Math. Ann. 263, 75–86 (1983)

Mathematische Annalen

Sur une minoration du degré d'hypersurfaces s'annulant en certains points

Hélène Esnault[1] et Eckart Viehweg[2]

1 Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques, Tour 45–55, 5-ième étage, 2, Place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France
2 Institut für Mathematik und Informatik, A 5, Seminargebäude, D-6800 Mannheim 1, République Fédéral Allemande

Donnons-nous un ensemble fini S de points p_i dans une sous-variété quasi-projective lisse X^0 de $\mathbb{P}^n$ sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Appelons Z la complétée projective de X^0 dans $\mathbb{P}^n$. On introduit les entiers

$$\begin{aligned}\omega_t(S, Z) = \inf\{d;\ & \text{il existe } f \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n] - \mathscr{I}(Z), \\ & f \text{ homogène de degré } d, \text{ tel que } f \in \mathscr{M}^t_{p_i, Z} \text{ pour} \\ & \text{tout } p_i \in S\},\end{aligned}$$

où $\mathscr{M}_{p_i, Z}$ est l'idéal maximal de p_i dans Z et $\mathscr{I}(Z)$ l'idéal homogène de Z.

Comme corollaire de résutats dûs à Enrico Bombieri sur la théorie des estimations L^2 et des théorèmes d'existence pour l'opérateur $\bar{\partial}$, une inégalité est démontrée entre $\omega_t(S, \mathbb{P}^n)$ et $\omega_{t'}(S, \mathbb{P}^n)$, pour deux entiers positifs t et t', que Skoda améliore sous la forme

$$\frac{\omega_{t'}(S, \mathbb{P}^n)}{t' + n - 1} \leqq \frac{\omega_t(S, \mathbb{P}^n)}{t}.$$

Pour toutes ces notions et les références précises correspondantes, nous renvoyons au livre de Waldschmidt [6, Sect. 7].

Chudnovsky conjecture l'inégalité

$$\frac{\omega_1(S, \mathbb{P}^n) + n - 1}{n} \leqq \frac{\omega_t(S, \mathbb{P}^n)}{t} \tag{$*$}$$

qu'il prouve dans le cas $n = 2$. Demailly redémontre $(*)$ par des méthodes analytiques dans le cas $n = 2$ ou bien dans celui où S contient un polytope complet à

$$\binom{\omega_1(S, \mathbb{P}^n) + n - 1}{n}$$

sommets. Indépendemment, Wüstholz et Masser, l'un par des méthodes d'algèbre commutative et de théorie de l'intersection, l'autre d'algèbre linéaire, démontrent une inégalité un peu moins précise que celle de Bombieri-Skoda-Waldschmidt, qu'ils peuvent améliorer dans le cas $n=2$ par des méthodes locales pour redonner (*). Par ailleurs, Wüstholz prouve aussi l'inégalité

$$\frac{H(\omega_1(S,Z)-1;Z)}{\omega_1(S,Z)^{m-1}\cdot\deg(Z)} \leqq \frac{\omega_t(S,Z)}{t},$$

où $H(x;Z)$ est la fonction de Hilbert de Z, $\deg(Z)$ son degré et m sa dimension. Nous renvoyons ici par exemple à [7] et [8] et aux références correspondantes.

Dans cet article nous prouvons par des méthodes de géométrie projective complexe les inégalités

$$\frac{\omega_{t'}(S,\mathbb{P}^n)+1}{t'+n-1} \leqq \frac{\omega_t(S,\mathbb{P}^n)}{t}, \quad \text{pour} \quad n\geqq 2 \tag{A}$$

$$\frac{\omega_{t'}(S,Z)+1-\deg(Z)}{t'+m-1} \leqq \frac{\omega_t(S,Z)}{t}, \quad m=\dim(Z)\geqq 1 \tag{B}$$

(voir Par. 1, Théorème II, Théorème I et Remarque (1.1), pour les énoncés précis).

Autant que nous sachions – et en tant que non spécialistes nous espérons n'avoir oublié ni de résultats ni de noms importants – l'inégalité (A) englobe et étend toutes les autres concernant $\omega_t(S,\mathbb{P}^n)$. En tenant compte des «mauvaises» singularités d'une hypersurface attachée à $\omega_t(S,\mathbb{P}^n)$ et de leur codimension, nous sommes en mesure de l'améliorer sensiblement [Remarque (1.2)]. Il nous semble que le point de vue adopté ici met en relief le lien entre d'une part le comportement de $\omega_{t'}(S,Z)$ en fonction de celui de $\omega_t(S,Z)$ et d'autre part le rôle joué par le lieu singulier de l'hypersurface associée à $\omega_t(S,Z)$. L'inégalité (B) est un cas spécial d'un résultat de type Bombieri-Skoda-Waldschmidt où l'on autorise S à être un ensemble de sous-variétés quelconques de X^0.

1. Enoncé des résultats

Soit X^0 une sous-variété quasi-projective lisse de $\mathbb{P}^n$. On appelle *degré* de X le degré de sa complétée projective Z dans $\mathbb{P}^n$.

Soit X_j^0 une sous-variété réduite et irréductible de X^0, de complétée projective Z_j dans Z. On dit qu'une section s de $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ *s'annule à l'ordre t_j le long de X_j^0 et ne s'annule pas le long de X^0* si, dans l'anneau local $\mathcal{O}_{Z_j,Z}$, s est dans $\mathcal{M}^{t_j}$ et est non nulle, où $\mathcal{M}=\mathcal{M}_{Z_j,Z}$ est l'idéal maximal. Bien sûr, s a le droit d'être dans $\mathcal{M}^{t_j+r}$ pour $r\geqq 0$.

