

Fibre de Milnor d'un cône sur une courbe plane singulière.

by Esnault, Hélène

in: *Inventiones mathematicae*, (page(s) 477 - 496)

Berlin, Heidelberg [u.a.]; 1966, 1996

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept these Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Fibre de Milnor d'un cône sur une courbe plane singulière

Hélène Esnault

Université de Paris VII, U.E.R. de Mathématiques,
Tour 45-55-5-ième étage, 2, place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France

Soient $f \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} , non nécessairement à singularités isolées et $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / f(x, y, z) = 1\}$ la fibre de Milnor associée. Nous voulons déterminer, *par des méthodes purement algébriques*, les invariants topologiques suivants: *nombre de Betti*, *rang* et *signature* de la matrice intersection. Nous utilisons pour ces deux derniers invariants l'existence d'une *structure de Hodge mixte* sur $H^k(X, \mathbb{C})$ dont nous évaluons tous les $H^{p,q}$ sur les gradués par le poids (§ 4), pour en tirer rang et signature. Nous utilisons aussi l'existence d'une suite spectrale dont le but est constitué par les groupes de cohomologie $H^k(X, \mathbb{C})$, afin d'évaluer les nombres de Betti $b_k(X)$. En fait, tous les invariants cités dépendent, outre de $b_1(X)$, d'invariants locaux, du degré et du nombre de composantes de Γ (§ 2 théorème 6 et § 4 théorème 14), courbe plane d'équation f . Pour ce qui est des nombres de Betti, il apparaît une *forme* particulièrement *simple reliant* $b_2(X)$ à $b_1(X)$, ne dépendent que du degré et des nombres de Milnor de Γ (§ 2 théorème 6.A). Il est bien connu que $b_1(X)$ ne dépend pas seulement des singularités locales de Γ mais aussi de leur position sur celle-ci. Nous donnons un critère «numérique» (§ 3 lemme 10) et plus généralement un critère associé à la dimension de Kodaira de certains faisceaux inversibles attachés à la désingularisation plongée de Γ (§ 3 théorème 8) pour que $b_1(X)$ ne dépende que du nombre de composantes de Γ . En d'autres termes, sous les hypothèses de ces critères, $b_1(X)$ ne «saute» pas. D'autre part, et à l'inverse, ceci devrait fournir une classe d'exemples «à la Zariski», pour lesquels $b_1(X)$, et donc $\pi_1(\mathbb{P}^2 - \Gamma)$ soit «instable». Nous calculons quelques exemples (§ 3).

Enfin, ces méthodes algébriques décrivent une compactification lisse de X , à homotopie près, lorsque la courbe est semi-stable (§ 5 résultat 16), résultat connu et obtenu par d'autres techniques.

§ 1. Une construction de base

Soit $\bar{X} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{P}^3 / t^N = f(x, y, z)\}$ la complétée projective de X dans \mathbb{P}^3 . C'est une surface normale. Choisissons une désingularisée Z de \bar{X} dont le bord

$\Delta = Z - X$ soit un diviseur à croisements normaux, c'est-à-dire dont les composantes soient lisses et se coupent transversalement. Notons $\Omega_Z^p(\log \Delta)$ le faisceau localement libre des p -formes différentielles à pôles logarithmiques le long de Δ , et $W_n \Omega_Z^p(\log \Delta)$ le n -ième terme de la W -graduation défini comme les p -formes ayant au plus n pôles le long de Δ . On veut appliquer les théorèmes I et II de P. Deligne, le premier permettant de calculer les nombres de Betti de X , le deuxième précisant la structure de Hodge mixte sur les $H^k(X, \mathbb{C})$ [3 p 35 et 38].

Théorème I. *Il existe une suite spectrale de terme $E_1^{p,q} = H^q(Z, \Omega_Z^p(\log \Delta))$ qui converge vers $H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ et dégénère en E_1 .*

Théorème II. *Il existe une suite spectrale de terme $E_1^{-n,k+n} = H^k(Z, \text{Gr}_n^W \Omega_Z^p(\log \Delta))$ qui converge vers $H^k(Z, \Omega_Z^p(\log \Delta))$ et dégénère en E_2 .*

La suite de ce paragraphe est consacrée à une construction géométrique permettant « d'identifier » les $H^q(Z, \Omega_Z^p(\log \Delta))$.

On suppose dans toute la suite que la courbe plane Γ d'équation $f=0$ dans \mathbb{P}^2 est *réduite*. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \bar{X} \\ \bar{\tau}_X \downarrow & & \downarrow \bar{\tau} \\ \mathbb{P}^2 - \Gamma & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

qui réalise, par projection sur \mathbb{P}^2 , X comme revêtement étale, cyclique de degré N de $\mathbb{P}^2 - \Gamma$ et \bar{X} comme revêtement ramifié le long de Γ de \mathbb{P}^2 , dont les singularités sont situées au-dessus des singularités de Γ . On a $\bar{X} = \text{Spec}_{\mathbb{P}^2} \left(\bigoplus_0^{N-1} \mathcal{O}(-i) \right)$, où la structure de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ -algèbre du faisceau $\bigoplus_0^{N-1} \mathcal{O}(-i)$ est donnée par l'inclusion $\mathcal{O}(-N) \hookrightarrow \mathcal{O}$ associée à Γ . On a $\bar{\tau}_* \mathcal{O}_{\bar{X}} = \bigoplus_0^{N-1} \mathcal{O}(-i)$.

Prenons $\sigma: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ la désingularisation plongée de Γ . On a $\sigma^* \Gamma = D = C + \sum v_j E_j$, où le diviseur D est à croisements normaux et où les multiplicités v_j sont au moins 2. Notons $\tau': Y' \rightarrow Y$ l'image inverse par σ de $\bar{\tau}$, \bar{Y} la normalisée de Y' et Z une désingularisée de \bar{Y} dont le bord $\Delta = Z - X$ soit un diviseur à croisements normaux. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ d \swarrow & & \searrow d \\ \bar{Y} & \longrightarrow & \bar{X} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \bar{\tau} \\ Y & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

où les morphismes sont les morphismes évidents. Posons $f = \tau d$, $\bar{f} = \bar{\tau} \bar{d}$, et \mathcal{L} le faisceau inversible défini par $\mathcal{L} = \sigma^* \mathcal{O}(1)$. On a $Y' = \text{Spec}_Y \left(\bigoplus_0^{N-1} \mathcal{L}^{-i} \right)$, où la

structure de \mathcal{O}_Y -algèbre du faisceau $\bigoplus_0^{N-1} \mathcal{L}^{-i}$ est donnée par l'inclusion $\mathcal{L}^{-N} \hookrightarrow \mathcal{O}$ associée à D .

Les lemmes 1 et 2 sont vrais en toutes dimensions. Comme ils ont de jolies applications (voir remarque 9) nous les démontrons dans leur généralité, bien que nous ne nous servions ici que du cas des surfaces.

Soient donc Y une variété projective, lisse sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} et \mathcal{L} un faisceau inversible dont une puissance positive \mathcal{L}^N admet une section non nulle dont le diviseur associé D est un diviseur à croisements normaux. Notons $D = C + \sum v_j E_j$ sa décomposition en composantes irréductibles de multiplicité 1 et v_j .

Pour tout nombre réel x , désignons par $[x]$ sa partie entière définie par $x - 1 < [x] \leq x$. Introduisons les faisceaux inversibles

$$\mathcal{L}^{(i)} = \mathcal{L}^i \otimes \mathcal{O}(-\sum_j [v_j i/N] E_j).$$

On met sur le faisceau de \mathcal{O}_Y -modules $\bigoplus_0^{N-1} \mathcal{L}^{-i}$ une structure de \mathcal{O}_Y -algèbre donnée par l'inclusion $\mathcal{L}^{-N} \hookrightarrow \mathcal{O}_Y$ définie par D . Posons $Y' = \text{Spec}_{\mathcal{O}_Y} \left(\bigoplus_0^{N-1} \mathcal{L}^{-i} \right)$; notons $\tau': Y' \rightarrow Y$ le morphisme associé, $n: \bar{Y} \rightarrow Y'$ la normalisée de Y' et τ la composée des morphismes n et τ' .

Lemme 1. *La variété \bar{Y} n'a que des singularités rationnelles et le morphisme τ est plat.*

La démonstration est donnée dans [14]. En fait, la démonstration du lemme 2 permet aussi de démontrer le lemme 1.

