Math. Z. 205, 373–378 (1990)

Mathematische Zeitschrift
© Springer-Verlag 1990

# Une remarque sur la cohomologie du faisceau de Zariski de la $K$-théorie de Milnor sur une variété lisse complexe

**Hélène Esnault**

Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 35, route de Chartres, F-91440 Bures-sur-Yvette, France

Received June 20, 1989; in final form November 21, 1989

J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind montrent dans [CT-R] (1.7) que sur une variété connexe propre et lisse $X$ sur un corps séparablement clos $k$, l'application naturelle $H^0(X, \mathscr{K}_2) \to H^0(X, \mathscr{K}_2/\ell^n)$ est nulle si $\ell$ est un entier premier à la caractéristique de $k$. Leur preuve repose sur trois faits hautement non triviaux:

1. les conjectures de Weil [D I, D II]

2. l'isomorphisme $\mathscr{K}_2/\ell^n \xrightarrow[\text{symbole de Galois}]{\sim} \mathscr{H}^2_{\text{ét}}(\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ [MS]

3. l'existence d'une injection naturelle $H^0(X, \mathscr{K}_2)/\ell^n \to H^2_{\text{ét}}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ [S].

Si $k = \mathbb{C}$, nous disposons du faisceau de Zariski de la cohomologie de Deligne-Beilinson $\mathscr{H}^2_{\mathscr{D}}(2)$, du régulateur de Bloch-Beilinson $c_{22}$: $\mathscr{K}_2 \to \mathscr{H}^2_{\mathscr{D}}(2)$ ainsi que du morphisme naturel

$$i_2:\ \mathscr{H}^2_{\mathscr{D}}(2) \to \mathscr{H}^2(2)$$

où $\mathscr{H}^2(2)$ est le faisceau de Zariski associé à la cohomologie de Betti $H^2(\mathbb{Z}(2))$. Sachant que l'application composée

$$\mathscr{K}_2 \xrightarrow[c_{22}]{} \mathscr{H}^2_{\mathscr{D}}(2) \xrightarrow[i_2]{} \mathscr{H}^2(2) \to \mathscr{H}^2(\mathbb{Z}/\ell^n(2))$$

est le symbole de Galois (0.5) et que $\mathscr{K}_2/\ell^n \to \mathscr{H}^2(\mathbb{Z}/\ell^n(2))$ est injective (point 2 plus haut), [CT-R] (1.7) devient une conséquence directe de l'annulation de l'application

$$H^0(X, \mathscr{H}^2_{\mathscr{D}}(2)) \to H^0(X, \mathscr{H}^2(2)).$$

Mais ceci est un corollaire trivial de Hodge II de P. Deligne [$D_2$]. En fait il suffit que $X$ possède une compactification lisse $\bar{X}$ telle que le diviseur à l'infini $Y := \bar{X} - X$ soit lisse, et que $H^2(X, \mathbb{Z}(2))_{\text{torsion}}$ soit algébrique (ce qui est toujours le cas si $X$ est propre) (1.3) 1).

Plus généralement, nous considérons les applications

$$\mathscr{K}_p^M \xrightarrow[c_{pp}]{} \mathscr{H}^p_{\mathscr{D}}(p) \xrightarrow[i_p]{} \mathscr{H}^p(p)$$

où $\mathscr{K}_p^M$ est le faisceau de Zariski de la $K$-théorie de Milnor.