Comme de coutume, on définit l'entier $[b]$, pour tout réel b, par $b-1<[b]\leqq b$.

Théorème I. *Soit $S=\{X_j^0;j=1,\dots,v\}$ un ensemble fini de sous-variétés réduites et irréductibles X_j^0, de dimensions n_j, d'une variété quasi-projective lisse X^0 de dimension $m\geqq 1$ de $\mathbb{P}^n$. Supposons qu'il existe une section s de $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ qui s'annule à un ordre donné $t_j\geqq 1$ le long de X_j^0, pour $j=1,\dots,v$, sans s'annuler le long de X^0. Fixons des entiers $t'_j\geqq 1$, et*

$$i\geqq[(t'_j+m-n_j-1)\cdot d\cdot t_j^{-1}]+1$$

pour $j=1,\dots,v$.

Alors il existe une section de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\deg(X^0)+i-2))$ *qui s'annule le long de* X_j^0 *à l'ordre* t'_j, *pour tout* $j=1,\ldots,v$, *sans s'annuler le long de* X^0.

Remarque (1.1). Si $n_1=n_2=\ldots=n_v=0$, c'est-à-dire si S est un ensemble de points, en posant $t_1=\ldots=t_v=t$ et $t'_1=\ldots=t'_v=t'$ on trouve

$$\omega_{t'}(S,Z) \leqq (t'+m-1)\cdot d\cdot t^{-1}-1+\deg(Z)$$

et donc l'inégalité (B).

Théorème II. *Soit* S *un ensemble fini de points* p_j *dans* $\mathbb{P}^n$, $n\geqq 2$. *Alors, s'il existe une section non nulle* s *de* $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ *qui s'annule à l'ordre* $t\geqq 1$ *en tout* p_j *de* S, *il existe pour* $i\geqq 2$ *une section non nulle de* $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i-2))$ *qui s'annule en tout* p_j *de* S *à l'ordre* $t'\geqq 1$ *dès que*

$$i\geqq[(t'+n-1)\cdot d\cdot t^{-1}]+1\,.$$

Remarque (1.2). Dans la démonstration (Par. 4) il apparaîtra que les «*mauvaises singularités*» du diviseur $V(s)$ associé à s jouent un «mauvais tour». Celles que nous appelons mauvaises ne sont que les singularités en lesquelles le diviseur réduit associé à $V(s)$ n'est pas à croisements normaux. Pour $\beta\leqq n$, les mauvaises singularités étant en codimension supérieure ou égale à β par rapport à $\mathbb{P}^n$, nous démontrons l'inégalité

$$(\omega_{t'}(S,\mathbb{P}^n)+\beta-1)\cdot(t'+n-1)^{-1}\leqq d\cdot t^{-1}\,.$$

Puisque pour $n\geqq 2$, on peut toujours choisir au pire $\beta=2$, on obtient ainsi le théorème II. On atteindrait alors la conjecture de Chudnovsky (∗) si l'on savait que l'hypersurface associée à $\omega_t(S,\mathbb{P}^n)$ n'a de mauvaise singularités que des singularités isolées, i.e. $\beta=n$.

Remarque (1.3). On pourrait aussi, dans le cas où le support n'est plus $\mathbb{P}^n$ mais un Z quelconque, introduire les mauvaises singularités du diviseur $V(s)\cap Z$ de Z associé à une section s de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, comme sous-variété de Z où Z et $V(s)$ ne se coupent pas transversalement. Malheureusement, même si Z est lisse, ces singularités peuvent être en codimension 1, de sorte que la formulation générale du théorème I ne s'en trouverait pas améliorée. C'est pourquoi nous ne parlerons pas de cet «essai manqué».

Notations. Rappelons que nous donnons dans les paragraphes suivants une démonstration des théorèmes I et II dans le cadre de la géométrie algébrique complexe. Pour ce, nous utilisons les notations du livre de Hartshorne [4], avec une exception : si Y est une variété algébrique et D un diviseur de Cartier, on note $\mathcal{O}_Y(D)$ le faisceau inversible associé (contrairement à la notation $\mathscr{L}(D)$ utilisée dans [4, p. 144]). Par ailleurs, on ne confondra pas le $\omega_t(S,Z)$ des arithméticiens avec le faisceau dualisant ω_Y.

2. Préliminaires

(2.1)

Soit B un diviseur effectif sur une variété projective lisse complexe Y. On pose $B=\sum v_j\cdot E_j$, où les E_j sont les composantes irréductibles de B. Si l'on suppose que ce diviseur est associé à une puissance positive $\mathscr{L}^d$ d'un faisceau inversible $\mathscr{L}$. i.e. $\mathscr{L}^d = \mathcal{O}_Y(\sum \nu_j \cdot E_j)$, on pose, pour tout $i \geqq 0$,

$$\mathscr{L}^{(i)} = \mathscr{L}^i \otimes \mathcal{O}_Y(-\sum [\nu_j \cdot i \cdot d^{-1}] \cdot E_j).$$

Si $0 \leqq i < d$, la définition de $\mathscr{L}^{(i)}$ ne fait intervenir que les E_j pour lesquels $\nu_j \geqq 2$. Lorsque l'on voudra souligner le rôle de la partie réduite D de B, on écrira

$$B = D + \sum_{\nu_j \geqq 2} \nu_j \cdot E_j, \quad \text{où} \quad D = \sum_{\nu_j = 1} \nu_j \cdot E_j.$$

(2.2)

