi : X' \longrightarrow X$. On a $\pi^*M = M'^{k.N}$, pour un faisceau inversible M', et puisque π^*M est engendré par ses sections globales, M' est semi-ample. D'après (1.9), l'application

$$H^q(X', M'^{-1} \otimes \pi^*\mathcal{O}(-D)) \longrightarrow H^q(X', M'^{-1})$$

est surjective pour tout $q \geq 0$. D'autre part, par construction on a $M' = \mathcal{O}(C')$, où $\pi : C' \longrightarrow C$ est un isomorphisme, puisque C est lisse et π est totalement ramifié sur C . De la suite exacte $0 \longrightarrow M'^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \mathcal{O}_{C'} \longrightarrow 0$ on déduit la suite exacte $0 \longrightarrow \pi_* M'^{-1} \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$. Donc $\pi_* M'^{-1} = M^{-1} \oplus V$ où $\pi_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X \oplus V$. D'après [4], (1.8), on a $V = \bigoplus_{1}^{N-1} L^{(i)^{-1}}$. On en déduit (1.11) par formule de projection.

Démonstration de (1.12)

Ecrivons $(L^N(-B))^b = K(E)$, pour E un diviseur effectif. Puisque les faisceaux $L^{(i)}$ sont compatibles aux morphismes birationnels, [10], (2.3), on peut supposer que $B+E$ est un diviseur à croisements normaux. Comme $(L^N(-B))^{b.(c-1)} \otimes K = L^{N.b.c}(-b.c.B-E)$ est semi-ample pour tout $c \geq 2$, on a $L^{(i)} = L^i(-[\frac{i.(b.c.B+E)}{N.b.c}]) = L^i(-[\frac{i.B}{N}])$ si c est très grand. On applique alors (1.11).

2.- APPLICATIONS A LA SITUATION RELATIVE

Tout d'abord nous esquissons brièvement comment l'on obtient à partir des théorèmes d'annulation des théorèmes de positivité pour les images du faisceau dualisant dans une famille. Nous renvoyons à J. Kollár [7] pour plus de détails sur ce point.

(2.1) Soient Y une variété projective lisse et F un faisceau inversible. On suppose que pour un point en position générale y , on ait la propriété suivante :

Soit $\delta : Y' \longrightarrow Y$ l'éclatement de y et E_y la composante exceptionnelle. Alors $\delta^* F(-m.E_y)$ est numériquement positif et de dimension de Kodaira maximale $m = \dim Y$. Si Y est une courbe, cela signifie bien sûr que $F(-y)$ est ample.

Rappelons que les faisceaux $L^{(i)}$ sont introduits en (1.10).

THÉORÈME 2.2.- *Soient* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme dominant entre deux variétés projectives lisses, et* F *comme dans* (2.1) . *Soient* L *un faisceau inversible et* B *un diviseur à croisements normaux sur* X *tels que une puissance positive de* $L^N(-B)$ *soit engendrée par ses sections globales sur un ouvert de la forme* $f^{-1}(U)$, *pour un* N *positif. Alors* $f_*(\omega_{X/Y} \otimes L^{(i)}) \otimes \omega_Y \otimes F$ *est engendré par ses sections globales sur un ouvert, pour tout* $i \geq 0$.

Démonstration

Nous réduisons d'abord la situation au cas où $i = 1$, et $L^N(-B) = \mathcal{O}_X$. (Pour $i = 0$, prendre $L = \mathcal{O}_X$ et $B = 0$) . Pour cela, remarquons que l'on peut supposer que $L^N(-B)$ est engendré par ses sections globales sur un ouvert de la forme $f^{-1}(U)$ en remplaçant $L^N(-B)$ par une puissance positive, et pour la même raison, on peut supposer que $i=1$. Si C est une section générale de $L^N(-B)$, choisissons un morphisme birationnel $\sigma : X' \longrightarrow X$ tel que $C' = \sigma^*C$ soit à croisements normaux ainsi que $B'+C'$, où $B' = \sigma^*B$. Posons $L' = \sigma^*L$.

