HÉLÈNE ESNAULT

Classification des variétés de dimension 3 et plus

Séminaire N. Bourbaki, 1980-1981, exp. n° 568, p. 111-131.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__111_0>

CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3 ET PLUS
[d'après T. Fujita, S. Iitaka, Y. Kawamata, K. Ueno, E. Viehweg]

par Hélène ESNAULT

La classification birationnelle des variétés projectives complexes lisses de grande dimension est un essai d'ordonner grossièrement celles-ci en "classes" définies par des invariants numériques et d'éclairer la structure de quelques-unes de ces classes à partir de structures "bien connues" en dimension plus petite. On est cependant encore loin d'une généralisation du tableau de classification classique de Castelnuovo-Enriques pour les surfaces, même en dimension 3 (§ 1).

Cet exposé doit donner une vue d'ensemble des résultats pour l'heure connus, et expliquer quelques méthodes de démonstration. On ne parlera pas de la théorie non algébrique [16].

La présentation des problèmes doit beaucoup à Eckart Viehweg qui a eu la malchance de se trouver à Paris pendant la préparation de cet exposé.

Définitions et notations

1) Une *variété* est toujours lisse, complexe, algébrique, projective, irréductible.

2) Soit $f : V \longrightarrow W$ un morphisme d'une variété V dans une autre W. On dit que f *est un espace fibré* si f est surjective et de fibre générique connexe. En particulier, toutes les fibres sont connexes, et la fibre générique est irréductible et lisse.

3) Soit $f : V \longrightarrow W$ un espace fibré. On dit que f *est un fibré étale* s'il existe un revêtement étale $W' \longrightarrow W$ tel que le produit fibré $V \times_W W'$ soit un espace fibré trivial sur W' i.e. tel que $V \times_W W'$ soit isomorphe à $W' \times F$, où F est la fibre générale de f.

4) $V \sim W$ signifie que les variétés V et W sont birationnellement équivalentes. $V \simeq W$ signifie qu'elles sont isomorphes.

5) Soit V une variété. Son *irrégularité* est $q(V) = \dim H^1(V,\mathcal{O}_V)$. Sa *variété d'Albanese* est $A(V) = H^0(V,\Omega_V^1)^*/H_1(V,\mathbb{Z})$. On note $\alpha : V \longrightarrow A(V)$ l'application d'Albanese, $\alpha(V)$ l'image de V. L'irrégularité $q(V) = \dim A(V)$ est un invariant

birationnel.

6) Soit $f : V \longrightarrow W$ un espace fibré. On note $\omega_{V/W} = \omega_V \otimes f^*\omega_W^{-1}$ la différence des deux faisceaux dualisants. L'anneau de $\omega_{V/W}$ est $R(\omega_{V/W}) = \bigoplus_{n\geq 0} H^o(V,\omega_{V/W}^n)$. On appelle *dimension de Kodaira de* V *sur* W le nombre

$$\kappa(V/W) = \begin{cases} (\text{degré de transcendance sur } \mathbb{C} \text{ de } R(\omega_{V/W})) - 1 & \text{si } R(\omega_{V/W}) \neq \mathbb{C}, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle *dimension de Kodaira de* V le nombre $\kappa(V) = \kappa(V/\mathrm{Spec}\ \mathbb{C})$. Lorsque $\kappa \geq 0$, la dimension de Kodaira est le maximum de la dimension de l'image de l'application pluricanonique. C'est aussi l'entier positif ℓ tel qu'il existe a et b positifs tels que $an^\ell \leq \dim H^o(V,\omega_{V/W}^n) \leq bn^\ell$, pour n grand tel que $H^o(V,\omega_{V/W}^n) \neq 0$ [3]. C'est un invariant par transformation birationnelle ou étale.

7) Soit $f : V \longrightarrow W$ un espace fibré. Bien que le corps $\overline{\mathbb{C}(W)}$ ne soit pas canoniquement isomorphe à $\mathbb{C}$, on parlera toujours dans la suite de la dimension de Kodaira de la fibre générique F de f . En effet, si la fibre générique F vérifie $\kappa(F) = a$, alors toutes les fibres $f^{-1}(x)$ vérifient $\kappa(f^{-1}(x)) = a$ au dessus du complémentaire de la réunion d'un nombre dénombrable de sous-variétés fermées strictes de W (voir [23] et démonstration du théorème 3).

§ 1. Tableaux de classification

a) dim V = 1 . L'irrégularité de la courbe est son genre g .