On suppose que le diviseur B de (2.1) est à *croisement normaux*, c'est-à-dire que les E_j sont lisses et se coupent transversalement. La section s de $\mathscr{L}^d$, de support B, définit sur le faisceau de $\mathcal{O}_Y$-modules $\mathscr{A} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathscr{L}^{-i}$ une structure d'algèbre. En effet, la multiplication de A est définie par la multiplication

$$\mathscr{L}^{-i} \oplus \mathscr{L}^{-j} \to \mathscr{L}^{-i} \otimes \mathscr{L}^{-j} = \mathscr{L}^{-i-j},$$

une fois identifié $\mathscr{L}^{-d}$ à un sous-faisceau de $\mathscr{L}^0 = \mathcal{O}_Y$ par la section duale de s. On note W la normalisation de $\mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{A})$, V une désingularisation de W et comme suit les morphismes associés

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & W \arrow[d, "\tau"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

La variété W sera dite *extraction d-ième du diviseur B.*

Lemme ([1, Par. 1] et [2, Par. 1]). i) *W n'a que des singularités rationnelles (i.e. $R^i g_* \mathcal{O}_V = 0$ pour $i \neq 0$). En particulier W est de Cohen-Macaulay, et τ est plat.*

ii) *On a* $\tau_* \mathcal{O}_W = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathscr{L}^{(i)^{-1}}$ *et donc* $R^i f_* \mathcal{O}_V = \begin{cases} \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathscr{L}^{(i)^{-1}}, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}.$

Théorème (2.3.1). *Soient Y, B et $\mathscr{L}$ comme dans* (2.2) *et ω_Y le faisceau canonique. Supposons que la dimension de Kodaira de $\mathscr{L}$ vérifie $\kappa(\mathscr{L}) = \dim(Y) = n$, et que $\mathscr{L}$ est engendré par ses sections globales. Alors on a*

$$H^q(Y, \omega_Y \otimes \mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}^k) = 0$$

pour tous $k > 0$, $q > 0$ et $i \geqq 0$.

Démonstration. D'après (2.2) et la dualité de Serre [4, III, Par. 7], on a

$$H^q(V, \omega_V \otimes f^* \mathscr{L}^k) = H^{n-q}(V, f^* \mathscr{L}^{-k}) = \bigoplus_{i=0}^{d-1} H^{n-q}(Y, \mathscr{L}^{(i)^{-1}} \otimes \mathscr{L}^{-k})$$
$$= \bigoplus_{i=0}^{d-1} H^q(Y, \omega_Y \otimes \mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}^k).$$

Le faisceau $f^*\mathscr{L}^k$ étant de dimension de Kodaira maximum et engendré par ses sections globales, on peut appliquer le théorème d'annulation de Grauert et Riemenschneider [3] pour trouver le résultat pour $i<d$. Si $i \geqq d$, on écrit $\mathscr{L}^{v \cdot d} = \mathcal{O}_Y(v \cdot B)$ pour $i < v \cdot d$.

En fait, le théorème (2.3.1) est un cas particulier du

Théorème (2.3.2) ([2, Par. 2] ou [5]). *Soient Y, B et $\mathscr{L}$ comme dans* (2.2). *Supposons de plus que la dimension de Kodaira de $\mathcal{O}_Y(D)$ vérifie $\kappa(\mathcal{O}_Y(D)) = \dim(Y)$. Alors on a*

$$H^q(Y, \omega_Y \otimes \mathscr{L}^{(i)}) = 0$$

pour tous $q>0$ et $d>i>0$.

La démonstration repose sur les trois faits suivants:

i) Le calcul des $\mathscr{L}^{(i)}$ exposé en (2.2).

ii) La symétrie des nombres de Hodge de la variété V.

iii) La fermeture des formes différentielles globales à pôles logarithmiques le long d'un diviseur à croisements normaux.

Seul i) est purement algébrique. Jusqu'à présent, il n'y a pas de démonstration algébrique de ii) et iii).

(2.4)

Soit X^0 une sous-variété quasi-projective lisse de dimension $m \geqq 1$ de $\mathbb{P}^n$. Soient Z sa complétée projective dans $\mathbb{P}^n$ et $\pi: X \to Z$ un morphisme birationnel tel que X soit lisse et projective. Au cours de la démonstration du théorème I, nous construisons des sections de certains faisceaux inversibles sur X que nous voulons identifier à la restriction sur X^0 de fonctions polynômiales sur $\mathbb{P}^n$. Nous le faisons à l'aide de la proposition de «chasse aux sections» qui suit. Soient X' la normalisée de Z et

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr, "\pi"] & & \\ X' \arrow[r, "\pi'"'] & Z \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

les morphismes correspondants. Appelons U l'ouvert des points lisses de X'.

Pour toute variété U' et tout morphisme $\varphi: U' \to \mathbb{P}^n$, on pose $\mathcal{O}_{U'}(1) = \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Pour tout l, appelons θ_l la composition des applications canoniques:

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) \to H^0(Z, \mathcal{O}_Z(l)) \xrightarrow{\pi'^*} H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(l)) \to H^0(U, \mathcal{O}_U(l)).$$

Proposition. *Il existe une injection*

$$j: \omega_U \to \mathcal{O}_U(\deg(X^0) - m - 2)$$

vérifiant que, pour tout k, l'image par j de $H^0(U, \omega_U \otimes \mathcal{O}_U(k))$ dans $H^0(U, \mathcal{O}_U(\deg(X^0) - m - 2 + k))$ est contenue dans l'image de $\theta_{\deg(X^0) - m - 2 + k}$.