Supposons que les intersections $p$ à $p$ du diviseur à croisements normaux $Y := \bar{X} - X$ sont vides. Si $H^p(X, \mathbb{Z}(p))_{\text{torsion}}$ est inclus dans $C^1 H^p(X, \mathbb{Z}(p))$, le premier cran de la filtration $C^{\cdot}$ par le coniveau (voir [B] (5.13) pour cette hypothèse), alors l'application $\mathrm{Gr}_C^0 H_{\mathscr{D}}^p(X, p) \to H^0(X, \mathscr{H}^p(p))$ est nulle (1.3) 1), et en conséquence la partie de $H^0(X, \mathscr{K}_p^M)$ qui s'envoie sur $\mathrm{Gr}_C^0 H_{\mathscr{D}}^p(X, p)$ par $c_{pp}$ s'annule dans $H^0(X, \mathscr{K}_p^M/\ell^n)$ si on suppose que le symbole de Galois est injectif pour $p$ (1.5) 1). De façon similaire, si les intersections $(p-1)$ à $(p-1)$ de $Y$ sont vides et que $C^1 H^{p+1}(X, \mathbb{Z}(p))_{\text{torsion}} \cap H^{p+1}(X, \mathbb{Z}(p))_{\text{torsion}}$ est inclus dans $C^2 H^{p+1}(X, \mathbb{Z}(p))$ (voir (1.6) 1.$\gamma$ et 2.$\gamma$ pour une discussion de cette hypothèse), alors l'application $\mathrm{Gr}_C^1 H_{\mathscr{D}}^{p+1}(X, p) \to H^1(X, \mathscr{H}^p(p))$ est nulle (1.3) 2), et en conséquence la partie de $H^1(X, \mathscr{K}_p^M)$ qui s'envoie sur $\mathrm{Gr}_C^1 H_{\mathscr{D}}^{p+1}(X, p)$ par $c_{pp}$ s'annule dans $H^1(X, \mathscr{K}_p^M/\ell^n)$ si on suppose que le symbole de Galois est surjectif à noyau constant (1.5) 2).

En général, sans hypothèse de torsion, l'application $\mathrm{Gr}_C^1 H_{\mathscr{D}}^{p+1}(X, p) \to H^1(X, \mathscr{H}^p(\mathbb{Q}(p)))$ est nulle (1.3) 2).

## § 0 Notations

0.1 Soit $X$ une variété lisse complexe. Une *bonne compactification* $\bar{X}$ de $X$ est telle que $\bar{X}$ est lisse et propre, et que $Y := \bar{X} - X$ est un diviseur à croisements normaux. On dénote par $Y^{(p)}$ les intersections $p$ à $p$ des composantes de $Y$.

0.2 Si A est $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, on définit $F_A^{pq} := \ker F^p H^q(X, \mathbb{C}) \to H^q(X, \mathbb{C}/A(p))$ où $F^p H^q(X, \mathbb{C})$ est la *filtration de Hodge-Deligne* de la cohomologie de de Rham [$\mathrm{D}_2$].

On définit la *cohomologie de Deligne-Beilinson* $H_{\mathscr{D}}^q(X, A(p))$ [$\bar{\mathrm{b}}$] qui admet une représentation par une suite exacte

$$0 \to H^{q-1}(\mathbb{C}/A(p))/F^p H^{q-1}(\mathbb{C}) \to H_{\mathscr{D}}^q(A(p)) \to F_A^{pq} \to 0.$$

On a aussi une application naturelle

$$H_{\mathscr{D}}^q(A(p)) \to H^q(A(p)).$$

On dénote par $\mathscr{H}_{\mathscr{D}}^q(p)$, $\mathscr{H}^q(p)$ les faisceaux de Zariski correspondant pour $A = \mathbb{Z}$ et par $i_p$: $\mathscr{H}_{\mathscr{D}}^p(p) \to \mathscr{H}^p(p)$ l'application naturelle. Pour tout ouvert de Zariski $U$, on a $H_{\mathscr{D}}^1(U, 1) = H^0(U, \mathcal{O}^\times)$, où $\mathcal{O}^\times$ est le faisceau de Zariski des fonctions régulières inversibles ([$\bar{\mathrm{b}}$], (1.7)). Donc $\mathscr{H}_{\mathscr{D}}^1(1) = \mathcal{O}^\times \doteq \mathscr{K}_1$, où $\mathscr{K}_1$ est le faisceau de Zariski de la $K$-théorie $K_1$.

0.3 On dénote par $W$ *la filtration par le poids* sur $H^q(X, \mathbb{Z}(p))$ avec $W_q H^q(X, \mathbb{Z}(p)) = H^q(X, \mathbb{Z}(p))$ et $W_{-1} H^q(X, \mathbb{Z}(p)) = 0$ [$\mathrm{D}_2$].

0.4 On dénote par $C$ la filtration par le coniveau sur $H_{\mathscr{D}}^q(X, p)$ et $H^q(X, \mathbb{Z}(p))$ avec $C^0 H_{\mathscr{D}}^q(X, p) = H_{\mathscr{D}}^q(X, p)$ et $C^{\dim X + 1} H_{\mathscr{D}}^q(X, p) = 0$ (et même chose pour $H^q(X, \mathbb{Z}(p))$ ([BO]).