$\kappa(V)$	$q(V)$	$\dim \alpha(V)$	Structure de V
1	≥ 2	1	courbe de genre ≥ 2
0	1	1	courbe elliptique $V \simeq A(V)$
$-\infty$	0	0	courbe rationnelle $V \simeq \mathbb{P}^1$

b) dim V = 2 . La structure de V donnée est celle de son modèle minimal.

$\kappa(V)$	$q(V)$	$\dim \alpha(V)$	Structure de V
2			surface de type général
1			surface elliptique i.e. espace fibré sur une courbe C dont la fibre générique F est une courbe elliptique
0	2	2	surface abélienne $V \simeq A(V)$
	1	1	surface hyperelliptique i.e. $\alpha : V \to A(V)$ est un fibré étale de fibre elliptique
	0	0	surface K3 si $H^o(V,\omega_V) = \mathbb{C}$ surface d'Enriques si $H^o(V,\omega_V) = 0$
$-\infty$	0	0	surface rationnelle
	≥ 1	1	espace fibré sur une courbe de genre q(V) , de fibre générique $\mathbb{P}^1$

Remarque.— Les classifications a) et b) sont "grossières" et adaptées au type de résultats que l'on cherche en dimension supérieure.

c) dim $V = 3$. Il n'y a pas de modèle minimal de V .

THÉORÈME 1 (§ 5).— *Toute variété de dimension* 3 *est à équivalence birationnelle près l'une des suivantes :*

$\kappa(V)$	$q(V)$	dim $\alpha(V)$	Structure de V
3			variété de type général (?)
2			espace fibré sur une surface W et de fibre générique une courbe elliptique F
1			espace fibré sur une courbe W et de fibre générique une surface F telle que $\kappa(F) = 0$
0	3	3	variété abélienne $V \sim A(V)$
	2	2	$\alpha : V \longrightarrow A(V)$ est un fibré étale de fibre une courbe elliptique F
	1	1	$\alpha : V \longrightarrow A(V)$ est un fibré étale de fibre une surface F telle que $\kappa(F) = 0$
	0	0	?
$-\infty$	≥ 1		la factorisation de Stein $f : V \longrightarrow W_0$ de α a une fibre générique F et une désingularisation W telles que :
		2	$\dim F = 1$, $F \simeq \mathbb{P}^1$, $q(W) = q(V)$, $\kappa(W) \geq 0$
		1	$\dim F = 2$, $\kappa(F) = -\infty$, $q(W) = q(V)$, $\kappa(W) \geq 0$
	0	0	?

Remarque.— Les points d'interrogation signifient que l'on n'a pas de théorème de structure [0].

d) $\dim V > 3$

Les propriétés précédentes lorsque $\kappa(V) \geq 1$ se généralisent (cf. § 2, théorème 3) : V est un espace fibré sur W et de fibre générique F tels que $\dim W = \kappa(V)$ et $\kappa(F) = 0$.

Une partie des propriétés précédentes lorsque $\kappa(V) = 0$ se généralisent.

THÉORÈME 2 (§ 5).— (i) *Si* $\kappa(V) = 0$, *alors* $\alpha : V \longrightarrow A(V)$ *est un espace fibré. En particulier* $q(V) \leq \dim V$.

(ii) V *est birationnellement une variété abélienne si et seulement si* $\kappa(V) = 0$ *et* $q(V) = \dim V$.

(iii) *Si* $q(V) = \dim V - 1$ *et* $\kappa(V) = 0$, *alors* α *est un fibré étale de fibre* F *telle que* $\kappa(F) = 0$.

L'objet des chapitres suivants est d'expliquer les méthodes de démonstration des théorèmes 1 et 2.

§ 2. Théorèmes généraux sur les dimensions de Kodaira

THÉORÈME 3 [1].— *Soit* V *une variété telle que* $\kappa(V) \geq 0$. *Il existe un modèle birationnel* V' *de* V *, un espace fibré* $f : V' \longrightarrow W$ *de fibre générique* F *tels que* $\dim W = \kappa(V)$ *et* $\kappa(F) = 0$. *L'espace fibré* f *ayant ces propriétés est birationnellement unique.*

Idée de la démonstration : On peut supposer $\kappa(V) \geq 0$. Pour un i tel que $H^0(V,\omega_V^i) \neq 0$, on a une inclusion de $H^0(V,\omega_V^i)$ dans $H^0(V,\omega_V^{in})$ qui permet d'identifier les sections. On a donc un diagramme commutatif d'applications rationnelles

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed] \arrow[dr, dashed] & V_{in} \subset \mathbb{P}^{\ell(in)} \arrow[d, dashed, "p"] \\ & V_i \subset \mathbb{P}^{\ell(i)} \end{tikzcd}$$

où p est la projection sur "les sections de ω_V^i ", V_i et V_{in} la fermeture des images de V . Le corps $\mathbb{C}(V)$ étant de type fini sur $\mathbb{C}$, la suite d'inclusions des $\mathbb{C}(V_{in})$ est stationnaire. Posons $a = iN$ tel que $\mathbb{C}(V_{iN}) = \mathbb{C}(V_{i(N+k)})$ et prenons un modèle désingularisé $f : V' \longrightarrow W$ de $V \dashrightarrow V_a$. Alors $\dim W = \kappa(V)$.