Démonstration. Il suffit de démontrer la proposition où l'on remplace U par tout ouvert X_1 de points lisses dont le complément $X' - X_1$ est de codimension au moins deux. Choisissons une projection générique de degré 1 de Z sur Z', hypersurface de degré $\deg(X^0)=\deg(Z)$ dans $\mathbb{P}^{m+1}$. Notons Δ le lieu de $\mathbb{P}^n$ sur lequel cette projection n'est pas définie et comme suit les morphismes associés:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[dr, "p"'] & Z \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{P}^n - \Delta \arrow[d, "p'"] \\
 & Z' \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^{m+1}
\end{tikzcd}$$

Le morphisme p est fini. Posons $X_1=X'-p^{-1}(p(\mathrm{Sing}(X')))$ et $Z_1=p(X_1)$. Alors $Z'-Z_1$ est de codimension au moins deux dans Z'.

En tant qu'hypersurface de $\mathbb{P}^{m+1}$, Z' est de Gorenstein, donc admet un faiceau dualisant inversible vérifiant [4, II, Par. 8 et III, Par. 7] $\omega_{Z'}=\mathcal{O}_{Z'}(\deg(X^0))-m-2)$.

On a donc $\omega_{Z_1}=\mathcal{O}_{Z_1}(\deg(X^0)-m-2)$.

Par ailleurs, on a [4, III, Ex. 6.10 et 7.2] $p_*\omega_{X_1}=\mathcal{H}om_{Z_1}(p_*\mathcal{O}_{X_1},\omega_{Z_1})$. Le conoyau $\mathcal{C}$ de l'inclusion $\mathcal{O}_{Z_1}\to p_*\mathcal{O}_{X_1}$ étant de torsion, on a $\mathcal{H}om_{Z_1}(\mathcal{C},\omega_{Z_1})=0$, ce qui founit une inclusion

$$p_*\omega_{X_1}\to\omega_{Z_1}=\mathcal{O}_{Z_1}(\deg(X^0)-m-2)$$

et donc un morphisme non nul

$$j':p^*p_*\omega_{X_1}\to p^*\omega_{Z_1}.$$

Le noyau $\mathcal{T}$ de la surjection canonique

$$p^*p_*\omega_{X_1}\to\omega_{X_1}$$

étant de torsion, on a $j'|_{\mathcal{T}}=0$, donc j' se factorise en

$$j:\omega_{X_1}\to p^*\omega_{Z_1}=\mathcal{O}_{X_1}(\deg(X^0)-m-2).$$

De plus, les deux faisceaux étant inversibles et j étant non nul, j est injectif. D'autre part, Δ étant de codimension au moins deux dans $\mathbb{P}^n$, on a

$$\begin{aligned}&H^0(\mathbb{P}^n-\Delta,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n-\Delta}(\deg(X^0)-m-2+k))\\ &=H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\deg(X^0)-m-2+k)).\end{aligned}$$

De même, $Z'-Z_1$ étant de codimension au moins deux dans Z', qui est de Gorenstein, a fortiori de Cohen-Macaulay, on a $H^0(Z_1,\omega_{Z_1}(k))=H^0(Z',\omega_{Z'}(k))$. La flèche de restriction

$$\gamma:H^0(\mathbb{P}^{m+1},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m+1}}(\deg(X^0)-m-2+k))\to H^0(Z',\omega_{Z'}(k))$$

est surjective, son conoyau étant dans $H^1(\mathbb{P}^{m+1},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m+1}}(-m-2+k))$, qui est nul car $m\geqq 1$. On obtient les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
H^0(X_1,\omega_{X_1}(k)) \arrow[dr, "j"] & & \\
H^0(X_1,p^*p_*\omega_{X_1}(k)) \arrow[u] \arrow[r, "j'"] & H^0(X_1,p^*\omega_{Z_1}(k)) & H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\deg(X^0)-m-2+k)) \arrow[l, "\theta"'] \\
H^0(Z_1,p_*\omega_{X_1}(k)) \arrow[u, "p^*"] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, hook] \arrow[uu, bend left=60, "\beta"] & H^0(Z_1,\omega_{Z_1}(k)) \arrow[u, "p^*"'] & H^0(\mathbb{P}^{m+1},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m+1}}(\deg(X^0)-m-2+k)) \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[u, "p'^*"'] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

où par définition β est l'identité et $\alpha = j' \cdot p^*$. Donc $\mathrm{Im}(j) = \mathrm{Im}(\alpha)$ est contenu dans

$$p^*(H^0(Z_1, \omega_{Z_1}(k))) = \theta \cdot p'^*(H^0(\mathbb{P}^{m+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m+1}}(\deg(X^0) - m - 2 + k))),$$

lui-même contenu dans $\mathrm{Im}(\theta)$.

3. Démonstration du théorème I

(3.1)

Nous considérons la situation du Par. 1. Soient X^0 quasi-projective lisse, de dimension m, Z sa complétée projective dans $\mathbb{P}^n$, $\{X_j^0\}_{j=1,\ldots,v}$ des sous-variétés réduites et irréductibles de X^0, de dimensions n_j, Z_j leurs complétées projectives dans Z.

Soit maintenant X' la normalisation de X. Depuis Hironaka (voir [4, V, 3.8.1], pour les résultats et références correspondantes) on sait qu'il existe une variété projective lisse X, et un morphisme birationnel $X \to X'$ obtenu par une suite finie d'éclatements à centres lisses situés au dessus du lieu singulier de X'. En particulier, on peut concevoir l'ensemble des points lisses de X' comme ouvert U de X. Dorénavant, on entendra par désingularisation de Z un tel morphisme birationnel $\pi: X \to Z$ que l'on fixe une fois pour toutes. Appelons X_j la transformée stricte de Z_j, qui contient bien sûr X_j^0.