On a une inclusion $L'(-[\frac{B'+C'}{N}]) \longrightarrow L'(-[\frac{B'}{N}])$ qui est un isomorphisme au-dessus de $f^{-1}(U)$, et l'on peut donc travailler avec $L'^N(-(B'+C'))$ au lieu de $L^N(-B)$.

Prenons maintenant un point $y \in Y$ en position générale ; de sorte que (2.1) soit vérifié, que f soit lisse en y et que $\delta'^*L^{(1)} = \delta'^*L(-[\frac{\delta'^*B}{N}])$ dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\delta'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[\delta]{} & Y \end{array} .$$

Posons $D = f'^*(E_y) \cong E_y \times f^{-1}(y)$

$$M = f'^*\delta^*F(-m.D)$$
$$= f'^*(\delta^*F(-m.E_y)) .$$

On a $\omega_{X'} \simeq \delta'^*\omega_X((m-1).D)$, et donc $M \otimes \omega_{X'}(D) \simeq \delta'^*(f^*F \otimes \omega_X)$.

Puisque $\delta^*F(-m.E_y)$ est de dimension de Kodaira maximale, une puissance contient un faisceau ample qui contient lui-même $O(E_y)$. Ainsi une puissance de M contient $O(D)$. Posons $L' = M \otimes \delta^*L$ et $B' = \delta^*B$. On a bien sûr $L'^N(-B') = M^N \otimes \delta^*(L^N(-B)) = M^N$. D'après la remarque (1.13), on peut alors appliquer (1.12), et l'on obtient que l'application d'adjonction

$$H^q(X', L'(-[\tfrac{B'}{N}]) \otimes \omega_{X'}(D)) \longrightarrow H^q(D, L'(-[\tfrac{B'}{N}] \otimes \omega_D)$$

est surjective. Mais on a $H^q(X', L'(-[\frac{B'}{N}]) \otimes \omega_{X'}(D)) = H^q(X, f^*F \otimes L^{(1)} \otimes \omega_X)$ et $H^q(D, L'(-[\frac{B'}{N}]) \otimes \omega_D) = H^q(f^{-1}(y), f^*F \otimes L^{(1)} \otimes \omega_X|_{f^{-1}(y)})$.

Le point y étant dans le lieu plat de f, on a changement de base. Prenant maintenant $q=0$, on obtient la surjection cherchée

$$H^0(Y, F \otimes f_*(\omega_{X/Y} \otimes L^{(1)}) \otimes \omega_Y) \longrightarrow F \otimes f_*(\omega_{X/Y} \otimes L^{(1)}) \otimes \omega_Y \otimes \mathbb{C}_y$$

où $\mathbb{C}_y$ est le corps résiduel de $O_{Y,y}$.

Remarque (2.3)

L'hypothèse (2.1) implique a fortiori que F est numériquement positif et de dimension de Kodaira maximale. Nous allons voir en (3.1)ii) que cela implique :

$$H^q(X, f^*F \otimes \omega_X \otimes L^{(i)}) = H^0(Y, F \otimes \omega_Y \otimes R^qf_*(\omega_{X/Y} \otimes L^{(i)})$$

Le même argument que dans (2.2), où l'on remplace l'hypothèse de fin de démonstration $q=0$ par $q=p$ prouve donc que :

$$R^p f_*(\omega_{X/Y} \otimes L^{(i)}) \otimes F \otimes \omega_Y$$

est engendré par ses sections globales sur un ouvert.

J. Kollár utilise une forme un peu différente de (2.2) afin de donner une preuve facile du théorème de positivité de Fujita-Kawamata. Sans vouloir entrer dans trop de détails concernant ce théorème, nous nous consacrons directement aux applications et introduisons pour ce la

<u>Définition 2.4</u>.- *Soient* E *un faisceau sans torsion sur une variété lisse* Y *et* K *un faisceau inversible de dimension de Kodaira maximale. Alors* E *est dit faiblement positif si pour tout* $\alpha>0$ *, il existe* $\beta>0$ *tels que*

$$(S^{\alpha\beta}(E) \otimes K^{\beta})^{vv}$$

soit engendré par ses sections globales sur un ouvert non vide, où vv *désigne l'enveloppe réflexive.*

Une telle définition ne dépend pas de K (en particulier on peut prendre pour K un faisceau ample) puisque si $\kappa(K) = \kappa(K')$, alors on a

$K' \subset K^a \subset K'^b$, pour deux entiers positifs a et b (voir par exemple [11],(6.3)).