Dire que les fibres de f sont connexes, c'est dire que la factorisation de Stein W' de f est $1-1$ sur W . Notons F_a le morphisme $V' \longrightarrow V_a$. Pour n grand, $F_{a*}\mathcal{O}_{V'} \otimes \mathcal{O}(n)$ est contenu dans $F_{a*}\omega_{V'}^{an}$ et engendré par ses sections globales, de sorte que celles-ci séparent les points de la factorisation de Stein de f , donc les fibres de V sur V_{an} , et $\mathbb{C}(V_{an})$ contient strictement $\mathbb{C}(V_a)$ si $W' \neq W$. Le morphisme f est donc un espace fibré. Le même genre d'argument montre que pour chaque n , le faisceau $f_*\omega_{V'}^{an}$ est inversible sur un ouvert de Zariski U_n de W . Donc $H^0(f^{-1}(x),\omega_{V'}^{an}|_{f^{-1}(x)}) = H^0(f^{-1}(x),\omega_{f^{-1}(x)}^{an}) = \mathbb{C}$, pour x dans l'intersection de ces U_n , et pour le point générique de W .

THÉORÈME 4 [1]-[2].— *Soient* $f : V \longrightarrow W$ *un espace fibré,* F *sa fibre générique. Alors* $\kappa(V) \leq \dim W + \kappa(F)$. *En particulier, si* $\kappa(F) = -\infty$ *, alors* $\kappa(V) = -\infty$.

Idée de la démonstration : On peut supposer que $\kappa(V) \geq 0$. On choisit n grand de sorte que les images de V et F par les applications rationnelles correspondant à $H^0(V,\omega_V^n)$ et $H^0(F,\omega_F^n) = H^0(F,\omega_V^n|_F)$ aient la dimension maximale, et H très ample sur W de sorte que $f_*\omega_V^n \otimes H$ soit engendré par ses sections globales. On a donc les injection $H^0(W,H) \hookrightarrow H^0(W,f_*\omega_V^n \otimes H) = H^0(V,\omega_V^n \otimes f^*H)$ et surjection $H^0(V,\omega_V^n \otimes f^*H) \twoheadrightarrow H^0(F,\omega_F^n)$. On conclut en observant que $\kappa(V) \leq \dim \Phi(V)$ et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "\Phi"] \arrow[d, "f"'] & \Phi(V) \subset \mathbb{P}^{\ell'} \arrow[d, dashed] \\ W \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^{\ell} \end{tikzcd}$$

où Φ est l'application rationnelle associée à $\omega_V^n \otimes f^*H$.

§ 3. Sous-variétés et revêtements d'une variété abélienne

THÉORÈME 5 [3].— *Soient* W *une sous-variété de dimension* r *d'une variété abélienne* A *de dimension* n *et* $\sigma : W' \longrightarrow W$ *une désingularisée de* W *. On suppose que* W *engendre* A *en tant que groupe. Alors* $\kappa(W') \geq 0$ *et* $\kappa(W') = 0$ *si et seulement si* $W = A$.

Démonstration.— Soit $\{x_1,\ldots,x_n\}$ un système de coordonnées "globales" de A dont les r premières forment un système de coordonnées locales de W au voisinage d'un point lisse p de W . La r-forme globale $\sigma^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_r)$ est non nulle sur ce voisinage, donc non nulle sur W' et $\kappa(W') \geq 0$. Si $\kappa(W') = 0$, elle est un générateur de $H^0(W',\omega_{W'})$, donc toute r-forme $\sigma^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_r \wedge dx_j)$ est un multiple linéaire de celle-ci, pour $j > r$. Ceci signifie que les équations $\{x_{r+1},\ldots,x_n\}$ de W en p sont linéaires.