(3.2)

Nous construisons une désingularisation du diviseur $V(s)$ associé à la section s du théorème I. Afin de simplifier la suite, nous la donnons «explicitement».

Ordonnons les dimensions n_j des X_j en $m_1 < \ldots < m_l$. Considérons la sous-variété de X de dimension m_1 : $\bigcup_{n_j = m_1} X_j$. Par une suite d'éclatements à centres lisses situés au dessus du lieu singulier de $\bigcup_{n_j = m_1} X_j$, on désingularise ce schéma réduit. En fait, ces éclatements sont la restriction d'éclatements de même centre, mais considérés dans X [4, II, 7.15], de sorte que la variété de plongement reste lisse. On a donc un éclaté de X dans lequel les transformés stricts des X_j sont lisses et deux à deux disjoints, pour $n_j = m_1$. Eclatons-les simultanément, ce qui revient à éclater leur réunion. Appelons $\varrho_1 : Y_1 \to X$ le morphisme birationnel ainsi contruit et F_j^1 le diviseur image inverse de X_j pour $n_j = m_1$. Comme ϱ_1 est composé d'éclatements à centres de dimension inférieure ou égale à m_1, l'image inverse stricte de X_j, que l'on note encore X_j, pour $n_j \geqq m_2$, est birationnelle à X_j.

Prenons $\bigcup_{n_j = m_2} X_j$ dans Y_1 et faisons la même construction. On otient ainsi un morphisme birationnel de Y_2 vers Y_1, et donc un morphisme birationnel $\varrho_2 : Y_2 \to X$.

On note F_j^2 le diviseur image inverse stricte de X_j dans Y_2 pour $n_j = m_2$. On continue jusqu'à la dimension m_l et on note F_j^r les diviseurs lisses au-dessus de la transformée stricte de X_j dans Y_r pour $n_j = m_r$ et comme suit les morphismes birationnels obtenus:

$$\begin{tikzcd} Y_l \arrow[r, "\varrho_l"] \arrow[dr] & X \\ & Y_r \arrow[u, "\varrho_r"'] \end{tikzcd}$$

Cela posé, on considère enfin $\varrho_l^{-1}(V(s))$, dont on fait une désingularisation plongée. Pour cela, on construit une variété projective et lisse Y par une suite d'éclatements de Y_l de sorte que le transformé total de $\varrho_l^{-1}(V(s))$ soit un diviseur à croisements normaux. On note F_j les transformés stricts des F_j^r et comme suit les morphismes associés:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varrho"] \arrow[dr, "\sigma_r"'] & X \arrow[r, "\pi"] & Z \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n \\ & Y_r \arrow[u, "\varrho_r"'] & & \end{tikzcd}$$

Posons, comme dans (2.4), $\mathcal{O}_Z(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_Z$, $\mathcal{O}_X(1)=\pi^*\mathcal{O}_Z(1)$, $\mathcal{L}_r=\varrho_r^*\mathcal{O}_X(1)$ et $\mathcal{L}=\varrho^*\mathcal{O}_X(1)$. La section s étant dans $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, la section $\varrho^*\pi^*s$ est dans $H^0(Y,\mathcal{L}^d)$ et son diviseur associé est un diviseur B à croisements normaux, transformé total de $V(s)$. Comme en (2.1), nous écrivons $\mathcal{L}^d=\mathcal{O}_Y(\sum v_j\cdot E_j)$. Notons que, par hypothèse du théorème I, $\varrho_r^*\pi^*s$ est dans $H^0(Y_r,\mathcal{L}_r^d\otimes\mathcal{O}_{Y_r}(-t_j\cdot F_j^r))$ pour tous r et j tels que $n_j=m_r$. En particulier, $\sum v_j\cdot E_j$ contient $\sum t_j\cdot F_j$.

Lemme (3.3). *Pour tous $1\leqq r\leqq l$ et $k\geqq 0$, on a les inclusions*

a) $\sigma_{r*}(\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{(i)}\otimes\mathcal{L}^k)\to\omega_{Y_r}\otimes\mathcal{L}_r^i\otimes\mathcal{O}_{Y_r}(-\sum[t_j\cdot i\cdot d^{-1}]\cdot F_j^r)\otimes\mathcal{L}_r^k$,

b) $\varrho_*(\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{(i)}\otimes\mathcal{L}^k)\to\varrho_{r*}(\omega_{Y_r}\otimes\mathcal{L}_r^i\otimes\mathcal{O}_{Y_r}(-\sum[t_j\cdot i\cdot d^{-1}]\cdot F_j^r)\otimes\mathcal{L}_r^k)$
$\to\omega_X\otimes\mathcal{O}_X(i+k)$.

Preuve. Puisque $\sum v_j\cdot E_j$ contient $\sum t_j\cdot F_j$, on a l'inclusion

$$\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{i)}\otimes\mathcal{L}^k\to\sigma_r^*(\omega_{Y_r}\otimes\mathcal{L}_r^i\otimes\mathcal{O}_{Y_r}(-\sum[t_j\cdot i\cdot d^{-1}]\cdot F_j^r)\otimes\mathcal{L}_r^k)\otimes\mathcal{O}_Y(E)$$

où E est un diviseur effectif contenu dans le lieu exceptionnel du morphisme birationnel σ_r. Donc $\sigma_{r*}\mathcal{O}_Y(E)=\mathcal{O}_{Y_r}$ et on applique la formule de projection pour obtenir a). Les insclusions b) sont alors triviales.