<u>THÉORÈME 2.5</u>.- *Soient* $f: X \longrightarrow Y$ *un morphisme surjectif entre variétés projectives lisses,* F *comme dans* (2.1) *et* $L^N(-B)$ *comme dans* (2.2). *Alors*
i) *pour tout* $s>0$ *et tout* $i \geq 0$, $\overset{s}{\otimes}(f_*\omega_{X/Y} \otimes L^{(i)}) \otimes F \otimes \omega_Y$ *est engendré par ses sections globales sur un ouvert,*
ii) *pour tout* $i \geq 0$, $f_*(\omega_{X/Y} \otimes L^{(i)})$ *est faiblement positif et*
iii) *pour tout* $\ell \geq 1$, $f_*(\omega^{\ell}_{X/Y})$ *est faiblement positif.*

<u>Démonstration en pointillé</u>

Dans [11], (5.2) et (5.3), est expliquéeune astuce : comment déduire iii) de ii). Considérant l'application naturelle $\overset{s}{\otimes}(\quad) \longrightarrow S^s(\quad)$, on tire facilement ii) de la forme effective donnée en i) :

Soient α et K comme dans (2.4). Pour β grand, on a une inclusion $F \otimes \omega_Y \longrightarrow K^{\beta}$, et pour $s=\alpha.\beta$, on conclut à la condition exigée par (2.4).

Soit donc à prouver i). Quitte à remplacer X par un revêtement, à l'instar de (1.11) ou de [11], (5.1), il suffit de considérer $i=0$, et donc de regarder $f_*(\omega_{X/Y})$. Quitte à rétrécir X et Y en variétés lisses et quasi-projectives, tout en laissant f projective, on peut supposer que f est plat. Soit V une désingularisation de $V' = X \times_Y \dots \times X$ (s fois) et $g: V \longrightarrow Y$ et $g': V' \longrightarrow Y$

les morphismes correspondants. On a [voir [11], (3.5) et [7], (3.4)] une inclusion $g_*\omega_{V/Y} \longrightarrow g_*^!\omega_{V'/Y} = \overset{s}{\otimes} f_*\omega_{X/Y}$ et donc d'après (2.2), on sait que $(\overset{s}{\otimes} f_*\omega_{X/Y}) \otimes F \otimes \omega_Y$ est engendré par ses sections globales sur un ouvert.

COROLLAIRE 2.6.- *Soient* f , F *comme dans* (2.2), $\ell > 1$, *et* K *inversible sur* Y *de dimension de Kodaira maximale. Alors*

$$(f_*\omega_{X/Y}^{\ell} \otimes K \otimes F \otimes \omega_Y)^{\vee\vee}$$

est engendré par ses sections globales sur un ouvert.