COROLLAIRE 6 [3].— *Sous les hypothèses du théorème 5, on peut choisir pour* W' *un fibré étale dont la base* X *vérifie* $\dim X = \kappa(X) = \kappa(W')$ *et dont la fibre* F *est une sous-variété abélienne de* A *. En particulier, si* A *est simple,* W' *est de type général.*

Démonstration.— Soit $f : W' \longrightarrow X$ un espace fibré tel que la fibre F au dessus du complémentaire de la réunion d'une famille dénombrable de sous-variétés strictes de X vérifie $\kappa(F) = 0$. Un tel F est une sous-variété abélienne de A (théorème 5), translatée par un point. Comme il n'y a qu'un ensemble dénombrable de sous-variétés abéliennes de A , les F sont tous translatés d'une même sous-variété abélienne B de A . Or le morphisme $A \longrightarrow A/B$ est un fibré étale. En restreignant ce morphisme à W , en prenant une désingularisée de son image et en prenant pour f la fibration d'Iitaka (théorème 3), on a le corollaire 6.

THÉORÈME 7 [10].— *Soit* $f : W \longrightarrow A$ *un morphisme génériquement fini d'une variété* W *sur une variété abélienne* A *(* f *est surjectif et de fibre générique finie). Alors* $\kappa(W) \geq 0$ *et* $\kappa(W) = 0$ *si et seulement si* W *est birationnelle à une variété abélienne.*

Soient V une variété, $\alpha : V \longrightarrow A(V)$ son application d'Albanese, $V \longrightarrow W_0$ la factorisation de Stein de α et $f : V \longrightarrow W$ un modèle désingularisé de la factorisation de Stein. C'est-à-dire que W est une désingularisée de W_0 , et qu'on a éclaté V pour rendre f partout définie. L'image $\alpha(V)$ de V engendrant $A(V)$ en tant que groupe [3], la factorisation $A(W) \twoheadrightarrow A(V)$ de $W \longrightarrow A(V)$ est surjective. Alors :

THÉORÈME 8.— *Sous les hypothèses précédentes, on a* $\kappa(W) \geq 0$ *et* $\kappa(W) = 0$ *si et seulement si* α *est un espace fibré.*

Démonstration.— C'est un corollaire immédiat du théorème 7. D'une part, $\kappa(W) \geq 0$ car W est génériquement fini sur une sous-variété d'une variété abélienne et la dimension de Kodaira est croissante ([3] théorème 6-10). D'autre part, si $\kappa(W) = 0$, W est birationnelle à $A(W)$, donc à $A(V)$, et α est un espace fibré.

Le point central de la démonstration du théorème 7 est le

Lemme 9 [10].— *Soit* D *un diviseur réduit et irréductible d'une variété abélienne* A *telle qu'une désingularisée* $\sigma : D' \to D$ *soit de type général. Alors* $\dim H^0(D',\Omega^k_{D'}) \geq \binom{n}{k}$ *si* n *est la dimension de* A. *Si* $\dim H^0(D',\Omega^{n-1}_{D'}) = n$, *alors toutes les inégalités précédentes sont des égalités et* $|\chi(\mathcal{O}_{D'})| = 1$.

Idée de la démonstration.— Soit $\{x_1,\dots,x_n\}$ un système de coordonnées "globales" de A telles que les $(n-1)$ premières forment un système de coordonnées locales de D au voisinage d'un point lisse p. Notons f la composée de σ et de l'inclusion dans A, et posons $w_i = f^*(dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n)$. Les w_i sont des formes globales. Si elles étaient linéairement dépendantes, une équation locale x_n dans le voisinage vérifierait $\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \lambda_i + \lambda_n = 0$ pour des λ_i de $\mathbb{C}$ non tous nuls. Le vecteur non nul $((-1)^{n-1-i}\lambda_i,\lambda_n)$ engendrerait alors un sous-groupe à un paramètre (λ) stabilisant D, on aurait $(\lambda) + D \subseteq D$, et D ne serait pas de type général (corollaire 6). Donc $\dim H^0(D',\Omega^{n-1}_{D'}) \geq n$, et les k-formes globales $f^*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$ sont elles aussi linéairement indépendantes. D'autre part les w_i sont non seulement linéairement indépendantes, mais elles le sont *algébriquement*. En d'autres termes, l'image E de D' par l'application rationnelle $h : D' \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ associée aux w_i est surjective. Supposons que E soit contenu dans un diviseur F que l'on peut supposer lisse au voisinage de l'image q de p. L'équation locale de F au voisinage de q est alors, après éventuel changement de coordonnées $\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$ dans D au voisinage de p, du type $\frac{\partial x_n}{\partial x_1} = g(\frac{\partial x_n}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}})$, où g est holomorphe de valuation ≥ 2. En particulier $\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial x_n}{\partial x_i}) = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ sur $h^{-1}(q)$ et $h^{-1}(q)$ est stable par une droite "parallèle" à $\{x_2 = \dots = x_n = 0\}$. On conclut comme plus haut.