Lemme 2. *Avec les notations précédentes, on a $\tau_* \mathcal{O}_{\bar{Y}} = \bigoplus_0^{N-1} \mathcal{L}^{(i)-1}$.*

Démonstration. Le faisceau $\tau_* \mathcal{O}_{\bar{Y}}$ est localement libre et contient $\tau'_* \mathcal{O}_{Y'} = \bigoplus_0^{N-1} \mathcal{L}^{-i}$. Le revêtement $\tau': Y' \rightarrow Y$ étant galoisien, cyclique, de degré N , le revêtement $\tau: \bar{Y} \rightarrow Y$ a les mêmes propriétés. Une racine primitive N -ième de l'unité e définit un morphisme semi-simple sur $\tau_* \mathcal{O}_{\bar{Y}}$ compatible à l'inclusion $\tau'_* \mathcal{O}_{Y'} \hookrightarrow \tau_* \mathcal{O}_{\bar{Y}}$. Appelons F_i le sous-espace propre de $\tau_* \mathcal{O}_{\bar{Y}}$ associé à la valeur e^i , de telle sorte que F_i contienne \mathcal{L}^{-i} . On a $\tau_* \mathcal{O}_{\bar{Y}} = \bigoplus_0^{N-1} F_i$, donc les F_i sont des faisceaux localement libres, et comme le rang de $\tau_* \mathcal{O}_{\bar{Y}}$ est N , ils sont inversibles. Par ailleurs, les faisceaux F_i et \mathcal{L}^{-i} coïncident en dehors du diviseur D et sur $C - \bigcup E_j$. On a donc $F_i = \mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{O}(\sum l_{ij} E_j)$ pour des entiers positifs l_{ij} . Il suffit alors de calculer les l_{ij} , ce que l'on peut faire en codimension 1.

Prenons donc un ouvert affine U dans Y qui ne coupe le diviseur $D_{\text{réd}} = C + \sum E_j$ qu'en ses points lisses situés sur E_1 . Notons $\mathcal{O}_Y(U)$ l'anneau affine associé. L'équation de D dans U s'écrit $x^{v_1} \cdot u$ pour un paramètre régulier x et une unité u de $\mathcal{O}_Y(U)$. On a les inclusions d'anneaux

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(U)[t]/\langle t^N - x^{v_1} \cdot u \rangle &= \mathcal{O}_Y(\tau^{-1}(U)) \\ \downarrow & \\ \mathcal{O}_Y(U)[X, \beta]/\langle X^N - x, \beta^N - u \rangle &= R. \end{aligned}$$

L'anneau R est régulier, donc normal, et est une extension galoisienne cyclique de groupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ de $\mathcal{O}_Y(U)$.

L'anneau $\mathcal{O}_Y(\tau^{-1}(U))$ est une extension cyclique de $\mathcal{O}_Y(U)$, de groupe H isomorphe à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, noyau de

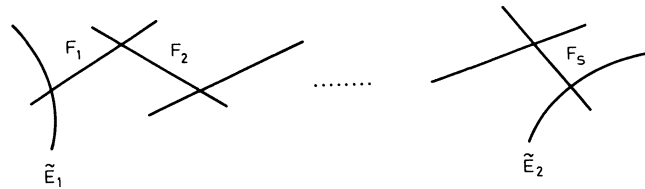
$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}(\alpha, \gamma) \rightarrow \alpha v_1 + \gamma.$$

Donc la normalisée $\mathcal{O}_{\bar{Y}}(\tau^{-1}(U))$ de $\mathcal{O}_Y(\tau^{-1}(U))$ est définie par $\mathcal{O}_{\bar{Y}}(\tau^{-1}(U)) = R^H$, anneau des invariants sous l'action de H . Les générateurs sur $\mathcal{O}_Y(U)$ sont donc les monômes $X^a \beta^b$ tels que a et b vérifient $0 \leq a < N$, $0 \leq b < N$, $\alpha a + \gamma b = 0 \pmod N$ pour tous α et γ tels que $\alpha v_1 + \gamma = 0 \pmod N$, soit encore $0 \leq a = b v_1 + kN < N$ et $0 \leq b < N$. Donc $k = -[v_1 b/N]$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\bar{Y}}(\tau^{-1}(U)) &= \mathcal{O}_Y(U)[X^{v_1 b - [v_1 b/N]N} \beta^b / 0 \leq b < N] \\ &= \mathcal{O}_Y(U)[x^{-[v_1 b/N]} t^b / 0 \leq b < N]. \end{aligned}$$

Revenons à notre situation antérieure; choisissons un ouvert affine U dans Y ne rencontrant $D_{\text{réd}} = C + \sum E_j$ qu'en un seul de ses points singuliers, disons en $E_1 \cap E_2$.

Lemme 3. *On peut choisir une désingularisée Z de telle sorte que le dessin associé à $f^{-1}(U \cap D_{\text{réd}})$ ait la forme*



où $\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2$ est le transformé strict de $E_1 + E_2$ et où les F_i sont des courbes rationnelles. Autrement dit, chaque composante exceptionnelle F_i rencontre la réunion de toutes les autres composantes en exactement deux points.

Démonstration. La question étant de nature analytique locale dans la base Y , on peut supposer que l'équation de $U \cap D$ dans U est $x^{v_1} \cdot y^{v_2}$. On sait alors (voir la démonstration du lemme 2) que l'anneau dans \bar{Y} du voisinage correspondant à U est l'anneau des invariants de $\mathbb{C}[[u, v]]$, sous l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, où u et v sont les racines N -ièmes de x et y . Prenons un générateur e de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. L'action de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ s'écrit $u \rightarrow e^a u$ et $v \rightarrow e^b v$, pour a et b dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On peut supposer que a et N d'une part, b et N d'autre part sont premiers entre eux, car on a les inclusions des anneaux des invariants suivantes

$$\mathbb{C}[[u, v]]^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathbb{C}[[u, v]]^{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathbb{C}[[u, v]]$$

– ce qui ramène à faire le raisonnement qui suit en deux étapes-lorsque d est un dénominateur commun. Par ailleurs, quitte à changer le générateur e en e^a , on

peut supposer que l'action s'écrit $u \rightarrow eu$ et $v \rightarrow e^b v$, où b est premier à N . C'est-à-dire qu'on peut supposer que l'équation locale de Y' est $t^N = xy^p$, où p est strictement plus petit que et premier à N . Prenons alors la désingularisation de Hirzebruch, explicitée par J. Lipman [8]. En calculant sur les formules précitées, on trouve que l'image inverse du diviseur réduit E_1 s'écrit $N\hat{E}_1 + a_1F_1 + \dots + a_sF_s$, avec les formules de récurrence

$$a_1 = N - p \quad \text{et si} \quad N/N - p = b_1 - 1/(b_2 - 1/(b_3 - \dots 1/b_s) \dots) \\ = b_1 - 1/(b_2 - \dots 1/(b_{i-1} - 1/c_i) \dots),$$

où $b_i \geq 2$, alors $c_i a_i = a_{i-1}$. De même, l'image inverse du diviseur réduit E_2 s'écrit $N\hat{E}_2 + d_1F_1 + \dots + d_sF_s$, avec les formules de récurrence $d_0 = 0$, $d_1 = 1$ et $d_{i+1} = b_i d_i - d_{i-1}$. Il suffit alors d'appliquer la formule de projection au morphisme f , sachant que la matrice intersection des F_i vérifie $F_i^2 = -b_i$ et $F_i F_j = 0$ si $|j - i| > 1$ et 1 sinon, pour $j \neq i$.

Corollaire 4. *Pour la désingularisation Z du lemme 3, on a*

$$f^* \Omega_Y^p(\log D) = \Omega_Z^p(\log \Delta) \\ f_* \Omega_Z^p(\log \Delta) = \Omega_Y^p(\log D) \otimes f_* \mathcal{O}_Z \\ R^i f_* \Omega_Z^p(\log \Delta) = 0 \quad \text{pour } i > 0$$

Démonstration. Pour tout morphisme $f: Z \rightarrow Y$ tel que l'image inverse d'un diviseur à croisements normaux D soit un diviseur à croisements normaux Δ , on a l'inclusion $f^* \Omega_Y^p(\log D) \hookrightarrow \Omega_Z^p(\log \Delta)$. Il suffit de le vérifier pour $p = 1$. Sur un ouvert affine U de Y dans lequel le diviseur D a pour équation $x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} \cdot u$ pour des paramètres réguliers x_i et une unité u de $\mathcal{O}_Y(U)$, le faisceau localement libre $\Omega_Y^1(\log D)$ est engendré sur $\mathcal{O}_Y(U)$ par

$$\{dx_1/x_1, \dots, dx_r/x_r, dx_{r+1}, \dots, dx_n\},$$

donc $f^* \Omega_Y^1(\log D)$ est engendré sur $\mathcal{O}_Z(f^{-1}(U))$ par

$$\{f^* dx_1/x_1, \dots, f^* dx_r/x_r, f^* dx_{r+1}, \dots, f^* dx_n\}.$$

Sur un ouvert V contenu dans $f^{-1}(U)$, on peut écrire $f^* x_i = \prod z_{ij}^{b_j} \cdot u_i$ pour $1 \leq i \leq r$, pour des paramètres réguliers z_{ij} et une unité u_i de $\mathcal{O}_Z(V)$. Donc

$$f^* dx_i/x_i = \sum b_j dz_{ij}/z_{ij} + u_i^{-1} du_i,$$

qui est un élément de $\Omega_Z^1(\log \Delta)$. Ceci montre de plus que, dans notre cas, cette inclusion est un isomorphisme en dehors des composantes exceptionnelles F_j de f .