Démonstration

Le théorème (2.5) est a fortiori vrai si X et Y sont quasi-projectives. Nous pouvons donc supposer $f : X \longrightarrow Y$ plat et projectif, Y quasi-projective et oublier les enveloppes réflexives. On peut écrire $\mathrm{Im}(f^*f_*\omega_{X/Y}^{\ell} \longrightarrow \omega_{X/Y}^{\ell}) = \omega_{X/Y}^{\ell}(-B')$, pour un diviseur B' à croisements normaux, après avoir éclaté X . Posons alors $L = \omega_{X/Y}^{\ell-1} \otimes f^*K$, $N = \ell$ et $B = (\ell-1).B'$. On a $L^N(-B) = (\omega_{X/Y}^{\ell}(-B'))^{(\ell-1)} \otimes f^*K^{\ell}$. D'après (2.4), il existe $\beta > 0$ tel que $S^{(\ell-1).\beta}(f_*\omega_{X/Y}^{\ell}) \otimes K^{\beta.\ell}$ est engendré par ses sections globales sur un ouvert $U \neq \emptyset$. Ainsi $f^*S^{(\ell-1).\beta}(f_*\omega_{X/Y}^{\ell}) \otimes f^*K^{\beta.\ell} = S^{(\ell-1).\beta}(f^*f_*\omega_{X/Y}^{\ell}) \otimes f^*K^{\beta.\ell}$ est engendré par ses sections globales sur $f^{-1}(U)$, ainsi que son image $S^{(\ell-1).\beta}(\omega_{X/Y}^{\ell}(-B') \otimes f^*K^{\beta.\ell} = (\omega_{X/Y}^{\ell.(\ell-1)}(-(\ell-1)B') \otimes f^*K^{\ell})^{\beta}$. Appliquons alors (2.2). Le faisceau $f_*(L^{(1)} \otimes \omega_{X/Y}) \otimes F \otimes \omega_Y = f_*(\omega_{X/Y}^{\ell}(-[\frac{(\ell-1).B'}{\ell}]) \otimes K \otimes F \otimes \omega_Y$ est engendré par ses sections globales sur un ouvert. Mais on a $f_*\omega_{X/Y}^{\ell}(-B'') = f_*\omega_{X/Y}^{\ell}$ pour tout diviseur effectif B'' vérifiant $B'' \leq B'$, ce qui permet de conclure.

Notation (2.7).- *Soit* Z *une variété projective non singulière, de dimension de Kodaira non négative. Soit* $\eta(Z)$ *le plus petit entier positif* ℓ *tel que l'application rationnelle associée à* ω_Z^{ℓ} *ait une image de dimension* $\kappa(Z)$.

De (2.6) on tire le

COROLLAIRE (2.8).- *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme surjectif entre deux variétés projectives non singulières, de fibre générale* X_y *connexe. Supposons que* Y *soit de dimension de Kodaira maximale* m . *Alors on a*

a) $\kappa(X) = \kappa(X_y) + \kappa(Y)$

b) $\eta(X) \leq \eta(X_y) . \{\frac{(m+2).\eta(Y)+2}{\eta(X_y)}\}$ (*où* $\{*\} = -[-*]$) .

Démonstration

Soit φ l'application rationnelle $\varphi : Y \longrightarrow \varphi(Y) \hookrightarrow \mathbb{P}_1$ associée à $\omega_Y^{\eta(Y)}$, dont on peut supposer après éclatement que c'est un morphisme. Posons

$F = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}((m+1))$. Alors F satisfait aux conditions (2.1). Posons $\ell = \eta(X_y) . \left\{ \frac{(m+2).\eta(Y)+2}{\eta(X_y)} \right\}$ et $r = \ell - ((m+2).\eta(Y)+1) \geq 1$. D'après (2.6), on sait que $(f_* \omega^{\ell}_{X/Y} \otimes \omega_Y^{r+1} \otimes F)^{\vee\vee}$ est engendré par ses sections globales sur un ouvert U . Puisque F est contenu dans $\omega_Y^{\eta(Y)}$, et égal à $\omega_y^{\eta(y)}$ sur un ouvert, on sait a fortiori que $f_* \omega^{\ell}_{X/Y} \otimes \omega_Y^{r+1+\eta(y).(m+1)} = f_* \omega^{\ell}_{X/Y} \otimes \omega_Y^{\ell-\eta(y)}$ est engendré par ses sections globales sur un ouvert, de même que $f_* \omega^{\ell}_{X/Y} \otimes \omega^{\ell}_Y = f_* \omega^{\ell}_X$.