Soit alors une k-forme w. Elle est au voisinage de p combinaison des k-formes $f^*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$ à coefficients holomorphes dépendant des variables $\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$. En la multipliant par une $(n-1-k)$-forme du type $f^*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-k-1}})$, on remarque que les coefficients holomorphes sont, à constante près, des combinaisons linéaires des $\frac{\partial x_n}{\partial x_i}$. Le choix de $(n-1-k)$-formes où apparaît dx_n et l'indépendance algébrique des $\frac{\partial x_n}{\partial x_i}$ permettent de conclure.

Idée de la démonstration du théorème 7.— Il s'agit de généraliser le théorème 5. Pour plus de simplicité, on suppose que A est une variété abélienne simple. Sinon, il faut combiner ce qui suit avec la fibration de Ueno (corollaire 6).

Notons D le discriminant dans A de la factorisation de Stein de f, D_i

ses composantes irréductibles, D'_i des désingularisées des D_i et D_{ij} les inverses stricts des D_i dans W sur lesquels f ramifie vraiment. Quitte à changer de modèle pour W , on peut supposer que le diviseur ΣD_{ij} est lisse. On suppose $\kappa(W) = 0$. L'image inverse par f de la forme globale de degré maximum de A étant non nulle sur l'ouvert sur lequel f est étale, c'est une section globale de ω_W . Donc $H^0(W,\omega_W) = \mathbb{C}$, et des inclusions $\omega_W \hookrightarrow \omega_W(\Sigma D_{ij}) \hookrightarrow \omega_W^2$ on tire $H^0(W,\omega_W(\Sigma D_{ij})) = \mathbb{C}$. De la suite exacte longue associée à
$0 \longrightarrow \omega_W \hookrightarrow \omega_W(\Sigma D_{ij}) \twoheadrightarrow \oplus\, \omega_{D_{ij}} \longrightarrow 0$ on tire
$\dim \oplus H^0(D_{ij},\omega_{D_{ij}}) \le \dim H^1(W,\omega_W) = \dim H^0(W,\Omega_W^{n-1})$ et a fortiori
$\dim \oplus H^0(D'_i,\omega_{D'_i}) \le \dim H^0(W,\Omega_W^{n-1})$, où n est la dimension de A . Or
$\dim H^0(W,\Omega_W^{n-1}) \le n$. En effet les images inverses w_i par f des n $(n-1)$-formes globales de A sont telles que toute autre $(n-1)$-forme w de W s'annule modulo une combinaison linéaire des w_i sur le lieu étale de f , puisque $H^0(W,\omega_W) = \mathbb{C}$. Cela étant, comme sous-variété de A , D_i vérifie $\dim H^0(D'_i,\omega_{D'_i}) \ge 1$ (théorème 5), et comme sous-variété d'une variété abélienne simple, D_i vérifie que D'_i est de type général (corollaire 6) et $\dim H^0(D'_i,\omega_{D'_i}) \ge n$ (lemme 9). Il n'y a donc qu'un seul $D_i = D$ qui vérifie $|\chi(\mathcal{O}_{D'})| = 1$ (lemme 9). En remplaçant A par un revêtement étale d'un degré $d > 1$, la caractéristique d'Euler-Poincaré du nouveau diviseur de ramification est multipliée par d . Donc la factorisation de Stein de f est non ramifiée sur W et W est birationnelle à $A(W)$.

COROLLAIRE 10 [13].— *Soit* $f : W \longrightarrow A$ *un morphisme génériquement fini sur son image* $f(W)$ *d'une variété* W *dans une variété abélienne* A . *Alors il existe un revêtement étale* $W' \longrightarrow W$ *tel que* W' *soit birationnelle à* $B \times X$, *où* B *est une variété abélienne et* X *une variété vérifiant* $\dim X = \kappa(X) = \kappa(W)$.