Supposons maintenant que la désingularisation du lemme 3 fournisse une suite exacte

$$0 \rightarrow f^* \Omega_Y^p(\log D) \rightarrow \Omega_Z^p(\log \Delta) \rightarrow K_p \rightarrow 0$$

avec un conoyau K_1 non nul. Dans ce cas, le conoyau K_2 est aussi non nul et l'on a

$$\Omega_{\mathbb{Z}}^2(\log \Delta) = f^* \Omega_{\mathbb{Y}}^2(\log D) \otimes \mathcal{O}(\sum l_i F_i)$$

pour des entiers positifs l_i . Mais par ailleurs, en notant $\Delta_{\text{réd}} = F_i + F$, où F est la réunion de toutes les composantes de $\Delta_{\text{réd}}$ autres que F_i , et K' le diviseur canonique de \mathbb{Z} , on a degré

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbb{Z}}^2(\log \Delta) \otimes \mathcal{O}_{F_i} &= F_i \cdot (K' + F_i + F) \\ &= -2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Donc les l_i vérifient $F_j \cdot (\sum l_i F_i) = 0$ pour tout j . Comme la matrice intersection des F_i est définie négative [12], cela implique que les l_i sont nuls. Ceci prouve la première égalité. Les deux autres sont une conséquence du lemme 1.

Corollaire 5. *On a*

$$\dim H^k(\mathbf{X}, \mathbb{C}) = \dim \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ 0 \leq i < N}} H^q(\mathbb{Y}, \Omega_{\mathbb{Y}}^p(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i)^{-1}})$$

§2. Le deuxième nombre de Betti de X

Désignons par μ_p le nombre de Milnor de la courbe Γ au point p .

Théorème 6. A) *Le deuxième nombre de Betti de \mathbf{X} est $b_2(\mathbf{X}) = (N-1)^3 - N \sum \mu_p + b_1(\mathbf{X})$*

B) *On a de plus*

1. $h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}) = h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}) + (N-1)(N-2)(N-3)/6 + \frac{1}{2} \sum_1^{N-1} (\sum [v_j i/N] E_j)(\sum ([v_j i/N] - a_j) E_j)$
2. $h^1(\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\log \Delta)) = h^0(\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\log \Delta)) + N(N-1)(4N-5)/6 - N \sum \delta_p + \sum_1^{N-1} (\sum [v_j i/N] E_j)(\sum (v_j - 1 - [v_j i/N]) E_j)$
3. $h^0(\Omega_{\mathbb{Z}}^2(\log \Delta)) = N(N-1)(N-2)/6 + \frac{1}{2} \sum_0^{N-1} (\sum (v_j - 1 - a_j - [v_j i/N]) E_j)(\sum (v_j - 1 - [v_j i/N]) E_j)$
4. $h^1(\Omega_{\mathbb{Z}}^1) - \dim \text{Im}(H^0(n_* \mathcal{O}_{\Delta'}) \rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{Z}}^1)) = b_1(\mathbf{X}) - (N-1) \sum \delta_p - (r-1) + (N-1)(4N^2 - 8N + 9)/6 + \sum_1^N (\sum ([v_j i/N] E_j)(\sum (v_j - 1 - [v_j i/N]) E_j) - \dim \Sigma H^1(\mathcal{O}_{\Delta_{jk}}))$
5. $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}) = (r-1) + (N-1)(N-2)/2 - \sum \delta_p$

avec les notations suivantes (voir pour plus de plus de précisions la démonstration):

$K = -3H + \sum a_j E_j$ est le diviseur canonique,

δ_p est le conducteur de Γ en un point p ,

$n: \Delta' \rightarrow \Delta_{\text{réd}}$ est la normalisée de $\Delta_{\text{réd}}$,

$\Sigma \Delta_{jk}$ sont les composantes de Δ' qui sont au-dessus de E_j et ne font pas partie des composantes exceptionnelles de $d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$.

Démonstration. En premier lieu, on a $\sigma_* \mathcal{L}^{(i-1)} = \mathcal{O}(-i)$. Il suffit de montrer, d'après la formule de projection, que $\sigma_* \mathcal{O}(\sum k_j E_j) = \mathcal{O}$ pour des entiers positifs k_j quelconques, puis, par récurrence, que pour tout éclatement d'un point dans une surface lisse $\sigma: Y \rightarrow Y'$, de diviseur exceptionnel E , on a $\sigma_* \mathcal{O}(kE) = \mathcal{O}$ pour tout entier positif k .

Mais ceci est une conséquence directe de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}((l-1)E) \rightarrow \mathcal{O}(lE) \rightarrow \mathcal{O}_E(-l) \rightarrow 0$$

à laquelle on applique σ_* .

On applique ensuite le théorème de Riemann-Roch aux faisceaux localement libres $\Omega_Y^p(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}$, en remarquant que $H^q(Y, \Omega_Y^p(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)})$ est nul si $p+q > 2$, en tant que contribution au $(p+q)$ -ième nombre de Betti d'une surface affine.

Notons H un diviseur associé à $\mathcal{L} = \sigma^* \mathcal{O}(1)$ vérifiant $H \cdot H = 1$, $H \cdot E_j = 0$ et K le diviseur canonique de Y . On a $K = -3H + \sum a_j E_j$ pour des entiers positifs a_j soumis à la formule du genre $(\sum a_j E_j) \cdot E_k = -2 - E_k \cdot E_k$.

Pour i nul, on a

$$h^2(\mathcal{O}) = h^1(\mathcal{O}) = 0.$$

Pour i positif, on a

$$h^2(\mathcal{L}^{(i-1)}) = \frac{1}{2}[i(i-3) + (\sum [v_j i/N] E_j)(\sum ([v_j i/N] - a_j) E_j)] + h^1(\mathcal{L}^{(i-1)}) + 1.$$

Pour tout faisceau localement libre \mathcal{M} , notons $c_i(\mathcal{M})$ sa i -ième classe de Chern et $X(\mathcal{M}) = \sum (-1)^i h^i(\mathcal{M})$ sa caractéristique d'Euler-Poincaré. On a

$$\begin{aligned} X(\Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) &= 2X(\mathcal{O}) - \frac{1}{2}K \cdot c_1(\Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) \\ &\quad + \frac{1}{2}c_1^2(\Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) - c_2(\Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) \end{aligned}$$

avec

$$c_1(\Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) = c_1(\Omega_Y^1(\log D)) + 2c_1(\mathcal{L}^{(i-1)})$$

et

$$\begin{aligned} c_2(\Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) &= c_1^2(\mathcal{L}^{(i-1)}) \\ &\quad + c_1(\Omega_Y^1(\log D)) \cdot c_1(\mathcal{L}^{(i-1)}) + c_2(\Omega_Y^1(\log D)). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} X(\Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) &= X(\Omega_Y^1(\log D)) - K \cdot c_1(\mathcal{L}^{(i-1)}) \\ &\quad + c_1^2(\mathcal{L}^{(i-1)}) + c_1(\Omega_Y^1(\log D)) \cdot c_1(\mathcal{L}^{(i-1)}). \end{aligned}$$

De la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_{D'}^1 \rightarrow \Omega_Y^1(\log D) \rightarrow n_* \mathcal{O}_{D'} \rightarrow 0,$$

où $n: D' \rightarrow D_{\text{réd}}$ est la normalisation du diviseur réduit $D_{\text{réd}}$, on tire

$$h^0(\Omega_Y^1(\log D)) = r + \# E_j - \beta$$

où β est la dimension de l'image de $H^0(\mathcal{O}_{D'})$ dans $H^1(\Omega_Y^1)$, où encore le nombre de composantes à support dans D qui sont algébriquement indépendantes, soit

1 comme contribution de C et $\#E_j$ comme contribution des composantes exceptionnelles. Donc $\beta = 1 + \#E_j$ et

$$h^0(\Omega_{\check{V}}^1(\log D)) = r - 1, \quad h^1(\Omega_{\check{V}}^1(\log D)) = h^1(\mathcal{O}_{D'}) = h^1(\mathcal{O}_C).$$

