

Leopoldina -Jahresversammlung 28.-29. September 2023
“Gesetz(e): Regeln der Wirklichkeit – Regeln für die Wirklichkeit”

1. TITEL DES VORTRAGS/TITLE OF THE TALK

“Richtig ”oder “Falsch”: dies sind die Alternativen in der
Mathematik

“Correct” or “wrong”, this is the alternative in mathematics

Hélène **Esnault**, FU Berlin, *em.*; associate Faculty Harvard,
part-time Prof. Copenhagen.

2. ABSTRAKT/ABSTRACT

Abstrakt: Der Titel der Jahresversammlung “Regeln der Wirklichkeit, Regeln für die Wirklichkeit” enthält zwei Begriffe: Regeln und Wirklichkeit, und zwei Varianten, wie man sie verbinden kann. Man könnte scherzhaft fortfahren: Wirklichkeit der Regeln, Wirklichkeit für die Regeln. . . Ich beschränke mich auf die Begriffe.

“Wirklichkeit” ist ein unscharf definierter Begriff. Die Mathematik hingegen setzt eindeutige Definitionen voraus. Sie arbeitet mit den Begriffen richtig und falsch.

Wenn es in der Mathematik so etwas wie eine Wirklichkeit gibt, dann die Wirklichkeit ihrer Regeln. Diese sind in Axiomen und Theoremen ausgedrückt, gegen die man nicht argumentieren kann, und nach denen wir vorgehen. Die Regeln beruhen auf den Kenntnissen, die wir im Laufe der Geschichte der Mathematik angesammelt haben. Somit sind die Regeln selbst historisch geprägt: Die Mathematik bringt uns, wenn man so will, durch die Hintertüre zurück in die Wirklichkeit der Geschichte.

Abstract: The title of the meeting “Rules of reality, rules for reality” contains two concepts: rules and reality, and two variants: how we can combine them. We could continue the combining as a joke: reality of the rules, reality for the rules. . . In what follows we focus on the concepts themselves.

The concept “reality” isn’t sharply defined. Mathematics, in contrast, poses unambiguous definitions and works with the concepts “correct” or “wrong”.

If ever there is something like reality in mathematics, then it is the reality of its rules. These are expressed in axioms and theorems. We can not argue with them, we proceed following them. The rules are based on the knowledge we have accumulated throughout the history

of mathematics. So those rules are shaped by History. By this indirect route mathematics brings us back to the reality of History.

3. KLEINE ENTSCHULDIGUNG

Wie im Abstrakt angedeutet, tun sich Mathematiker mit dem Begriff *Wirklichkeit/ Realität* schwer. Gängiger ist der Begriff in der *Philosophie der Mathematik*: hat unsere Tätigkeit eine Existenz ausserhalb von uns Mathematikern, es wäre der mathematische Platonismus. Dieser argumentiert:-wenn es uns nicht gäbe, gäbe es immer noch mathematische Objekte-. Die Gegenposition behauptet: mathematische Objekte sind rein geistige Produkte:- wenn es uns nicht gäbe, gäbe es auch keine Mathematik-.

Diese beiden Pole der Gedanken sind so alt wahrscheinlich wie die Mathematik selbst. Nun bin ich keine Philosophin in dem Sinne. Ich könnte flapsig sagen, wenn es uns nicht gäbe, würden wir uns auch keine Gedanken zum Thema machen...Statt dessen, möchte ich mich in diesem kurzen Vortrag darauf konzentrieren, *warum wir Mathematik* treiben. Dabei spielt der zweite Begriff des Titels der Veranstaltung eine Rolle, die *Regeln*.

4. WARUM MACHEN WIR MATHEMATIK?

Vielleicht gibt es soviele Wege, die zur Mathematik führen, wie Menschen, die sie betreiben. Aber eine Konstante gibt es: die Mathematik ist unsere *Freiheit*.

Einige kommen zur Mathematik über die Physik, einige über die Informatik, einige über die Ingenieurwissenschaften, einige über die Biologie. Es kommt ein Zeitpunkt im intellektuellen Leben, wo man unsere Gedanken strukturieren möchte, bevor man sie anwendet, wo man die Grundlage verstehe will. Es ist der Reiz der *Abstraktion*, die dann meistens weg von der "Realität" der Aussenwelt lebt.

Andere noch kommen zur Mathematik über die Kunst, die Poesie, die Philosophie. Es kommt ein Zeitpunkt, wo man versucht, den Subjektivismus zu überwinden, der die Ästhetik begleitet. Es ist das Kriterium "richtig" oder "falsch" vom Titel des Vortrags.