<u>Idée de la démonstration</u>.— D'après le théorème 7 et la démonstration du corollaire 6, la fibration d'Iitaka (théorème 3) $f : W \longrightarrow X'$ a une fibre F birationnelle à $A(F)$, variété abélienne constante car isogène à, et d'un degré fixé sur, son image B_0 constante dans A , et $f(W)$ est un fibré étale sur son image dans A/B_0. Soit $W \longrightarrow Y$ la factorisation de Stein (non lisse) de $W \longrightarrow f(W) \longrightarrow A/B_0$ et $W_1 \longrightarrow Y$ le fibré étale induit. Il existe donc un revêtement $\tau : X_1 \longrightarrow Y$ fini qui trivialise W_1 i.e. tel que $W_1 \times_Y X_1 \simeq B_0 \times X_1$, et qui trivialise birationnellement W i.e. tel que $W \times_Y X_1 \sim A(F) \times X_1$. On peut supposer que τ se factorise sur un revêtement étale de Y qui trivialise W_1 et que τ est galoisien de groupe H . Comme $A(F) \times X_1$ est fini sur $B_0 \times X_1$, le morphisme $W \times_Y X_1 \longrightarrow B_0 \times_Y X_1$ se factorise sur $A(F) \times X_1$. Notons G le groupe de Galois de $A(F) \times X_1$ sur $B_0 \times X_1$, K celui de $A(F) \times X_1$ sur W_1 et H' celui de $W \times_Y X_1$ sur W . Comme $A(F)$ est étale sur B_0, le groupe H_1 engendré par les sous-groupes de ramification de H' s'injecte dans H par la suite exacte $1 \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow H \longrightarrow 1$.

Quitte à remplacer $A(F) \times X_1$ par $A(F) \times X_1/H_1 = A(F) \times X_2$ et $W \times_Y X_1$ par $W' = W \times_Y X_1/H_1$ et à désingulariser X_2 en X , on a le corollaire 10.

§ 4. Additivité des dimensions de Kodaira : C_{nm}

Reprenons le diagramme du théorème 8 :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & \alpha(V) \subset A(V) \\ W \arrow[ur, "\tau"] & \end{tikzcd}$$

où τ est génériquement fini sur $\alpha(V)$, où α est l'application d'Albanese de V et où f est un espace fibré de fibre générique F . Du point de vue de la théorie de la classification, on a besoin de connaître le comportement relatif des dimensions de Kodaira de V , W et F . Ce qui a conduit Iitaka [1]-[2] et Ueno [3] à formuler la

CONJECTURE C_{nm} .— *Soit* $f : V \to W$ *un espace fibré de fibre générique* F *, tel que* $\dim V = n$ *et* $\dim W = m$ *. Alors*

$$\kappa(V) \geq \kappa(W) + \kappa(F) .$$

Une étude plus fine de l'application d'Albanese exige des renseignements plus précis sur les fibres de f , renseignements qui s'expriment [11] sous la forme de la

CONJECTURE C^+_{nm} .— C_{nm} *est vrai et de plus si* $\kappa(W) \geq 0$ *et* $\kappa(F) \geq 0$ *, alors* $\kappa(V) \geq \operatorname{Var} f$.

Définition.— Sous les mêmes hypothèses, la *variation de* f , notée $\operatorname{Var} f$, est définie comme le plus petit entier $k \geq 0$ tel qu'il existe un morphisme surjectif génériquement fini $W_2 \to W$, un morphisme surjectif $W_2 \to W_1$ avec $\dim W_1 = k$ et un espace fibré $V_1 \to W_1$ tels que $V_1 \times_{W_1} W_2$ soit birationnel à $V \times_W W_2$. Si les fibres lisses de f admettent un schéma de modules grossier M , alors f induit une application rationnelle $\Psi : W \dashrightarrow M$, et l'on a $\operatorname{Var} f = \dim \Psi(W)$.

Une autre formulation de C_{nm} (resp. C^+_{nm}) précise l'objet d'étude du problème :

CONJECTURES C'_{nm} et $C^{+'}_{nm}$ [11].— *Soit* $f : V \to W$ *un espace fibré de fibre générique* F *, tel que* $\dim V = n$ *et* $\dim W = m$ *. Alors* $\kappa(V/W) \geq \kappa(F)$ *(conjecture* C'_{nm} *). Si de plus* $\kappa(F) \geq 0$ *, alors* $\kappa(V/W) \geq \max\{\kappa(F) , \operatorname{Var} f\}$ *(conjecture* $C^{+'}_{nm}$ *).*

Lemme 11 [11].— C_{nm} *(resp.* C^+_{nm} *) est vrai si* $C'_{n-r,m-r}$ *(resp.* $C^{+'}_{n-r,m-r}$ *) est vrai pour tout* r *tel que* $0 \leq r < m$.