Notons C_i les composantes irréductibles de C . La formule du genre donne $2h^1(\mathcal{O}_C) - 2 = C_i \cdot C_i + C_i \cdot K$. Donc (6.B.5)

$$\begin{aligned} 2h^1(\mathcal{O}_C) - 2r &= C \cdot C + C \cdot K \\ &= (NH - \sum v_j E_j)((N-3)H - \sum (v_j - a_j) E_j) \\ &= N(N-3) + (\sum v_j E_j)(\sum (v_j - a_j) E_j) \\ &= N(N-3) - 2\sum \delta_p \end{aligned}$$

où δ_p est le conducteur de Γ au point p défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_\Gamma \rightarrow \sigma_* \mathcal{O}_C \rightarrow \Sigma \mathbb{C}^{\delta_p} \rightarrow 0.$$

On a $c_1(\Omega_{\check{V}}^1(\log D)) = c_1(\Omega_{\check{V}}^2(\log D)) = K + D_{\text{réd}}$ ce qui donne

$$\begin{aligned} h^1(\Omega_{\check{V}}^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) &= h^0(\Omega_{\check{V}}^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) + N(N-3)/2 - \sum \delta_p \\ &\quad + r - (r-1) + i(N-i) + (\sum [v_j i/N] E_j)(\sum (v_j - 1 - [v_j i/N]) E_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(\Omega_{\check{V}}^2(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) &= h^0(\Omega_{\check{V}}^2(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) \\ &= (N-3-i)(N-i)/2 + 1 + \frac{1}{2} \sum (v_j - 1 - a_j - [v_j i/N]) E_j \sum (v_j - 1 - [v_j i/N]) E_j. \end{aligned}$$

On en tire le théorème (6.B.1.2.3) en sommant sur i . La 4-ième égalité provient de la suite exacte $0 \rightarrow \Omega_{\check{Z}}^1 \rightarrow \Omega_{\check{Z}}^1(\log \Delta) \rightarrow n_* \mathcal{O}_{\Delta'} \rightarrow 0$, où $n: \Delta' \rightarrow \Delta_{\text{réd}}$ est la normalisation du diviseur $\Delta_{\text{réd}}$. Puis en sommant (6.B.1.2.3) on trouve

$$b_2(\mathbf{X}) = b_1(\mathbf{X}) + (N-1)^3 + \frac{N}{2} (\sum (v_j - a_j - 1) E_j)(\sum (v_j - 1) E_j) - N \sum \delta_p.$$

Appelons A l'expression $A = \frac{1}{2} (\sum (v_j - a_j - 1) E_j)(\sum (v_j - 1) E_j)$ et A_p la même somme restreinte aux E_j qui sont au-dessus du point p de la courbe Γ . On a $A = \sum A_p$. Par ailleurs, d'après la formule de N . A'Campo [1], le nombre de Milnor μ_p de Γ au point p se calcule par

$$\mu_p = 1 + \sum X(E_j - E_j \cap (C \cup \bigcup_{k \neq j} E_k)),$$

où $X(\mathbf{Z})$ est la caractéristique d'Euler de la variété \mathbf{Z} . On a

$$\begin{aligned} \#(E_j \cap (C \cup \bigcup_{k \neq j} E_k)) &= E_j \cdot C + \sum_{k \neq j} E_j \cdot E_k, \\ X(E_j - E_j \cap (C \cup \bigcup_{k \neq j} E_k)) &= 2 - E_j \cdot C - \sum_{k \neq j} E_j \cdot E_k \end{aligned}$$

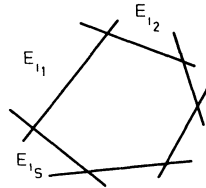
et $C \cdot \sum v_j E_j = -(\sum v_j E_j)^2$. Donc

$$\mu_p = 1 - (\sum v_j E_j)^2 - 2 \sum_j v_j + \sum_{j < k} (v_j + v_k) E_j \cdot E_k.$$

On obtient

$$A_p - \delta_p + \mu_p = 1 - \sum_j 1 + \sum_{j < k} E_j \cdot E_k.$$

Cette dernière expression est nulle. En effet, $\sum_{j < k} E_j \cdot E_k$ est le nombre de points d'intersection des composantes E_j entre elles. Il suffit donc de montrer que le diagramme des E_j est connexe et qu'il ne comporte pas de circuits fermés de dessin



puisqu'il forme une configuration à croisements normaux. On procède par récurrence sur les deux premières hypothèses en remarquant que l'on éclate successivement des points situés sur au moins une des composantes des précédents éclatements.

§ 3. Le premier nombre de Betti de X

Lemme 7. *On a*

$$\dim \bigoplus_1^{N-1} H^1(Y, \mathcal{L}^{(i-1)}) = \dim \bigoplus_1^{N-1} H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)})$$

et $b_1(X) = (r-1) + 2 \sum_1^{N-1} \dim H^1(Y, \mathcal{L}^{(i-1)}).$

Démonstration. La deuxième égalité est conséquence de la première et de l'égalité $h^0(\Omega_Y^1(\log D)) = r-1$, démontrée au théorème 6.

De la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_Z^1 \rightarrow \Omega_Z^1(\log \Delta) \rightarrow n_* \mathcal{O}_{\Delta'} \rightarrow 0,$$

où $n: \Delta' \rightarrow \Delta_{\text{réd}}$ est la normalisation du diviseur réduit $\Delta_{\text{réd}}$, on tire comme précédemment que

$$h^0(\Omega_Z^1(\log \Delta)) = h^0(\Omega_Z^1) + \beta,$$

où β est le nombre de composantes à support dans Δ qui sont algébriquement dépendantes. Ce qui donne, en utilisant la symétrie des nombres de Hodge pour $H^1(Z, \mathbb{C})$

$$\dim \bigoplus_1^{N-1} H^1(Y, \mathcal{L}^{(i-1)}) = \dim \bigoplus_1^{N-1} H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) + (r-1) - \beta.$$

Considérons le morphisme $\bar{d}: Z \rightarrow \bar{X}$. Au-dessus de chaque point singulier de la surface normale \bar{X} , la matrice intersection des composantes exceptionnelles G_j

est définie négative [12]. Tout diviseur à support dans Δ est linéairement équivalent à $a\bar{f}^*H + \sum b_j G_j$ pour un diviseur ample H ne passant pas par les points singuliers de Γ et des entiers a et b_j . S'il est algébriquement nul, il vérifie en particulier

$$(a\bar{f}^*H + \sum b_j G_j) \cdot \bar{f}^*H = a\bar{f}^*H \cdot \bar{f}^*H = 0,$$

donc $a=0$, et $(\sum b_j G_j) \cdot G = 0$ pour tout diviseur G à support dans ΣG_j ; donc $b_j = 0$. Par suite, $\{\bar{f}^*H, G_j\}$ représentent une base des diviseurs algébriquement indépendants à support dans Δ et $(r-1) = \beta$.

En général, on ne sait guère plus sur l'évaluation des groupes de cohomologie $H^1(Y, \mathcal{L}^{(i-1)})$, car ils ne dépendent pas uniquement des singularités locales de Γ . C'est pourquoi nous donnons par la suite des critères d'annulation.

Théorème 8. *Si la dimension de Kodaira des faisceaux $\mathcal{L}^{(i)}$ vérifie $\kappa(\mathcal{L}^{(i)}) = 2$ pour $0 < i < N$, alors $H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) = 0$ pour $0 < i < N$ et donc $b_1(X) = r - 1$.*

Remarque 9. Reprenons la situation générale des lemmes 1 et 2. Le théorème 8 s'exprime alors de la façon suivante: si $\kappa(\mathcal{L}^{(i)}) = m$, alors $H^0(Y, \Omega_Y^p(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) = 0$, $H^p(Y, \mathcal{L}^{(i-1)}) = 0$ pour $p < m$. On en tire une forme généralisée des théorèmes d'annulation de Grauert-Riemenschneider et des théorèmes numériques d'annulation. Voir pour ceci Eckart Viehweg [15] et pour une démonstration indépendante des théorèmes numériques d'annulation, voir Yujiro Kawamata [7].

Démonstration du théorème 8. L'idée essentielle de la démonstration se trouve dans l'article de Fedja Bogomolov [2]. Comme elle est particulièrement simple dans le cas d'une surface, que ce soit notre surface particulière Y ou une autre, nous la reproduisons ici pour l'agrément du lecteur.