Rappelons-nous ici que (2.4) permet d'identifier des sections de $\omega_X\otimes\mathcal{O}_X(i+k)$, par l'intermédiaire de leurs restrictions à l'ouvert U, à des fonctions polynômiales sur $\mathbb{P}^n$, restreintes à X^0. On ramène dans ce qui suit le théorème I à l'existence de sections de $\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{(i)}\otimes\mathcal{L}^k$, pour un k convenable.

Lemme (3.4). *Supposons que $c_1(\mathcal{L})^{m-1}\cdot c_1(\mathcal{L}^{(i)})>0$ (ou bien que $c_1(\mathcal{L}^{(i)})>0$ si $m=1$). Alors on a $H^0(Y,\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{(i)}\otimes\mathcal{L}^m)\neq 0$.*

Preuve. Si $m=\dim(Y)\geqq 2$, choisissons une section hyperplane H de $\mathbb{P}^n$ en position générale. Appelons Y' l'image inverse dans Y de H. On a $\omega_{Y'}=\omega_Y\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{Y'}$.

De la suite exacte

$$0 \to \omega_Y \otimes \mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}^{m-1} \to \omega_Y \otimes \mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}^m \to \omega_{Y'} \otimes \mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}^{m-1} \to 0$$

et de (2.3.1), on est ramené à prouver l'existence d'une section non nulle de $\omega_{Y'} \otimes \mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}^{m-1}$.

Posons $Z' = Z \cap H \subset H \cong \mathbb{P}^{n-1}$, et appelons X' son image inverse dans X. Alors, X' et Y' sont lisses, Y' rencontre transversalement $\sum v_j \cdot E_j$, le diviseur $\sum v_j \cdot E_j|_{Y'}$ est à croisements normaux, de sorte que ce diviseur, $\mathscr{L}^d|_{Y'}$ et $\mathscr{L}^{(i)}|_{Y'}$ sont des données de type (2.2).

Ainsi, en procédant par récurrence sur la dimension de Y, il faut prouver l'existence d'une section du faisceau $\omega_C \otimes \mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}$, où C est la normalisation d'une intersection générique de Z avec $\mathbb{P}^{n-m+1}$.

Dans le cas $m=1$, C est simplement Y. On a

$$\deg_C(\mathscr{L}^{(i)}) = \sum (v_j \cdot i \cdot d^{-1} - [v_j \cdot i \cdot d^{-1}]) \cdot \deg_C(E_j) \geqq 0 .$$

L'hypothèse signifie que $\deg_C(\mathscr{L}^{(i)}) > 0$. Donc on a $\deg_C(\mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}) \geqq 2$. Cela garantit l'existence d'une section non nulle de $\omega_C \otimes \mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}$, indépendamment du genre de C.

Remarque (3.5). On a montré en fait que, sans hypothèses, on a toujours $H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}^{m+1}) \neq 0$.

(3.6) *Fin de la démonstration du théorème* I

Sous l'hypothèse de (3.4), on a construit une section non nulle de $\omega_Y \otimes \mathscr{L}^{(i)} \otimes \mathscr{L}^m$, donc (3.3, b), une section de $\omega_X \otimes \mathcal{O}_X(i+m)$. Par restriction à l'ouvert U, on obtient une section de $\omega_U \otimes \mathcal{O}_U(i+m)$. L'inclusion j de (2.4) décrit cette section comme provenant d'une section $s^{(i)}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\deg(X^0) - 2 + i)$. Par ailleurs, au-dessus du point générique de chacun des X_j, avec $n_j = m_r$, on a $\omega_{Y_r} = \varrho_r^* \omega_X \otimes \mathcal{O}((m - n_j - 1) \cdot F_j^r)$, car le morphisme $\varrho_r : Y_r \to X$ est le premier éclatement du point générique de X_j (cf. [4, II, Ex. 8.5]. La section $s^{(i)}$ construite s'annule donc (3.3, a) à l'ordre $[t_j \cdot i \cdot d^{-1}] - (m - n_j - 1)$ le long de X_j^0. Pour qu'elle s'annule à l'ordre $t'_j \geqq 1$ le long de X_j^0, $j = 1, \dots, v$, il suffit que

$$[t_j \cdot i \cdot d^{-1}] - (m - n_j - 1) \geqq t'_j$$

soit

$$i \geqq \{(t'_j + m - n_j - 1) \cdot d \cdot t_j^{-1}\}$$

où pour tout réel b on pose $\{b\} = -[-b]$. Ceci prouve le théorème I sous l'hypothèse de (3.4).

En fait, on peut toujours supposer que celle-ci est vérifiée [de même d'ailleurs que celle de (2.3.2)]: Remplaçons $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ par $s^\eta \cdot s'$ tel que $s' \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ soit une section en position générale. Alors d est transformé en $\eta \cdot d + 1$, t_j en $\eta \cdot t_j$.

Pour η suffisamment grand, on a

$$[(t'_j + m - n_j - 1) \cdot d \cdot t_j^{-1}] + 1 = [(t'_j + m - n_j - 1) \cdot (\eta \cdot d + 1) \cdot (\eta \cdot t_j)^{-1}] + 1 .$$

$\mathcal{L}^{\eta\cdot d+1}$ admet une décomposition $\mathcal{L}^{\eta\cdot d+1}=\mathcal{O}_Y(D+\sum \nu_j\cdot E_j)$, où la partie réduite D est le diviseur associé à $\varrho^* s'$, ce qui donne (3.4) et donc le théorème I. [De plus, on a $\kappa(\mathcal{O}_Y(D))=m$.]