Démonstration.— Si $\kappa(V/W) = -\infty$, alors $\kappa(F) = -\infty$ et C_{nm} (resp. C^+_{nm}) est vrai. Sinon $\omega^a_{V/W}$ a une section pour a grand et on prend a tel que les fibrations d'Iitaka (théorème 3) de V et W soient données par ce a . On a alors un diagramme commutatif d'applications rationnelles

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f"] & V_1 \arrow[d, dashed] \subset \mathbb{P}_1 \arrow[d, dashed, "p"] \\ W \arrow[r, dashed] & W_1 \subset \mathbb{P}_2 \end{tikzcd}$$

où p est la projection sur les sections de ω_W^a données par l'inclusion $f^*\omega_W^a \hookrightarrow \omega_V^a$. Notons G et H les fibres de $V \dashrightarrow V_1$ et $W \dashrightarrow W_1$, qui vérifient $\kappa(G) = \kappa(H) = 0$. On a (théorème 4) $\kappa(f^{-1}(H)) \leq \kappa(G) + \dim p^{-1}(x))$ pour un point générique x de W_1 , donc

$$\kappa(V) = \dim V_1 = \dim p^{-1}(x) + (\dim W_1 = \kappa(W)) \geq \kappa(f^{-1}(H)) + \kappa(W) .$$

En appliquant C' à $f^{-1}(H) \longrightarrow G$ et en remarquant que $\kappa(f^{-1}(H)) \geq \kappa(f^{-1}(H)/G)$, on trouve C_{nm} . Si $C_{nm}^{+'}$ est vrai, il suffit de l'appliquer directement à f .

Résultats 12.— Sont vrais

1)	$C_{n,n-1}^{+'}$	[5]-[11]
2)	$C_{3,1}^{+'}$	[11]
3)	C_{nm} si $\dim W = \kappa(W)$	[13]-[15]
4)	$C_{n,1}$ si $n \leq 4$	[7]-[14]
5)	C'_{nm} si F est une variété abélienne	[9]

Remarque.— Le faisceau $f_*\omega_{V/W}^a$ est étudié dans [14], particulièrement dans le cas où la base W est une courbe elliptique. Bien que cette étude fournisse des renseignements plus précis que $C_{4,1}$, elle ne permet pas cependant de conclure $C_{n,1}$ en général.

§ 5. Démonstration des théorèmes 1 et 2

Point 1 [11].— *Soit* V *une variété de dimension* 3 *telle que* $\kappa(V) = -\infty$. *Alors* V *vérifie le théorème* 1.

Démonstration.— La variété V ne peut être génériquement finie sur $A(V)$, car $\kappa(V) = -\infty$. L'espace fibré $f : V \longrightarrow W$ du théorème 8 est donc de dimension relative 1 ou 2 et $\kappa(W) \geq 0$. De $C_{3,2}$ et $C_{3,1}$ on tire que $\kappa(F) = -\infty$. La propriété universelle de la variété d'Albanese implique que $A(V)$ et $A(W)$ ont même dimension.

Point 2 [11]-[13].— *Soit* V *une variété de dimension* n , *telle que* $\kappa(V) = 0$. *Alors* V *vérifie le théorème* 2 (i)-(ii).

Démonstration.— Supposons que $\kappa(W) > 0$. Alors (corollaire 10), un revêtement étale W' de W admet un morphisme surjectif sur une variété de type général X , donc $V \times_{W'} W' = V'$ aussi. Notons $g : V' \longrightarrow X$ ce morphisme, qui est un espace fibré. De C_{nm} lorsque la base X vérifie $\dim X = \kappa(X)$ et de $\kappa(V) = \kappa(V')$, on tire que $\kappa(g^{-1}(x)) = -\infty$, pour un point générique x de X . Mais l'inégalité d'Iitaka (théorème 4) montre que c'est impossible. Donc $\kappa(W) = 0$. On applique le théorème 8.

Remarque [11].— Si $\dim V = 3$, de $C_{3,2}$, $C_{3,1}$ et du théorème 8, on tire directement (sans utiliser le corollaire 10) que α est un espace fibré avec l'information supplémentaire que $\kappa(F) = 0$.

Point 3 [11] .— Il reste à démontrer sous les hypothèses du point 2 que α est un *fibré étale* si $\dim V = 3$ ou si $q(V) = \dim V - 1$ (théorème 2 (iii)). De $C^+_{3,1}$ et $C^+_{n,n-1}$ on tire que $\mathrm{Var}\ \alpha = 0$, c'est-à-dire que toutes les fibres lisses de α sont isomorphes sur un ouvert de Zariski. Il existe donc un morphisme génériquement fini $\tau : W' \longrightarrow A(V)$, où W' est lisse, tel que $V \times_{A(V)} W'$ soit birationnel à $F \times W'$. On peut supposer que τ est galoisien de groupe G et que G est inclus dans $\mathrm{Aut}(F \times W')$. En comparant les ramifications de $F \times W'$ sur $F \times W'/G$ et de W' sur $A(V)$ on trouve que les sous-groupes de ramification d'un diviseur D dans W' et du diviseur $D \times F$ dans $W' \times F$ sont les mêmes. Soit I le sous-groupe de G engendré par ces groupes de ramification. Alors $F \times W'/I$ réalise une trivialisation de α après revêtement étale.