Si $\kappa(\mathcal{L}^{(i)}) = 2$, une puissance positive $\mathcal{L}^{(i)m}$ de $\mathcal{L}^{(i)}$ admet 3 sections $\{s_0, s_1, s_2\}$ globales dont les quotients $\{s_1/s_0, s_2/s_0\}$ sont algébriquement indépendants sur un ouvert. Il existe une surface projective lisse Y_1 , et un morphisme $g: Y_1 \rightarrow Y$ génériquement fini, obtenus en «extrayant» la racine m -ième de s_0 , c'est-à-dire encore une fois en prenant $\text{Spec}_Y \left(\bigoplus_0^{m-1} \mathcal{L}^{(i-k)} \right)$ avec la structure d'algèbre donnée par la section s_0 , puis en désingularisant, et en recommançant de même pour s_1 et s_2 , qui vérifient:

- a) Le faisceau inversible $g^*\mathcal{L}^{(i)}$ a pour dimension de Kodaira 2 et admet 3 sections $\{t_0, t_1, t_2\}$ dont les quotients $\{t_1/t_0, t_2/t_0\}$ sont algébriquement indépendants sur un ouvert.
- b) Le diviseur $g^*D = D_1$ est à croisements normaux.
- c) Il existe les inclusions

$$\begin{aligned} g^*\Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)} &\hookrightarrow \Omega_{Y_1}^1(\log D_1) \otimes g^*\mathcal{L}^{(i-1)} \\ H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}) &\hookrightarrow H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)} \otimes g_*\mathcal{O}_{Y_1}) \\ &\downarrow \\ &H^0(Y_1, \Omega_{Y_1}^1(\log D_1) \otimes g^*\mathcal{L}^{(i-1)}). \end{aligned}$$

Donc, pour démontrer la nullité de $H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)})$ sous les hypothèses du théorème 8, on peut supposer que les sections s_i sont dans $\mathcal{L}^{(i)}$ lui-même.

Supposons maintenant que $\Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)}$ ait une section non nulle. Celle-ci fournit alors les inclusions

$$\mathcal{L}^{(i)} \hookrightarrow \Omega_Y^1(\log D) \quad \text{et} \quad H^0(Y, \mathcal{L}^{(i)}) \hookrightarrow H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D)).$$

D'après le théorème I de P. Deligne, dans le cas particulier où $q=0$, la différentielle des formes logarithmiques globales est nulle. Donc $ds_i=0$. En d'autres termes les fonctions rationnelles s_i/s_0 vérifient $d(s_i/s_0) \wedge s_0=0$ sur un ouvert, donc sur Y . Sur un ouvert U , le faisceau $E = \mathcal{O}_Y(U) d(s_1/s_0) + \mathcal{O}_Y(U) d(s_2/s_0)$ annule donc le sousfaisceau $\mathcal{L}^{(i)}$ de $\Omega_Y^1(\log D)$, ce qui est impossible.

Lemme 10. *Si tous les v_j sont premiers à N , alors $H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)})=0$ pour $0 < i < N$ et donc $b_1(X)=r-1$.*

Démonstration. Le lemme 10 est un cas particulier du théorème 8. Supposons en effet que tous les v_j soient premiers à N . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(i)N} &= \mathcal{L}^{iN} \otimes \mathcal{O}(-N \sum [v_j i/N] E_j) \\ &= \mathcal{O}(iC + \sum (iv_j - N[v_j i/N]) E_j). \end{aligned}$$

Or $(iv_j - N[v_j i/N])$ est strictement positif pour $0 < i < N$. Donc une puissance positive de $\mathcal{L}^{(i)}$ contient $\mathcal{L} = \sigma^* \mathcal{O}(1)$ qui est de dimension de Kodaira 2.

En fait, on n'a pas besoin d'utiliser ici le théorème 8.

La surface X étant affine, les $b_k(X)$ sont nuls pour $k > 2$, donc en particulier $H^1(Y, \Omega_Y^2(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(i-1)})=0$ pour $0 \leq i < N$. En transformant cette égalité par dualité de Serre, on trouve $H^1(Y, \mathcal{O}(-D_{\text{red}}) \otimes \mathcal{L}^{(i)})=0$ ou encore

$$H^1(Y, \sigma^* \mathcal{O}(-N+i) \otimes \mathcal{O}(\sum (v_j - 1 - [v_j i/N]) E_j))=0$$

pour $0 \leq i < N$. En posant $k=N-i$ et

$$\mathcal{L}'^{(k)} = \sigma^* \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(-\sum (-[v_j k/N] - 1) E_k),$$

on trouve $H^1(Y, \mathcal{L}'^{(k-1)})=0$ pour $0 < k \leq N$. Les faisceaux $\mathcal{L}^{(i)}$ et $\mathcal{L}'^{(i)}$ sont égaux pour tout i entre 1 et $(N-1)$ si et seulement si tous les v_j sont premiers à N .

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. En appliquant la suite spectrale de Leray au morphisme σ , on trouve:

$$\dim H^1(Y, \mathcal{L}^{(i-1)}) = \dim \text{Ker}(H^0(\mathbb{P}^2, R^1 \sigma_* \mathcal{L}^{(i-1)}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(-i))).$$

En considérant la flèche duale de la précédente, on trouve:

Remarque 11. *La contribution de $h^1(\mathcal{L}^{(i-1)})$ au premier nombre de Betti $b_1(X)$ de X dépend de l'existence de courbes de degré $(i-3)$ passant par les singularités de Γ avec une certaine multiplicité. Plus précisément*

$$\dim H^1(Y, \mathcal{L}^{(i-1)}) = \dim \text{Coker} (H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(i-3)) \rightarrow \Sigma \mathbb{C}^{m_p})$$

avec

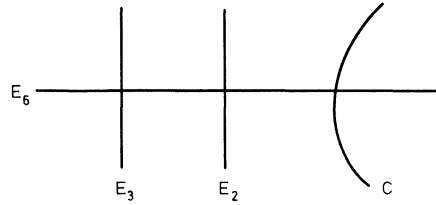
$$\begin{aligned} -m_p &= -\dim[R^1 \sigma_* \mathcal{L}^{(i-1)}]_p \\ &= \Sigma[v_j i/N] + \Sigma[v_j i/N](\Sigma[v_j i/N] + 1)/2 \quad E_j \cdot E_j + \sum_{j < k} [v_j i/N][v_k i/N] E_j \cdot E_k \end{aligned}$$

où cette somme est étendue aux E_j tels que $\sigma(E_j) = p$.

A titre d'illustration, regardons deux exemples, l'un classique pour lequel les hypothèses du théorème 8 sont mises en défaut, l'autre combinatoire pour lequel le théorème 8 permet de conclure.

1. Exemple de Zariski

La courbe Γ est de degré 6 et a 6 singularités qui sont des cusps. Pour chaque point singulier p , le diagramme de désingularisation est



avec pour matrice intersection

$$\begin{aligned} E_6^2 &= -1; & E_3^2 &= -2; & E_2^2 &= -3; & E_6 \cdot E_3 &= E_6 \cdot E_2 = 1; \\ & & E_3 \cdot E_2 &= 0 & \text{et} & & v_j &= j. \end{aligned}$$

Donc $R^1 \sigma_* \mathcal{L}^{(i-1)} = 0$ pour $i \leq 4$ et $R^1 \sigma_* \mathcal{L}^{(i-1)} = \sum_{p_k \text{ singulier}} \mathbb{C}$ pour $i = 5$.

$$\text{On a } b_1(X) = 2 \dim \text{Coker} \left(H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2)) \rightarrow \sum_1^6 \mathbb{C} \right).$$

Si les 6 points singuliers ne sont pas situés sur une conique, on peut prendre comme base de $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$ des coniques f_1, \dots, f_6 telles que $f_i(p_i)$ soit non nul et $f_i(p_j)$ soit nul pour $j \neq i$. Dans ce cas, $b_1(X) = 0$.

Si les 6 points singuliers sont situés sur une conique f , on peut prendre comme base de $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$ des coniques f_1, \dots, f_6 telles que $f_i(p_1)$ et $f_i(p_i)$ soient non nuls et $f_i(p_j)$ soit nul pour j différent de 1 et i . Dans ce cas, $b_1(X) = 2$.

Il s'ensuit que l'on ne peut déformer l'une des courbes dans l'autre.

2. Configurations

Une courbe réduite Γ de \mathbb{P}^2 est une configuration si toutes ses composantes irréductibles sont des droites. La configuration Γ est dite au plus à points

triples si ses seules singularités sont des points doubles ou triples. C'est le cas considéré par la suite. Appelons d_i et t_i le nombre de points doubles et triples sur une composante Γ_i , d et t le nombre de points doubles et triples totaux. On a bien-sûr $N - 1 = d_i + 2t_i$ et $N(N - 1)/2 = d + 3t$.

Résultat 12:

1. Si 3 est premier à N , on a $b_1(\mathbf{X}) = N - 1$.
2. Si 3 divise N , posons $N = 3n$. Alors
 - i) Si $t < n^2$, on a $b_1(\mathbf{X}) = N - 1$
 - ii) Sinon, on a toujours

$$(N - 1) \leq b_1(\mathbf{X}) \leq (N - 1) + 2 \inf\{t_i\}.$$

En particulier, si une droite Γ_i ne contient aucun point triple, on a $b_1(X) = N - 1$.