4. Amélioration du théorème I dans le cas où $X^0=\mathbb{P}^n$ et S est un ensemble de points

Remarque (4.1). Si $X^0=\mathbb{P}^n$, alors la proposition (2.4) est inutile et la démonstration du théorème I est sensiblement simplifiée. En particulier, si de plus S est un ensemble de points, le théorème I redonne le théorème de Bombieri-Skoda-Waldschmidt. Pour démontrer le théorème II, il nous faut donc gagner une unité par rapport au théorème I.

Soit β comme dans (1.2), c'est-à-dire que β est inférieur ou égal à la codimension des mauvaises singularités de $V(s)$ et vérifie $2\leqq\beta\leqq n$. On va essayer de construire, en coupant comme dans (3.4) par des sections hyperplanes, des sections non nulles de $\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{(i)}\otimes\mathcal{L}^{n-\beta+1}$. Afin de pouvoir appliquer (2.3.2), on utilise le subterfuge déjà mentionné en (3.6).

(4.2)

Posons $n'=t'+n-1$ et $i=[n'\cdot d\cdot t^{-1}]+1$. On a $i>n'\cdot d\cdot t^{-1}$, et donc $i\cdot t-n'\cdot d>0$. Il existe un entier η suffisamment grand, et un entier $r>0$ tels que $i=\dfrac{n'\cdot(\eta\cdot d+r)}{\eta\cdot t}<\eta\cdot d+r$. [Prendre par exemple $\eta=k\cdot n'$ pour un entier $k\geqq 2$ et $r=(i\cdot t-n'\cdot d)\cdot k$.]

Posons $\delta=\eta\cdot d+r$ et $\tau=\eta\cdot t$. Choisissons r sections $s_1,\ldots,s_r$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ en position générale. En particulier, les diviseurs associés aux s_j ne rencontrent pas les points de S. Posons $\sigma=s^\eta\cdot s_1\cdot\ldots\cdot s_r$. Alors σ est une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\delta)$ qui passe par les points de S avec la multiplicité au moins τ et dont la partie réduite n'est pas triviale.

On fait la construction (3.2) de Y pour cette section σ, ou pour l'ancienne section s, ce qui est la même chose. Ici, on n'a qu'un seul Y_1 pour $m_1=0$, et Y est simplement la désingularisation de $\varrho_1^* V(\sigma)$. La partie réduite de $V(\varrho^*\sigma)$ est le diviseur associé à $\varrho^*(s_1\cdot\ldots\cdot s_r)$ et donc de dimension de Kodaira n. Posons $V(\sigma)=\sum m_j\cdot D_j$, où les D_j sont irréductibles et réduits, de degrés d_j. En particulier $\delta=\sum m_j\cdot d_j$. De plus $V(\sigma)$ n'a de mauvaises singularités qu'en codimension β.

Lemme (4.3). *Si $q=n'\cdot\delta\cdot\tau^{-1}-\sum[m_j\cdot n'\cdot\tau^{-1}]\cdot d_j\geqq\beta$, alors $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n'\cdot\delta\cdot\tau^{-1}-\beta)$ a une section non nulle qui s'annule en tout p_j de S à l'ordre t'.*

(Rappelons que par construction $i=n'\cdot\delta\cdot\tau^{-1}$, et donc que q est entier.)

Preuve. Coupons $V(\sigma)$ avec un $\mathbb{P}^{\beta-1}$ générique. On obtient, d'après l'hypothèse faite sur β, un diviseur $D'=\sum m_j\cdot D'_j$, de $\mathbb{P}^{\beta-1}$, localement à croisements normaux, de degré δ et de composantes D'_j de degrés d_j. Appelons $Y^{\beta-1}$ l'image inverse par $\varrho: Y\to\mathbb{P}^n$ de ce $\mathbb{P}^{\beta-1}$. On a [5, 2.3]

$$\begin{aligned}\varrho_*(\omega_{Y^{\beta-1}}\otimes\mathcal{L}^{(i)})&=\omega_{\mathbb{P}^{\beta-1}}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\beta-1}}(i)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\beta-1}}(-\textstyle\sum[m_j\cdot i\cdot\delta^{-1}]\cdot D'_j)\\&=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\beta-1}}(-\beta+n'\cdot\delta\cdot\tau^{-1}-\textstyle\sum[m_j\cdot(n'\cdot\delta\cdot\tau^{-1})\cdot\delta^{-1}]\cdot d_j).\end{aligned}$$

Ce faisceau a donc une section non nulle. De la suite exacte

$$0\to\omega_{Y^\beta}\otimes\mathscr{L}^{(i)}\to\omega_{Y^\beta}\otimes\mathscr{L}^{(i)}\otimes\mathscr{L}\to\omega_{Y^{\beta-1}}\otimes\mathscr{L}^{(i)}\to 0$$

où Y^β est l'intersection de Y avec l'image inverse par ϱ d'un $\mathbb{P}^\beta$ générique, et du théorème d'annulation (2.3.2), on tire l'existence d'une section non nulle de $\omega_{Y^\beta}\otimes\mathscr{L}^{(i)}\otimes\mathscr{L}$. Puis en appliquant (2.3.1) à la suite exacte

$$0\to\omega_{Y^m}\otimes\mathscr{L}^{(i)}\otimes\mathscr{L}^{m-\beta}\to\omega_{Y^m}\otimes\mathscr{L}^{(i)}\otimes\mathscr{L}^{m-\beta+1}\to\omega_{Y^{m-1}}\otimes\mathscr{L}^{(i)}\otimes\mathscr{L}^{m-\beta}\to 0$$

où Y^m est l'image inverse d'un $\mathbb{P}^n$ en position générique, $m>\beta$, on trouve par récurrence une section non nulle dans

$$H^0(Y,\omega_Y\otimes\mathscr{L}^{(i)}\otimes\mathscr{L}^{n-\beta+1})\hookrightarrow H^0(\mathbb{P}^n,\omega_{\mathbb{P}^n}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i+n-\beta+1)),$$

dont nous savons comme en (3.6) qu'elle s'annule à l'ordre $-(n-1)+[\tau\cdot i\cdot\delta^{-1}]=-n+1+n'=t'$ en tout p_j de S.