En particulier, on a une inclusion $i : H^0(Y, \omega_Y^{\eta(y)}) \longrightarrow H^0(Y, (f_* \omega^{\ell}_X)^{\vee\vee})$. On s'affranchit de cette enveloppe réflexive par la construction [11], (7.3), qui montre que, pour X et Y bien choisis, on a

$$H^0(Y, (f_* \omega^{\ell}_X)^{\vee\vee}) = H^0(X, \omega^{\ell}_X) \quad .$$

L'inclusion i définit alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "f"'] & \Psi(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] & \mathbb{P}_2 \arrow[d, "pr"] \\ Y \arrow[r, "\varphi"'] & \varphi(Y) \arrow[r, hook] & \mathbb{P}_1 \end{tikzcd}$$

où Ψ est l'application rationnelle associée à ω^{ℓ}_X , et où pr est une projection. Comme φ est génériquement finie, $\Psi|_{X_y}$, pour y général, est dominante sur une composante de $g^{-1}\varphi(y)$.

Comme $f_* \omega^{\ell}_X$ est engendré par ses sections globales sur un ouvert, $\Psi|_{X_y}$ est l'application rationnelle associée à $\omega^{\ell}_{X_y}$, et donc, par définition de ℓ , on a $\dim \Psi(X_y) = \kappa(X_y)$. Ainsi, on a $\dim \Psi(X) = \kappa(X_y) + \dim Y$, et donc $\kappa(X) \geq \kappa(X_y) + \dim Y$. D'après l'inégalité d'Iitaka [3], (théorème 4), on a alors $\kappa(X) = \kappa(X_y) + \dim Y$.

Remarque (2.9)

En s'y prenant avec un peu plus de soins, on peut sûrement améliorer ((2.8)b)).

3.- FIGNOLAGE ET COMMENTAIRES

THÉORÈME 3.1.- (voir [7], (2.1)). *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme dominant de variétés projectives, avec* X *lisse et* Y *réduite. Soient* L *un faisceau inversible sur* X , B *un diviseur effectif à croisements normaux,* K *un faisceau inversible sur* Y *numériquement positif et de dimension de Kodaira maximale.*
A) *Supposons que* $L^N(-B)$ *est semi-ample pour un* $N \in \mathbb{N}^*$. *Alors pour tout* $p > 0$ *tout* $q \geq 0$ *et tout* $i \geq 0$, *on a*

$$H^p(Y, R^q f_* (\omega_X \otimes L^{(i)}) \otimes K) = 0$$

B) *Supposons que* $\mathcal{L}^N(-B) = f^*K$ *pour un* $N \in \mathbb{N}^*$. *Alors pour tout* $p > 0$, *tout* $q \geq 0$ *et tout* $i > 0$, *on a*

$$H^p(Y, R^q f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)}) = 0 \quad .$$

C) *Dans les deux cas* $R^q f_*(\omega_{X/Y} \otimes \mathcal{L}^{(i)}$ *est sans torsion, pour tout* $q \geq 0$ *et tout* $i \geq 0$.

Démonstration

A) Si $i = 0$, on prend $\mathcal{L} = \mathcal{O}$ et $B = 0$. On se ramène à $i > 0$. Considérons alors un diviseur lisse effectif en position générale C tel que $\mathcal{L}^{N.k.i} = \mathcal{O}(i.k.B+C)$. On a $\mathcal{L}^i(-[\frac{i.k}{N.k} B + \frac{1}{N.k} C]) = \mathcal{L}^{(i)}$ et donc on peut supposer que $i = 1$ et $\mathcal{L}^N(-B) = \mathcal{O}$. En remplaçant alors $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes f^*K$, on voit que A) est un cas particulier de B).

B) Choisissons A un faisceau inversible très ample vérifiant les deux propriétés suivantes. Premièrement, A tue la cohomologie

$$H^p(Y, R^q f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)}) \otimes A) = 0$$

pour tout $p > 0$ et tout $q \geq 0$. Deuxièmement $f^{-1}A = D$ est lisse, où A est une section réduite générale de $A = \mathcal{O}(A)$. Considérons la suite exacte d'adjonction

$$0 \longrightarrow \omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)} \longrightarrow \omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{O}(D) \longrightarrow \omega_D \otimes \mathcal{L}^{(i)} \longrightarrow 0$$

Comme A est en position générale, la multiplication par A sur $R^q f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)})$ est injective. On a donc

$$R^q f_*(\omega_D \otimes \mathcal{L}^{(i)}) = R^q f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)}) \otimes A|_A \quad .$$