0.5 On dénote par $\mathscr{K}_p^M$ *les faisceaux de Zariski de la K-théorie de Milnor.* On a le *régulateur de Bloch-Beilinson* $c_{pp}$: $\mathscr{K}_p^M \to \mathscr{H}_{\mathscr{D}}^p(p)$, obtenu par cup-produit de $c_{11}$: $\mathscr{K}_1 \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_{\mathscr{D}}^1(1)$. Donc $i_p \circ c_{pp}$ est obtenu par cup-produit de $i_1 \circ c_{11}$: $\mathscr{K}_1 \to \mathscr{H}^1(1)$. Si $\alpha$: $X_{\text{an}} \to X_{\text{zar}}$ désigne l'application (continue) identité, alors, on a l'application évidente $\mathscr{K}_1 \to \alpha_* \mathcal{O}_{\text{an}}^\times$, où $\mathcal{O}_{\text{an}}^\times$ est le faisceau des fonctions holomorphes inversibles, suivie de l'application $\alpha_* \mathcal{O}_{\text{an}}^\times \to R^1 \alpha_* \mathbb{Z}(1) = \mathscr{H}^1(1)$ provenant de la suite exponentielle. Identifiant $\mathscr{H}^p_{\text{ét}}(\mu_{\ell^n}^{\otimes p})$ à $\mathscr{H}^p(\mathbb{Z}/\ell^n(p))$, on voit ainsi que l'application composée $\mathscr{K}_p^M \xrightarrow[c_{pp}]{} \mathscr{H}^p_{\mathscr{D}}(p) \to \mathscr{H}^p(p) \to \mathscr{H}^p(\mathbb{Z}/\ell^n(p))$ est le symbole de Galois. On définit $\ker_p$ et $\operatorname{coker}_p$ par la suite exacte

$$0 \to \ker_p \to \mathscr{K}_p^M/\ell^n \to \mathscr{H}^p(\mathbb{Z}/\ell^n(p)) \to \operatorname{coker}_p \to 0$$

pour un entier premier $\ell$ et un entier non nul $n$ donnés. On sait que $\ker_2 = \operatorname{coker}_2 = 0$ [MS].

## § 1 La remarque

**1.1 Lemme.** *On a des inclusions*

(*i*) $F_A^{pp} \subset \operatorname{Gr}_p^W(H^p(X, A(p))/\text{torsion})$

*ii*) $F_A^{p,p+1} \subset \operatorname{Gr}_{p-1}^W(H^{p+1}(X, A(p))/\text{torsion})$

*Preuve.* i) Soit $0 \neq \alpha \in F^p H^p(X, \mathbb{C}) = H^0(\bar{X}, \Omega^p_{\bar{X}}(\log Y))$. Si $\alpha \in W^j - W^{j-1}$, alors $0 \neq \operatorname{res}_{Y^{(j)}} \alpha \in H^0(\tilde{Y}^{(j)}, \Omega^{p-j}_{\tilde{Y}^{(j)}})$ où $\tilde{Y}^{(j)}$ est la normalisation de $Y^{(j)}$, et $\operatorname{res}_{Y^{(j)}} \alpha$ est invariant par conjugaison. Donc $j = p$.

ii) Soit $0 \neq \alpha \in F^p H^{p+1}(X, \mathbb{C}) = H^1(\bar{X}, \Omega^p_{\bar{X}}(\log Y)) \to \Omega^{p+1}_{\bar{X}}(\log Y))$. Si $\alpha \in W^j - W^{j-1}$, alors $0 \neq \operatorname{res}_{Y^{(j)}} \alpha \in H^1(\tilde{Y}^{(j)}, \Omega^{p-j}_{\tilde{Y}^{(j)}} \to \Omega^{p+1-j}_{\tilde{Y}^{(j)}})$, et est invariant par conjugaison. Donc $j = p - 1$.

**1.2 Corollaire**

*i) Si* $Y^{(p)} = \phi$, *alors* $H^p_{\mathscr{D}}(X, p) = H^{p-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(p))$.

*ii) Si* $Y^{(p-1)} = \phi$, *alors* $H^{p+1}_{\mathscr{D}}(X, p) = H^p(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(p))/F^p H^p(X, \mathbb{C})$.

*Preuve.* Par (1.1), on a $F_{\mathbb{Z}}^{pp} = 0$ dans le cas i) et $F_{\mathbb{Z}}^{p,p+1} = 0$ dans le cas ii).