Démonstration. Pour chaque point multiple, on a

$$[R^1 \sigma_* \mathcal{L}^{(i)-1}]_p = \mathbb{C}_p^{\lfloor vi/N \rfloor (\lfloor vi/N \rfloor - 1)/2},$$

où v prend la valeur 2 ou 3 selon que p est double ou triple. La contribution des points doubles à $h^1(\mathcal{L}^{(i)-1})$ est nulle — ce que l'on savait déjà, de sorte qu'on peut prendre pour σ le seul éclaté des points triples- et celle des points triples est 1 si $2N/3 \leq i \leq N - 1$ et 0 sinon.

D'après le lemme 10, $h^1(\mathcal{L}^{(i)-1}) = 0$ si 3 est premier à N , ce qui donne 1. Si $N = 3n$, d'après la démonstration du lemme 10, le seul i tel que $2n \leq i \leq 3n - 1$ et tel que $\mathcal{L}^{(i)}$ ne soit pas de dimension de Kodaira maximum est $i = 2n$. Donc $b_1(\mathbf{X}) = (3n - 1) + 2h^1(\mathcal{L}^{(2n)-1})$.

Posons $\sigma^* \Gamma = C + 3 \sum_1^t E_p$, où $\sigma(E_p) = p$ est un point triple. On a $\mathcal{L}^{(2n)} = \mathcal{L}^{2n} \otimes \mathcal{O}(-2 \sum E_p)$ et donc $\mathcal{L}^{(2n)^3} = \mathcal{O}(2C)$. Par ailleurs, pour $v > 0$, on a

$$\begin{aligned} h^2(\mathcal{O}(vC)) &= h^0(\mathcal{O}(-vC) \otimes \mathcal{L}^{-3} \otimes \mathcal{O}(\sum E_p)) \\ &= h^0(\mathcal{L}^{-3vn} \otimes \mathcal{L}^{-3} \otimes \mathcal{O}((3v + 1)\sum E_p)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, pour $v > 0$, on a

$$h^0(\mathcal{O}(vC)) \geq X(\mathcal{O}(vC)) = v^2 C^2/2 - vC \cdot K/2 + 1.$$

Or $C^2 = (3nH - 3 \sum E_p)^2 = 9n^2 - 9t$, ce qui donne 2.i) d'après le théorème 8.

Considérons la configuration Γ' obtenue à partir de Γ en ôtant une des composantes Γ_i . On a alors $\deg \Gamma' = 3n - 1$. Posons $\sigma^* \Gamma' = C' + 3 \sum_{p \notin \Gamma_i} E_p + 2 \sum_1^{t_i} E_q$, où les E_p sont situés au-dessus de tous les points triples de Γ qui ne sont pas sur Γ_i , et les E_q sont situés au-dessus des anciens points triples de Γ sur Γ_i qui deviennent donc des points doubles de Γ' , et où $C' + C_i = C$, en notant C_i la transformée stricte de Γ_i . Ecrivons

$$\mathcal{L}^{3n-1} = \mathcal{O}(C' + 3\Sigma E_p + 2\Sigma E_q)$$

et appelons $\mathcal{M}^{(i)}$ le $\mathcal{L}^{(i)}$ correspondant à la structure d'algèbre sur le \mathcal{O}_Y -module $\bigoplus_0^{3n-2} \mathcal{L}^{-i}$ donnée par la section $\sigma^* \Gamma'$ de \mathcal{L}^{3n-1} . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(2n)} &= \mathcal{L}^{2n} \otimes \mathcal{O}(-[3 \cdot 2n/3n - 1] \Sigma E_p - [2 \cdot 2n/3n - 1] \Sigma E_q) \\ &= \mathcal{L}^{2n} \otimes \mathcal{O}(-2\Sigma E_p - \Sigma E_q) \end{aligned}$$

si $n > 1$. (Le cas trivial $n=1$ est traité à la fin).

Donc

$$\mathcal{M}^{(2n)} \otimes \mathcal{O}(K) = \mathcal{L}^{2n-3} \otimes \mathcal{O}(-\sum_{p \notin \Gamma} E_p) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{(2n)} \otimes \mathcal{O}(K) = \mathcal{L}^{2n-3} \otimes \mathcal{O}(-\Sigma E_p).$$

De la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^{(2n)} \otimes \mathcal{O}(K) \rightarrow \mathcal{M}^{(2n)} \otimes \mathcal{O}(K) \rightarrow \sum_1^{t_1} \mathcal{O}_{E_q} \rightarrow 0$$

et de l'annulation de $h^1(\mathcal{M}^{(2n)} \otimes \mathcal{O}(K))$ (lemme 10), on tire la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(Y, \mathcal{L}^{(2n)} \otimes \mathcal{O}(K)) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{M}^{(2n)} \otimes \mathcal{O}(K)) \\ \rightarrow \Sigma H^0(E_q, \mathcal{O}_{E_q}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{L}^{(2n)} \otimes \mathcal{O}(K)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ce qui donne 2. ii).

Si enfin $n=1$ et $t=1$, alors $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2n-3))=0$, donc $h^1(\mathcal{L}^{(2n-1)})=1$ et $b_1(X)=3-1+2 \times 1=4$. Si $t=0$, on est dans le cas 1.

Remarques 13.

1. La question de savoir si le schéma de modules d'une configuration à type combinatoire donné est lisse est ouverte.
2. La contribution du $h^1(\mathcal{L}^{(i-1)})$ à $b_1(X)$, en liaison avec la position des singularités de Γ dans \mathbb{P}^2 devrait faciliter la recherche d'exemples du type Zariski pour lesquels $b_1(X)$, et a fortiori $\pi_1(\mathbb{P}^2 - \Gamma)$, varient en fonction de celle-ci.

§4. Structure de Hodge sur les gradués par le poids

D'après le théorème II §1, la W -gradation des $H^k(X, \mathbb{C})$ est donnée par les termes

$$E_2^{-n, k+n} = \frac{\text{Ker}(H^k(\text{Gr}_n^W \Omega_2^p(\log \Delta)) \rightarrow H^{k+1}(\text{Gr}_{n-1}^W \Omega_2^p(\log \Delta)))}{\text{Im}(H^{k-1}(\text{Gr}_{n+1}^W \Omega_2^p(\log \Delta)) \rightarrow H^k(\text{Gr}_n^W \Omega_2^p(\log \Delta)))}.$$

Ceci donne sur $H^2(X, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} W_2 &= H^0(\Omega_2^2) + H^1(\Omega_2^1) / \text{Im}(H^0(n_* \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(\Omega_2^1)) + H^2(\mathcal{O}_Z) \\ &= H^{20} + H^{11} + H^{02} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Gr}_3^W &= \text{Ker}(H^0(\text{Gr}_1^W \Omega_2^2(\log \Delta)) \rightarrow H^1(\Omega_2^2)) + \text{Ker}(H^1(n_* \mathcal{O}_\Delta) \rightarrow H^2(\Omega_2^1)) \\ &= \bar{V} + V \end{aligned}$$

$$\text{Gr}_4^W = \text{Ker}(H^0(\text{Gr}_2^W \Omega_2^2(\log \Delta)) \rightarrow H^1(\text{Gr}_1^W \Omega_2^2(\log \Delta))).$$

Les termes H^{11} et V vérifient les deux suites exactes

$$0 \rightarrow H^{11} \rightarrow H^1(\Omega_2^1(\log \Delta)) \rightarrow V \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow V \rightarrow H^1(n_* \mathcal{O}_\Delta) \rightarrow H^2(\Omega_2^1) \rightarrow 0.$$

Pour estimer tous les H^{pq} , il suffit donc d'estimer $h^1(n_* \mathcal{O}_\Delta)$ — ce que nous faisons dans la proposition 15 — et de se servir du théorème 6.B.1 pour H^{02} , 6.A pour Gr_4^W connaissant H^{02} et V , donc H^{11} et Gr_3^W .

On se contentera ici de donner les valeurs exactes du *rang* et de la *signature* (théorème 14) de la matrice intersection.