Considérons la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 = H^p(R^q f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)}) \otimes A) &\longrightarrow \\ H^p(R^q f_*(\omega_D \otimes \mathcal{L}^{(i)})) &\longrightarrow \\ H^{p+1}(R^q f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)})) &\longrightarrow 0 \quad . \end{aligned}$$

Par récurrence sur dimension Y , il suffit alors, pour ii), de prouver la nullité de $E_2^{1q} = H^1(R^q f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)}))$. Si $(q_0 - 1)$ est le plus grand indice q tel que E_2^{1q} soit nul, on a $E_2^{1q_0} = E_\infty^{1q_0}$, et la F-filtration sur $H^{1+q_0}(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)})$ issue de la suite spectrale de Leray vérifie $F_2 = F_3 = \ldots = F_{q_0+2} = 0$. Donc $E_\infty^{1q_0}$ est inclus dans $H^{1+q_0}(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)})$. Par (1.12) et (1.13), on a l'injectivité de

$$H^p(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)}) \longrightarrow H^p(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{O}(D))$$, pour tout $q \geq 0$ et tout

pour tout $q \geq 0$ et tout $i > 0$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_\infty^{1q_0} & \hookrightarrow & H^{1+q_0}(\omega_X \otimes L^{(i)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 = H^1(R^{q_0}f_*(\omega_X \otimes L^{(i)}) \otimes A) & \longrightarrow & H^{1+q_0}(\omega_X \otimes L^{(i)} \otimes \mathcal{O}(D)) \end{array}$$

Donc $E_\infty^{1q_0} = 0$.

C) On peut remplacer L par n'importe quel faisceau $L \otimes f^*A$, pour A très ample et inversible sur Y , de sorte qu'on peut supposer que $C = \mathrm{Ker}(R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)})) \longrightarrow R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)}) \otimes \mathcal{O}(A')$ est engendré par ses sections globales, pour A' un diviseur très ample contenant la torsion de $R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)})$. D'après (1.12), on a, pour $i > 0$, une inclusion $H^q(\omega_X \otimes L^{(i)}) \longrightarrow H^q(\omega_X \otimes L^{(i)} \otimes \mathcal{O}(f^*A'))$, qui, d'après A) et B) est une inclusion $H^0(R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)})) \longrightarrow H^0(R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)}) \otimes \mathcal{O}(A'))$. Donc $C = 0$. (Pour $i = 0$, faire comme dans A)).

<u>COROLLAIRE 3.2</u>.- *Soient* f, L, B *comme dans* (3.1) A) *ou* B). *Soit* $g : Y \longrightarrow Z$ *un morphisme génériquement fini, où* Z *est projective et réduite. Alors* $R^pg_*\, R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)}) = 0$ *pour tout* $p > 0$ *, tout* $q \geq 0$ *et tout* $i \geq 0$.

<u>Démonstration</u>

Soit H un faisceau inversible ample sur Z . Posons $K = g^*H$. K vérifie les hypothèses de (3.1),B). Prenons H suffisamment ample pour que $R^pg_*\, R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)}) \otimes H$ soit engendré par ses sections globales et que

$$H^k(Z, R^\ell g_*(R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)}) \otimes H)) = 0$$

pour tout $k > 0$, tout $\ell \geq 0$. On en déduit $H^p(Y, R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)}) \otimes K) = H^0(Z, R^pg_*(R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)})) \otimes H)$. On conclut par (3.1),A).

<u>Remarque 3.3</u>.-

Intuitivement, (3.1) et (3.2) signifient que les faisceaux $R^qf_*(\omega_X \otimes L^{(i)})$ se comportent comme ω_Y , pour Y non singulier.

(3.4) Les conditions posées en (1.12), qui forcent l'annulation, paraîtraient artificielles si l'on n'avait pas en tête le concept suivant développé par Y. Kawamata.