*1.2.1. Remarque.* Si $Y^{(p-1)} = \phi$, alors a fortiori $Y^{(p)} = \phi$ et donc par (1.1) i), $F^p H^p(X, \mathbb{C})$ s'injecte dans $H^p(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(p))/F^p H^p(X, \mathbb{C})$.

**1.3 Théorème.** 1) *Supposons que* $Y^{(p)} = \phi$. *Alors on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Gr}_C^0 H^p_{\mathscr{D}}(X, p) & & \hookrightarrow & & H^0(X, \mathscr{H}^p_{\mathscr{D}}(p)) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\dfrac{H^p(X, \mathbb{Z}(p))_{\text{torsion}}}{C^1 \cap H^p(X, \mathbb{Z}(p))_{\text{torsion}}} & \hookrightarrow & \operatorname{Gr}_C^0 H^p(X, \mathbb{Z}(p)) & \hookrightarrow & H^0(X, \mathscr{H}^p(p))
\end{array}$$

*Si* $H^p(X, \mathbb{Z}(p))_{\text{torsion}}$ *est dans* $C^1 H^p(X, \mathbb{Z}(p))$, *alors l'application naturelle composée* $\operatorname{Gr}_C^0 H^p_{\mathscr{D}}(X, p) \hookrightarrow H^0(X, \mathscr{H}^p_{\mathscr{D}}(p)) \to H^0(X, \mathscr{H}^p(p))$ *est nulle.*

2) *Supposons que* $Y^{(p-1)} = \phi$. *Alors on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Gr}_C^1 H^{p+1}_{\mathscr{D}}(X, p) & & \hookrightarrow & & H^1(X, \mathscr{H}^p_{\mathscr{D}}(p)) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\dfrac{C^1 \cap H^{p+1}(X, \mathbb{Z}(p))_{\text{torsion}}}{C^2 \cap H^{p+1}(X, \mathbb{Z}(p))_{\text{torsion}}} & \hookrightarrow & \operatorname{Gr}_C^1 H^{p+1}(X, \mathbb{Z}(p)) & \hookrightarrow & H^1(X, \mathscr{H}^p(p)).
\end{array}$$

*Si* $C^1 \cap H^{p+1}(X, \mathbb{Z}(p))_{\mathrm{torsion}}$ *est dans* $C^2 H^{p+1}(X, \mathbb{Z}(p))$, *alors l'application naturelle composée* $\mathrm{Gr}^1_C H^{p+1}_{\mathscr{D}}(X, p) \hookrightarrow H^1(X, \mathscr{H}^p_{\mathscr{D}}(p)) \to H^1(X, \mathscr{H}^p(p))$ *est nulle. Sinon, elle est nulle dans* $H^1(X, \mathscr{H}^p(\mathbb{Q}(p))$.

La *preuve* est une conséquence triviale de (1.2).

1.4 On définit

$$K^{(i)}_{(p)} = H^i(c_{pp})^{-1}\,\mathrm{Gr}^i_C H^{p+i}_{\mathscr{D}}(X, p)),$$

pour $i=0$ ou 1, où $H^i(c_{pp})$ est l'application

$$H^i(X, \mathscr{K}^M_p) \to H^i(X, \mathscr{H}^p_{\mathscr{D}}(p)).$$

**1.5 Théorème.** 1) *Si* $Y^{(p)} = \phi$ *et si* $H^p(X, \mathbb{Z}(p))_{\mathrm{torsion}}$ *est dans* $C^1 H^p(X, \mathbb{Z}(p))$, *alors l'image de l'application naturelle composée* $K^{(0)}_{(p)} \hookrightarrow H^0(X, \mathscr{K}^M_p) \to H^0(X, \mathscr{K}^M_p/\ell^n)$ *est dans* $H^0(\ker_p)$.