Notons $H_c^k(X, \mathbb{C})$ la cohomologie de X à support compact et définissons la matrice intersection de $H_c^2(X, \mathbb{C})$ de la façon usuelle. Si $j: H_c^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ désigne l'application canonique et $(,)$ la dualité de Poincaré entre $H_c^2(X, \mathbb{C})$ et $H^2(X, \mathbb{C})$, on pose $q(a, b) = (a, j(b))$ pour deux éléments a et b de $H_c^2(X, \mathbb{C})$. Désignons par $\bar{j}: H_c^2(Z, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(Z, \mathbb{C})$ l'application canonique. On affecte à $H_c^2(X, \mathbb{C})$ et à $H_c^2(Z, \mathbb{C})$ les structures de Hodge mixtes duales de celles de $H^2(X, \mathbb{C})$ et $H^2(Z, \mathbb{C})$ définies par

$$W_{3-i} H_c^2(X, \mathbb{C}) = \text{Annulateur pour } (,) \text{ de } W_i H^2(X, \mathbb{C})$$

$$W_{3-i} H_c^2(Z, \mathbb{C}) = \text{Annulateur pour } (,) \text{ de } W_i H^2(Z, \mathbb{C}).$$

Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H_c^2(X, \mathbb{C}) & \xrightarrow{j} & H^2(X, \mathbb{C}) \\ \downarrow i_* & & \uparrow i^* \\ H_c^2(Z, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\bar{j}} & H^2(Z, \mathbb{C}) \end{array}$$

où i_* et i^* sont les morphismes évidents est un diagramme commutatif de morphismes de structure de Hodge ([13] p. 12). En particulier, le noyau de q est $W_1 H_c^2(X, \mathbb{C})$ et q est définie exactement sur $\text{Gr}_2^W H_c^2(X, \mathbb{C})$ qui est isomorphe à $\text{Gr}_2^W H^2(X, \mathbb{C}) = W_2 H^2(X, \mathbb{C})$. La signature de q qui est la différence des nombres de valeurs propres positives et négatives est $2 \dim H^{02} - \dim H^{11}$.

Introduisons d_j , plus grand dénominateur commun à v_j et N et d_{jk} , plus grand dénominateur commun à v_j, v_k et N .

Théorème 14. *Le rang et la signature de la matrice intersection de $H_c^2(X, \mathbb{C})$ vérifient*

$$\text{rang } q = (N-1)(N^2 - 3N + 3) + 2b_1(X) - 2(r-1) - (N-1) \sum \mu_p + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

$$\text{signature } q = -(N-1)(N^2 + N - 3)/3 + (N-1) \sum \mu_p$$

$$+ 2 \sum_1^{N-1} (\sum [v_j i/N] E_j)^2 + (N-1) \sum (v_j - 1)(E_j^2 + 2) - \beta_1 - \beta_3$$

où les β_i sont des constantes nulles si tous les v_j sont premiers à N . On a

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (\Sigma(d_j - 1) E_j) (\Sigma(v_j - 1) E_j) \\ \beta_2 &= \Sigma(d_j - 1) (E_j^2 + 2) \\ \beta_3 &= \sum_{j < k} E_j \cdot E_k (d_{jk} - 1) - \Sigma \mathcal{E}_{C \cdot E_j} B_j\end{aligned}$$

avec $\mathcal{E}_{C \cdot E_j} = 1$ si $C \cdot E_j = 0$ et 0 sinon

$B_j = \text{cardinal}\{i/1 \leq i \leq d_j - 1, i v_k/d_j \text{ est entier pour tout } k \text{ tel que } E_k \cdot E_j \neq 0\}$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la forme de signature, rang, structure de Hodge mixte explicités plus haut, du théorème 6.B. 1-3-4-5, et de la proposition 15.

Proposition 15. Avec les notations des théorèmes 6.B et 14, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j,k} h^0(\mathcal{O}_{A_{jk}}) &= \sum_j 1 + \sum_j \mathcal{E}_{C \cdot E_j} B_j \\ \sum_{j,k} h^1(\mathcal{O}_{A_{jk}}) &= -(\beta_1 + \beta_2)/2 - \beta_3.\end{aligned}$$

Démonstration. Mentionnons d'abord une forme arithmétique dont on a besoin.

Pour tous entiers positifs x et y , on a $\sum_1^{y-1} [xi/y] = (x-1)(y-1)/2 + (d-1)/2$, où d est le plus grand dénominateur commun à x et y . Supposons que x soit premier à y . La multiplication par x réalise alors un isomorphisme de $\mathbb{Z}/y\mathbb{Z}$. On écrit alors $xi = y[xi/y] + r_i$, avec $1 \leq r_i < y$ et r_i prenant toutes les valeurs entre 1 et $(y-1)$, puis on somme sur i . Si x n'est pas premier à y , on sépare la somme précédente en morceaux pour lesquels $ky/d \leq i \leq (k+1)y/d - 1$ et on applique successivement la formule précédente à x/d et y/d .

Revenons à notre situation. Nous voulons évaluer $\Sigma h^1(\mathcal{O}_{A_{jk}})$, c'est-à-dire que nous voulons savoir quel type de revêtement des courbes rationnelles E_j le morphisme f fournit. Fixons disons E_1 . On peut comprendre le morphisme f comme étant obtenu en deux étapes: en premier lieu une «extraction» d_1 -ième de la section D puis une extraction $N/d_1 = N_1$ -ième. Mais comme $v_1/d_1 = \gamma_1$ est premier à N_1 , l'extraction N_1 -ième est totalement ramifiée au-dessus du diviseur situé sur E_1 par l'extraction d_1 -ième. On peut donc supposer, pour ce qui nous intéresse, que l'on a un revêtement de degré d_1 de E_1 . Comme le diviseur $v_1 E_1$ n'est pas contenu dans $D - v_1 E_1$, on effectue en fait, au-dessus de E_1 , l'extraction d_1 -ième du faisceau

$$\mathcal{L}^N \otimes \mathcal{O}(-v_1 E_1)|_{E_1} = [\mathcal{L}^{N_1} \otimes \mathcal{O}(-\gamma_1 E_1)|_{E_1}]^{d_1}.$$

Cela étant posé, on peut reprendre les formules générales du lemme 2. Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1^{d_1} &= [\mathcal{L}^{N_1} \otimes \mathcal{O}(-\gamma_1 E_1)|_{E_1}]^{d_1} \\ &= \mathcal{O}(C + \sum_{j>1} v_j E_j)|_{E_1}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} n f|_{E_1^*} \sum \mathcal{O}_{\Delta_{1k}} &= \sum_0^{d_1-1} \mathcal{M}_1^{-i} \otimes \mathcal{O}(\sum_{j>1} [v_j i/d_1] E_j) \\ &= \sum_0^{d_1-1} \mathcal{M}_1^{(i)-1} \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{M}_1^{(i)-1} = \mathcal{O}_{E_1}(-i/d_1 C \cdot E_1 - \sum_{j>1} (i v_j/d_1 - [i v_j/d_1]) E_j \cdot E_1).$$

Lorsque i est positif et plus petit que d_1 , $\mathcal{M}_1^{(i)-1}$ n'a de sections qu'à la condition que l'entier entre parenthèses, qui est toujours négatif, soit nul. Ceci donne la première égalité en sommant sur toutes les composantes. Pour la deuxième égalité, on applique Riemann-Roch en évaluant $C \cdot E_j = -\sum v_k E_k \cdot E_j$, et la formule numérique ci-dessus.

§ 5. Renseignements topologiques supplémentaires sur un cas particulier

Considérons la surface Z . On n'est pas en mesure, à moins de connaître explicitement le nombre de composantes exceptionnelles situées au-dessus de \bar{X} , de déterminer H^{11} et donc la structure de Hodge de Z .

Prenons le cas particulier où la courbe Γ n'a comme singularités que des points doubles ordinaires.

Bien-sûr, les calculs des précédents paragraphes sont plus compliqués que ce qu'il serait nécessaire, dans la mesure où on peut appliquer les théorèmes I et II directement au morphisme $\bar{d}: Z \rightarrow \bar{X}$, sans passer par Y . Chaque singularité de \bar{X} étant de type A_{N-1} , c'est-à-dire d'équation analytique locale $t^N = xy$, on peut prendre une désingularisation minimale Z de \bar{X} qui attribue à chaque point singulier de \bar{X} une configuration A_{N-1} de composantes exceptionnelles.

1. Les nombres de Hodge de Z sont

$$h^{01} = h^{10} = 0$$

$$h^{02} = h^{20} = N^3/6 - N^2 + 11N/6 - 1 \text{ (théorème 6.B.1)}$$

$$h^{11} = 2N^3/3 - 2N^2 + 7N/3 \text{ (théorème 6.B.4).}$$

2. Représentons tout élément x de $H^q(Z, \Omega_2^q)$ par une (p, q) -forme. Il existe sur $H^2(Z, \mathbb{C})$ une polarisation définie par

$$H^2(Z, \mathbb{C}) \times H^2(Z, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \rightarrow \int_Z x \wedge y$$

qui est la forme d'intersection usuelle Q .