Pour X projective et lisse, L inversible et numériquement positif Y. Kawamata [6] définit la <u>dimension numérique</u> $\nu(L)$ de L comme le plus grand entier e tel que $c_1(L)^e$ ne soit pas numériquement nul. Puis il dit de

L qu'il est <u>numériquement bon</u> si $\nu(L) = \kappa(L)$. Dans ce cas, il prouve l'existence d'un diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

où Y et Z sont deux variétés projectives lisses, η est birationnelle, et il existe $a \in \mathbb{N}^*$ et un faisceau inversible numériquement positif N sur Z vérifiant $\nu(N) = \kappa(N) = \dim Z$ tels que $\eta^* L^a = f^* N$. (En fait, utilisant la même construction, il montre d'une façon générale que $\nu(L) \geq \kappa(L)$) . Si on prend H' inversible et ample sur Z , N^β contient H' pour β grand, et donc $(\eta^* L)^{a \cdot \beta}$ contient $H = f^* H'$. Posons $b = a \cdot \beta$. Puisque $N^\gamma \otimes H'$ est ample, pour tout $\gamma \geq 0$, $(\eta^* L)^{b \cdot c} \otimes H$ est semi-ample pour tout $c \geq 0$.

<u>COROLLAIRE 3.5</u>.- *Soient* X *une variété projective lisse,* L *un faisceau inversible,* $N \in \mathbb{N}^*$, B *un diviseur effectif à croisements normaux tels que* $L^N(-B)$ *soit numériquement bon. Alors les morphismes* $\phi_{i,q}$ *de* (1.10) *sont surjectifs pour tout* $q \geq 0$ *et tout* $i > 0$.

<u>Démonstration</u> : Comme nous venons de voir, on peut appliquer (1.12) sur Y , à $\eta^* D$ et $\eta^* L^N(-B)$. Il suffit alors de montrer que l'on peut "redescendre" à X . On applique donc la compatibilité des faisceaux $\omega_X \otimes L^{(i)}$ aux éclatements [10], (2.3).

REFERENCES

[1] F. BOGOMOLOV.- *Unstable vector bundles and curves on surfaces*, Proc. Intern. Congress of Math., Helsinki 1978, 517-524.

[2] P. DELIGNE.- *Théorie de Hodge* II *et* III, Publ. Math. I.H.E.S 40, 1971, 5-58 et 44, 1975, 5-77.

[3] H. ESNAULT.- *Classification des variétés de dimension* 3 *et plus*, Séminaire Bourbaki n°568, Lect. Notes in Math. Vol. 901, 111-131, Berlin-Heidelberg-New-York : Springer 1982.

[4] H. ESNAULT, E. VIEHWEG.- *Revêtements cycliques*, *Algebraic Threefolds, Proceedings*, Varenna 1981. Lect. Notes in Math., vol 947, 241-250, Berlin-Heidelberg-New-York : Springer 1982.

[5] Y. KAWAMATA.- *Characterization of abelian varieties*, Comp. Math. 43, fasc. 2, 1981, 253-276.

[6] Y. KAWAMATA.- *Pluricanonical Systems on Minimal Algebraic Varieties*, manuscrit.

[7] J. KOLLAR.- *Higher direct images of dualizing sheaves*, manuscrit.

[8] J. STEENBRINK.- *Mixed Hodge structures and singularities*, livre en préparation.

[9] S.G. TANKEEV.- *On* n-*dimensional canonically polarized varieties and varieties of fundamental type*, Izv. A.N SSSR, Ser. Math. 35, 1971, 31-44.

[10] E. VIEHWEG.- *Vanishing theorems*, J. Reine angew. Math. 330, 1982, 132-142.

[11] E. VIEHWEG.- *Weak positivity and the additivity of the Kodaira Dimension for certain fibre spaces*, Adv. St. in Pure Math. 1, 1983, 329-353.

Université PARIS VII et Max-Planck-Institut für Mathematik, Gottfried-Claren St. 26
D. 5300 BONN 3 - R.F.A

Universität-Gesamthochschule-Essen.
FB 6 Mathematik Universitäts St.3
D. 4300 ESSEN 1 - R.F.A