2) *Si* $Y^{(p-1)} = \phi$ *et si*

$$C^1 \cap H^{p+1}(X, \mathbb{Z}(p))_{\mathrm{torsion}} \quad \text{est dans} \quad C^2 H^{p+1}(X, \mathbb{Z}(p)),$$

*alors l'image I de l'application naturelle composée*

$$K^{(1)}_{(p)} \hookrightarrow H^1(X, \mathscr{K}^M_p) \to H^1(X, \mathscr{K}^M_p/\ell^n)$$

*s'inscrit dans une suite exacte*

$$H^1(X, \ker_p) \to I \to \frac{H^0(X, \mathrm{coker}_p)}{H^0(X, \mathscr{H}^p(\mathbb{Z}/\ell^n(p)))} \to 0.$$

*En particulier, elle est nulle si* $\mathrm{coker}_p = 0$ *et si* $\ker_p$ *est un faisceau constant.*

3) *Si* $Y^{(p-1)} = \phi$, *alors l'application naturelle composée* $K^{(1)}_{(p)} \hookrightarrow H^1(X, \mathscr{K}^M_p) \to H^1(X, \mathscr{H}^p(\mathbb{Q}(p)))$ *est nulle.*

La *preuve* est une conséquence triviale de (1.3).

1.6 Nous explicitons ici les hypothèses de (1.3) et (1.5) pour $p$ petit.

*1.* $p=2$

$\alpha$) La suite spectrale par le coniveau

$${}_C E_2^{pq} = H^p(\mathscr{H}^q_{\mathscr{D}}(r)) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathscr{D}}(r)$$

et la propriété

$$H^p(\mathscr{H}^q_{\mathscr{D}}(r)) = 0 \quad \text{pour} \quad p > q$$

permettent d'écrire les deux suites exactes suivantes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C^1 H^2_{\mathscr{D}}(2) & \to & H^2_{\mathscr{D}}(2) & \to & \mathrm{Gr}^0_C H^2_{\mathscr{D}}(2) & \to 0 \\ & \| & & & & \| & \\ & H^1(\mathscr{H}^1_{\mathscr{D}}(2)) & & & & H^0(\mathscr{H}^2_{\mathscr{D}}(2)) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & C^1 H^3_{\mathscr{D}}(2) & \to & H^3_{\mathscr{D}}(2) & \to & \mathrm{Gr}^0_C H^3_{\mathscr{D}}(2) & \to 0. \\ & \| & & & & & \\ & \mathrm{Gr}^1_C H^3_{\mathscr{D}}(2) & & & & & \\ & \| & & & & & \\ & H^1(\mathscr{H}^2_{\mathscr{D}}(2)) & & & & & \end{array}$$

Donc $K_{(2)}^{(1)} = H^1(\mathscr{K}_2)$, et comme $\mathscr{H}_{\mathscr{D}}^1(2) = \mathbb{C}/\mathbb{Z}(2)$, on en déduit que $H_{\mathscr{D}}^2(2) = \mathrm{Gr}_C^0\, H_{\mathscr{D}}^2(2)$, et donc que

$$K_{(2)}^{(0)} = H^0(\mathscr{K}_2).$$

$\beta$) Si $X$ est propre, alors $H^2(\mathbb{Z}(2))_{\mathrm{torsion}}$ est toujours algébrique, c'est-à-dire que $H^2(\mathbb{Z}(2))_{\mathrm{torsion}}$ est dans $C^1 H^2(\mathbb{Z}(2))$. Plus généralement, supposons que $Y^{(2)} = \phi$ – c'est-à-dire que $Y$ est lisse –, et que les composantes $Y_i$ de $Y$ vérifient: l'application

$$\bigoplus_i \mathbb{Z}.[Y_i] \xrightarrow[c_1^{\mathbb{Z}}]{} H^2(X, \mathbb{Z}(1))/\mathrm{torsion}$$

est scindée. En regardant la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(\bar{X}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(2)) &\longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(2)) \to \\ \to \oplus \mathbb{C}/\mathbb{Z}(2).[Y_i] &\xrightarrow[\mathbb{C}/\mathbb{Z}(1)\otimes c_1^{\mathbb{Z}}(Y_i)]{} H^2(\bar{X}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(2)) \end{aligned}$$

on voit que $H^1(\bar{X}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(2)) = H^1(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(2))$. Donc l'image de $H^1(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(2))$ dans $H_{\mathrm{an}}^1(X, \mathscr{O}_{\mathrm{an}}^x)$ est contenue dans l'image de l'application composée $H_{\mathrm{an}}^1(\bar{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{an}}^x) \underset{[\mathrm{Se}]}{=} \mathrm{Pic}\, \bar{X} \to \mathrm{Pic}\, X \to H_{\mathrm{an}}^1(X, \mathscr{O}_{\mathrm{an}}^x)$, et est donc algébrique.