Wir haben zwei Beweggründe ausgezeichnet: die Abstraktion und das "richtig" oder "falsch".

5. WAS MACHEN WIR?

In der Regel fangen wir jung an. Was mich angeht, wurde ich früh in meiner Jugend von der Abstraktion gelockt, auch von diesem “richtig” oder “falsch”. Mathematik zwingt einen, mit eindeutig ausformulierten Argumenten zu denken. Es ist ein Schutz vor dem Dogmatismus. Mathematik kann uns vor sozialer Verwahrlosung bewahren, uns die Zukunftsangst nehmen, uns vor der Erwartung befreien, in der Gesellschaft nützlich zu sein. Natürlich ist Mathematik in der Gesellschaft willkommen, da sie Anwendungen hat, siehe zum Beispiel ChatGPT. Viele unter uns streben auch danach, dass Ihre Arbeit in der Gesellschaft Anwendungen findet. Aber andere, zu denen ich gehöre, nicht. Ich bin unter dem Eindruck von Hiroshima gross geworden, und wollte niemals in meinem Leben an irgendwas arbeiten, was verheerende Folgen haben könnte. Deswegen entschied ich mich, an etwas zu arbeiten, das gar keine Folgen hat: in dem “abstraktesten Gebiet” der Mathematik arbeiten.

Da berühren wir den Titel der Veranstaltung: *Wenn ich über Mathematik nachdenke, ist die Wirklichkeit der Aussenwelt weg*. Die Mathematik arbeitet mit Begriffen, die in sich selbst geschlossen sind. Eine mathematische Theorie beruht auf Gedanken, die verträglich sein müssen, mit tausenden von Gedanken, die vorher zum Gebäude der Mathematik hinzugefügt wurden. Eine Theorie wird dokumentiert in einer besonderen Sprache, die sich durch Sätze, Propositionen, Lemmata äussert, all die gehören dann zu den allgemeinen *Regeln* der Mathematik (siehe Titel der Veranstaltung), und die Theorie wird durch Beweise belegt. Der Beleg geht mit “richtig” oder “falsch”. Falsch kann ein logischer Fehlschluss sein, kann sich auch durch eine Unverträglichkeit mit einer vorherigen Theorie herausstellen. Im letzteren Fall, kann es auch passieren, dass der Fehler in der vorherigen Theorie liegt. Manchmal findet man Fehler in Artikeln, die über 100 Jahre alt sind. Meistens, wenn der Fehler so spät entdeckt wird, liegt es daran, dass die ältere Theorie von minderer Bedeutung für die Weiterentwicklung war.

Wir arbeiten an *Problemen*. In dieser Abstraktion kommen die Probleme selbst aus abstrakten Gedanken. Jeder Schritt des Verständnisses bringt neue Probleme mit sich selbst. Es geht immer so weiter. Die Probleme in anwendungsorientierteren Zweigen der Mathematik können von ausserhalb der Mathematik kommen. Aus der “Wirklichkeit” also...

6. WARUM WERDEN WIR DAVON NICHT MÜDE?

fragte mich kürzlich ein Freund. Dazu habe ich zwei Punkte als Antwort.

Zum einen, wenn es uns gelingt, etwas zu verstehen, selbst wenn das sehr klein ist, ist die Freude immens gross, sie ist mit nichts zu vergleichen. Niemand kann einem das wegnehmen.

Zum anderen, wollen wir wissen. Wir wollen wirklich wissen.

Ich habe gesagt, dass ich mich als Mathematikerin schwer tue mit einem abstrakten Begriff der Wirklichkeit. Aber wenn Sie mich fragen, was für mich und für viele von uns subjektiv Wirklichkeit ist, dann würde ich antworten: *Dieser unbedingte Wunsch zu wissen.*

7. EINE KLEINE AUSWAHL VON ZITATEN

Wolfgang Goethe: *Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders.*

Er mochte wirklich die Franzosen=den Mathematikern (!) nicht, denn er schrieb dazu:

Diejenige Kultur, welche die Mathematik dem Geiste gibt, ist äusserst einseitig und beschränkt.

Leonardo da Vinci: *Wer die erhabene Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung.*

Cess Noteboom: *Durch mein Fach bin ich an bestimmte Arten der Vollkommenheit gewöhnt. Eine davon ist die Mathematik, die, wenn man tiefer in sie eindringt, das Sphärische hoher Poesie aufweist, ohne das Unvorhersehbare und, wenn wir ehrlich sind, das sumpfig Menschliche.*

Albert Einstein: *Die reine Mathematik ist auf ihre Art die Poesie logischer Gedanken.*

Karl Weierstraß: *Es ist wahr, ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein.*