Afin de finir la démonstration du théorème II, il nous reste à traiter le cas où l'on ne peut plus appliquer les théorèmes d'annulation. On raisonne alors directement et combinatoirement sur le diviseur $V(\sigma)$.

Lemme (4.4). *Si* $q=n'\cdot\delta\cdot\tau^{-1}-\sum[m_j\cdot n'\cdot\tau^{-1}]\cdot d_j\leqq\beta-1$, *alors* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n'\cdot\delta\cdot\tau^{-1}-\beta)$ *a une section non nulle qui s'annule en tout* p_j *de* S *à l'ordre* t'.

Preuve. Puisque il existe au moins un j pour lequel $m_j=1$, on a pour ce $j:[m_j\cdot n'\cdot\tau^{-1}]=[i\cdot\delta^{-1}]=0$, et donc $1\leqq q$. Appleons r_j^k la multiplicité du point p_k sur la composante D_j. Alors, pour tout p_k de S, on a $\tau\leqq\sum_j r_j^k\cdot m_j$.

Donc

$$n'\leqq\sum_j r_j^k\cdot m_j\cdot n'\cdot\tau^{-1}$$

et

$$n'-q\leqq\sum_j(r_j^k\cdot m_j\cdot n'\cdot\tau^{-1}-n'\cdot m_j\cdot d_j\cdot\tau^{-1}+[m_j\cdot n'\cdot\tau^{-1}]\cdot d_j).$$

Posons $\alpha_j=\tau\cdot(n'\cdot m_j\cdot\tau^{-1}-[n'\cdot m_j\cdot\tau^{-1}])$, $0\leqq\alpha_j<\tau$.

On obtient

$$n'-q\leqq\sum_j r_j^k\cdot[n'\cdot m_j\cdot\tau^{-1}]-\sum_j(d_j-r_j^k)\cdot\alpha_j\cdot\tau^{-1}.$$

Par définition on a $r_j^k\leqq d_j$, et par construction (4.2), il existe un j_0 pour lequel $m_{j_0}=1$ et D_{j_0} ne contient aucun point de S. Donc on a $r_{j_0}^k=0$ et $\alpha_{j_0}>0$, et donc $(d_{j_0}-r_{j_0}^k)\cdot\alpha_{j_0}\cdot\tau^{-1}>0$.

Ainsi on a l'inégalité stricte $n'-q<\sum_j r_j^k\cdot[n'\cdot m_j\cdot\tau^{-1}]$. Reformulons cette inégalité

$$t'+\beta-q\leqq t'+n-q=n'-q+1\leqq\sum_j r_j^k\cdot[n'\cdot m_j\cdot\tau^{-1}]\leqq\sum_j[n'\cdot m_j\cdot\tau^{-1}]\cdot d_j. \quad (1)$$

Posons $s'=\prod_j s_j^{[n'\cdot m_j\cdot\tau^{-1}]}$ où s_j définit le diviseur D_j. L'inégalité (1) étant vraie pour tout k, s' s'annule à l'ordre au moins $t'+\beta-q$ en chaque point p_k de S.

Différentions $\beta - q$ fois s' dans des directions génériques de telle sorte que les dérivées ne deviennent pas identiquement nulles. On obtient ainsi une section s_1 qui s'annule aux points p_j à l'ordre t' et qui est de degré

$$\sum_j [n' \cdot m_j \cdot \tau^{-1}] \cdot d_j - (\beta - q) = i - \beta .$$

Remarque (4.5). Le cas (4.4) est en fait le moins intéressant, puisque le degré du diviseur $V(\sigma)$ est très grand par rapport à ce qui serait nécessaire en exigeant la multiplicité t en les points de S. L'inégalité (1) dit en fait qu'on aurait pu différentier $n - q$ fois au lieu de $\beta - q$ fois. On aurait dans ce cas obtenu l'estimation de Chudnovsky (*) de l'introduction.

Remerciement. Michel Demazure nous a demandé si les méthodes développées dans [2] pouvaient être appliquées à la résolution de ce genre de question. Qu'il en soit ici chaleureusement remercié.

Bibliographie

1. Esnault, H.: Fibre de Milnor d'un cône sur une courbe plane. Invent. Math. **68**, 477–496 (1982)
2. Esnault, H., Viehweg, E.: Revêtements cycliques. Proc. Conf. Algebraic Threefolds, Varenna 1981, pp. 241–251. In: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 947. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1982
3. Grauert, H., Riemenschneider, O.: Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen. Invent. Math. **11**, 263–292 (1970)
4. Hartshorne, R.: Algebraic geometry. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977
5. Viehweg, E.: Vanishing theorems. J. reine angew. Math. **335**, 1–8 (1982)
6. Waldschmidt, M.: Nombres transcendants et groupes algébriques. Astérisque 69/70
7. Wüstholz, G.: On the degree of algebraic hypersurfaces with given singularities (manuscript)
8. Wüstholz, G.: Nullstellenabschätzungen auf Varietäten. Séminaire Delange-Poitou-Pisot, Octobre 1981

Reçu le 24 septembre 1982; revisé le 17 décembre 1982