$\gamma$) Comme $C^2 H^3(\mathbb{Z}(2)) = 0$, l'hypothèse (1.5) 2) signifie que $H^3(\mathbb{Z}(3))_{\mathrm{torsion}}$ s'injecte dans $\mathrm{Gr}_C^0 H^3(\mathbb{Z}(3))$. Donc si $X$ est propre (c'est-à-dire si $Y^{(2-1)} = \phi$, ce qui implique que $Y^{(3)} = \phi$), on a deux cas extrêmes:

(i) $H^3(\mathbb{Z})_{\mathrm{torsion}}$ s'injecte dans $\mathrm{Gr}_C^0 H^3(\mathbb{Z})$ et alors l'application $H^1(\mathscr{K}_2) \to H^1(\mathscr{K}_2/\ell^n)$ est nulle.

(ii) $H^3(\mathbb{Z})_{\mathrm{torsion}}$ s'injecte dans $C^1 H^3(\mathbb{Z})$ et alors l'application $H^0(\mathscr{K}_3^M) \to H^0(\mathscr{K}_3^M/l^n)$ est nulle. Cependant, le premier cas n'est pas très vraisemblable [B] 5.13.

2. $p = 3$

$\alpha$) On a toujours

$$\mathrm{Gr}_C^0 H_{\mathscr{D}}^3(3) = H^0(\mathscr{H}_{\mathscr{D}}^3(3)).$$

Pour voir ceci, on observe que $\mathscr{H}_{\mathscr{D}}^{2-\ell}(3) = \mathscr{H}^{2-\ell-1}(\mathbb{C}/\mathbb{Z}(3))$ pour $\ell \geqq 0$ et que

$$H^{2+\ell}(\mathscr{H}^{2-\ell-1}(\mathbb{C}/\mathbb{Z}(3))) = 0 \quad \text{pour} \quad \ell \geqq 0\,[\mathrm{BO}].$$

On a aussi

$$\mathrm{Gr}_C^1 H_{\mathscr{D}}^4(3) = H^1(\mathscr{H}_{\mathscr{D}}^3(3))$$

par le même argument.

Donc

$$K_{(3)}^{(0)} = H^0(X, \mathscr{K}_3^M)$$
$$K_3^{(1)} = H^1(X, \mathscr{K}_3^M)$$

$\beta$) Si $X$ est propre, l'hypothèse (1.5) 1) est un espoir formulé par S. Bloch [B] 5.13.

$\gamma$) On sait qu'en général, d'après [A.H], l'hypothèse (1.5) 2) n'est pas vérifiée: elle dit qu'une classe de torsion dans $H^4(\mathbb{Z})$, et qui est dans $C^1$, doit provenir d'un cycle de codimension 2.

*3.* $p=4$

$\alpha$) On a toujours

$$\mathrm{Gr}_C^1 H_{\mathscr{D}}^5(4) = H^1(\mathscr{H}_{\mathscr{D}}^4(4))$$

et donc

$$K_{(4)}^{(1)} = H^1(X, \mathscr{K}_4^M).$$

$\beta$) Même remarque qu'en (1.6) 3.$\beta$.

## Références

[A.H.] Atiyah, M., Hirzebruch, F.: Analytic cycles on complex manifolds. Topology **1**, 25–45 (1962)

[Б] Beilinson, A.: Higher regulators and values of $L$-functions. J. Sov. Math. **30**, 2036–2070 (1985)

[B] Bloch, S.: Lecture on algebraic cycles. Duke University, Durham, 1980

[BO] Bloch, S., Ogus, A.: Gersten's conjecture and the homology of schemes. Ann Sci Ec. Norm. Super. **7**, 181–202 (1974)

[CT-R] Colliot-Thélène, J.L., Raskind, W.: $K_2$-cohomology and the second Chow group. Math. Ann. **270**, 165–199 (1985)

[D I] Deligne, P.: La conjecture de Weil, I. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **43**, 273–308 (1974)

[D II] Deligne, P.: La conjecture de Weil, II. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **52**, 137–252 (1980)

[$D_2$] Deligne, P.: Théorie de Hodge, II. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **40**, 5–57 (1972)

[MS] Merkurjev, A., Suslin, A.: $K$-cohomology of Severi-Brauer varieties and norm residue homomorphism. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. **46**, 1011–1046 (1982)

[Se] Serre, J.P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. Fourier **6**, (1956)

[S] Suslin, A.: Torsion in $K_2$ of fields. $K$-Theory **1**, 5–29 (1987)