Elle est non dégénérée, ni positive, ni négative, et sa signature se calcule par ([5] p. 125)

$$\text{sgn } Q = \sum_{p+q=0(2)} (-1)^p h^{p,q}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} Q &= -N^3/3 + 4N/3 \\ \operatorname{rang} Q &= N^3 - 4N^2 + 6N - 2. \end{aligned}$$

3. La forme Q est définie sur $H^2(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Elle est dite *paire* si $Q(x, x)$ est pair pour tout x de $H^2(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ et *impaire* sinon. Elle est paire exactement quand la 2-ième classe de Stiefel-Whithney de \mathbb{Z} dans $H^*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est nulle ([9] p 21). La classe de Stiefel-Whithney totale de \mathbb{Z} est l'image de la classe de Chern totale du fibré tangent complexe à \mathbb{Z} , par le morphisme $H^*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. La parité de Q se calcule donc sur la 1-ière classe de Chern du fibré tangent complexe, ou bien, ce qui revient au même sur le diviseur canonique ([11] p. 99 et 171).

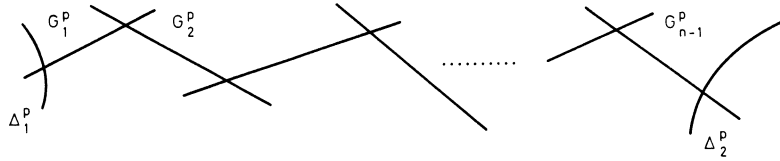
On a

$$\Omega_{\mathbb{Z}}^2(\log \Delta) = \Omega_{\mathbb{Z}}^2 \otimes \mathcal{O}(\Delta_{\text{réd}}) = \bar{f}^* \Omega_{\mathbb{P}^2}^2(\log \Gamma)$$

donc

$$\Omega_{\mathbb{Z}}^2 = \bar{f}^* \mathcal{O}(N-3) \otimes \mathcal{O}(-\Delta_{\text{réd}}).$$

Or $\bar{f}^* \mathcal{O}(\Gamma) = \mathcal{O}(N\Delta')$, où Δ' a le même support que Δ et est réduit le long des composantes de Δ qui ne sont pas exceptionnelles. Pour chaque point singulier p , le diagramme de désingularisation a la forme



où $\Delta_1^p + \Delta_2^p$ est partie de la transformée stricte de Γ et G_i^p est une courbe rationnelle lisse de self-intersection-2. Notons

$$f^* \Gamma = N \sum_p \Delta_1^p + \Delta_2^p + a_1^p G_1^p + \dots + a_{N-1}^p G_{N-1}^p$$

avec $a_i^p \geq 1$. On a

$$\bar{f}^* \Gamma \cdot G_1^p = 0 = N - 2Na_1^p + Na_2^p$$

$$\bar{f}^* \Gamma \cdot G_2^p = 0 = Na_1^p - 2Na_2^p + Na_3^p$$

$$\bar{f}^* \Gamma \cdot G_{N-1}^p = 0 = Na_{N-2}^p - 2Na_{N-1}^p + N.$$

Donc tous les a_i sont 1 et $\Delta' = \Delta_{\text{réd}}$. Par suite

$$\Omega_{\mathbb{Z}}^2 = \bar{f}^* \mathcal{O}(N-4).$$

Si N est pair, $\Omega_{\mathbb{Z}}^2$ est un multiple pair d'un diviseur, donc Q est paire. Si N est impair, il existe une composante Γ_1 de Γ , d'image inverse stricte Δ_1 et de degré impair. La formule du genre s'écrit

$$\Delta_1 \cdot \Delta_1 = 2g(\Delta_1) - 2 - \Delta_1 \cdot \mathcal{O}(N-4).$$

Donc $\Delta_1 \cdot \Delta_1$ est impair et Q aussi.

4. Nous montrons que Z est simplement connexe.

P. Deligne et W. Fulton ont montré ([4]) que $\pi_1(\mathbb{P}^2 - \Gamma)$ est un \mathbb{Z} -module de type fini. Donc comme sous-module de $\pi_1(\mathbb{P}^2 - \Gamma)$, $\pi_1(X)$ est aussi un \mathbb{Z} -module de type fini et comme module quotient de $\pi_1(X)$, $\pi_1(Z)$ aussi. Il suffit donc de montrer que tout revêtement étale de Z est trivial.

Soient $s: W \rightarrow Z$ un revêtement étale, connexe, galoisien de groupe G , non trivial, V la normalisation de \bar{X} dans W et $r: V \rightarrow \bar{X}$ le revêtement correspondant. Soit v un point fixe de V sous l'action de G . Alors $r(v)$ est nécessairement un point singulier de \bar{X} et $\bar{d}^{-1}(r(v))$ est une configuration P de type A_{N-1} , qui est simplement connexe. Donc $s^{-1}(P)$ est non connexe et possède $|G|$ feuillettes au-dessus de P . Ceci contredit le Zariski-Main-Theorem pour le morphisme $W \rightarrow V$. Donc G opère sans point fixe sur V . Appelons $\rho: V \rightarrow \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ le composé de r et $\bar{\tau}$. Le groupe H de ρ est commutatif et vérifie la suite exacte

$$0 \rightarrow G \hookrightarrow H \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Soit B un diviseur de V qui est ramifié au-dessus de Γ , H_B le sous-groupe de H qui le fixe point par point. Les sous-groupes H_B engendrent H , sinon il existerait un revêtement étale non trivial de \mathbb{P}^2 de groupe $H/\langle H_B \rangle$. Chaque H_B a une intersection nulle avec G , puisque G opère sans point fixe, et est «surjectif» sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, puisque $r(B)$ ramifie à l'ordre N sur $\rho(B)$. Donc chaque H_B est isomorphe à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, et de plus les H_B sont paramétrisés par les composantes de Γ . Supposons que le groupe engendré par H_{B_1} et H_{B_2} soit différent de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et prenons un de ses éléments qui soit dans G . Il fixe alors le point d'intersection de l'une des composantes de $\rho^{-1} \rho(B_1)$ avec l'une des composantes de $\rho^{-1} \rho(B_2)$. Ce qui est impossible. Donc $H = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et $G = 0$.

5. *Résultat 16.* Pour un N fixé, la surface Z est telle que sa matrice intersection est définie, ni positive ni négative, de rang, de signature et de parité constants. De plus, elle est simplement connexe. *Le type d'homotopie de Z , pour N fixé, est donc constant* ([10] p 103 et [6] p 35), en particulier est celui d'une surface Z obtenue à partir d'une courbe Γ lisse de degré N , et donc d'une hypersurface lisse de \mathbb{P}^3 .

Remarque 17. Le résultat 16 est connu et peut être obtenu par des techniques de déformation. Nous avons voulu souligner ici que les invariants topologiques calculés par les méthodes algébriques exposées précédemment permettent de déterminer le type d'homotopie de Z dans ce cas particulier.

Bibliographie

1. A'Campo, N.: La fonction zêta d'une monodromie. Comment. Math. Helvetici **50**, 233-248 (1975)
2. Bogomolov, F.: Unstable vector bundles and curves on surfaces. Proc. Intern. Congress of Maths, Helsinki, pp. 517-524 (1978)

3. Deligne, P.: Théorie de Hodge II, Pub. Math. I.H.E.S. **40**, 5-57 (1972)
4. Deligne, P.: Séminaire Bourbaki. Exposé **543** (1979)
5. Griffiths, P., Harris, J.: Principles of algebraic geometry. New York: Wiley Interscience publication 1978
6. Hirzebruch, F., Neumann, W.D., Koh, S.S.: Differentiable manifolds and quadratic forms. Lecture Notes in pure and applied mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer n°4 (1971)
7. Kawamata, Y.: A generalization of the Kodaira vanishing theorem. Preprint
8. Lipman, J.: Introduction to resolution of singularities. Proc. of Symp. in Pure Math., Vol. XXIX, Alg. Geom. Arcata (1974)
9. Mandelbaum, R.: Four dimensional topology: an introduction. Bull. Am Soc. **2**, 1-159 (1980)
10. Milnor, J., Husemoller, D.: Symmetric bilinear forms. Ergeb. Math. Grenzgeb. **73** (1973)
11. Milnor, J., Stasheff, J.: Characteristic classes. Princ. Univ. Press, n°76, (1974)
12. Mumford, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Publ. Math. I.H.E.S. n°**9**, 229-246 (1961)
13. Steenbrink, J.: Intersection form for quasi-homogeneous singularities. Comp. Math. **34**, (fasc. 2), 211-223 (1977)
14. Viehweg, E.: Rational singularities of higher dimensional schemes. Proc. of the A.M.S. **63**, 6-8 (1977)
15. Viehweg, E.: Vanishing theorems. Parait au Journal für reine und angewandte Mathematik (1982)

Oblatum 21-I-1982