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de C_{nm} .

§ 6. Quelques constructions et définitions

Pour évaluer le $\kappa(V/W)$ d'un espace fibré $f : V \longrightarrow W$, on peut toujours remplacer V par un modèle birationnel V' , car pour tout morphisme birationnel $\tau : V' \longrightarrow V$ on a $\tau_* \omega^a_{V'/W} = \omega^a_{V/W}$. On peut toujours aussi remplacer W par un modèle birationnel W' , car pour tout morphisme birationnel $\tau : W' \longrightarrow W$, on peut supposer que f se factorise en $f' : V \longrightarrow W'$ et on a l'injection $f'_* \omega^a_{V/W'} \hookrightarrow f_* \omega^a_{V/W}$ et donc $\kappa(V/W') \leq \kappa(V/W)$. On supposera donc toujours que *le complémentaire d'un ouvert* W_o *dans* W *contenu dans l'ouvert de lissité de* f *est un diviseur à croisements normaux* D *, de même que son image inverse* $f^{-1}(D)$, *complémentaire de l'ouvert lisse* V_o *tel que* $V_o = f^{-1}(W_o)$.

Soit $\tau : W' \longrightarrow W$ un revêtement entre deux variétés. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, "d"] \arrow[drr, "f'"'] & V_1 \arrow[r, "n"] \arrow[dr, "f_1"] & V_2 \arrow[r, "\tau_2"] \arrow[d, "f_2"] & V \arrow[d] \\
 & & W' \arrow[r, "\tau"] & W
\end{tikzcd}$$

où $V_2 = V \times_W W'$, n est la normalisation de V_2 , d est une désingularisée de V_1 , $\tau_1 = \tau_2 \circ n$, $\tau' = \tau_1 \circ d$, et où les autres morphismes sont les morphismes évidents. On peut supposer que le discriminant dans V de τ_1 est un diviseur à croisements normaux.

Lemme 13.— *Sous les hypothèses précédentes, on a les inclusions*

$$\omega_{V_1/W'} \hookrightarrow \tau_1^* \omega_{V/W}$$
$$f'_* \omega^a_{V'/W'} \hookrightarrow \tau^* f_* \omega^a_{V/W} \qquad \text{pour } a \geq 0$$

En particulier $\kappa(V/W) \geq \kappa(V'/W')$.

Démonstration.— Le revêtement τ_1 ramifiant sur un diviseur à croisements normaux, V_1 n'a que des singularités quotient [30], donc rationnelles et de Cohen-Macaulay. En particulier V_1 admet un faisceau dualisant ω_{V_1}, qui vérifie $d_*\omega_{V'} = \omega_{V_1}$. Si on définit ω_{V_2} par $\omega_{V_2} = \tau_2^!\omega_V$, c'est-à-dire que $\tau_{2*}\omega_{V_2} = \underline{\mathrm{Hom}}_V(\tau_{2*}\mathcal{O}_{V_2},\omega_V)$, alors $\omega_{V_2} \otimes \tau_2^*\omega_V^{-1} = f_2^*\omega_{W'/W}$ puisque τ est plat, donc $\omega_{V_2/W'} = \tau_2^*\omega_{V/W}$. Le quotient de $n_*\mathcal{O}_{V_1}$ par $\mathcal{O}_{V_2}$ étant de torsion, on a une injection $(n_*\omega_{V_1/W'} = \underline{\mathrm{Hom}}_{V_2}(n_*\mathcal{O}_{V_1},\omega_{V_2/W'})) \hookrightarrow \omega_{V_2/W'}$ et donc un morphisme $n^*n_*\omega_{V_1/W'} \longrightarrow \tau_1^*\omega_{V/W}$. Or $n^*n_*\omega_{V_1/W'}$ a pour quotient sans torsion $\omega_{V_1/W'}$ et $\tau_1^*\omega_{V/W}$ est inversible. Cela donne la première inclusion. D'autre part, $d_*\omega_{V'/W'} = \omega_{V_1/W'}$. Il existe donc un morphisme $d^*\omega^a_{V_1/W'} \longrightarrow \omega^a_{V'/W'}$ qui est un isomorphisme en dehors d'un diviseur E contenu dans le lieu exceptionnel de d. On a donc une injection $\omega^a_{V'/W'} \hookrightarrow \tau'^*\omega^a_{V/W} \otimes \mathcal{O}(sE)$ pour un multiple sE de E. Ce qui montre que $d_*\omega^a_{V'/W'}$ est inclus dans $\tau_1^*\omega^{a-1}_{V/W} \otimes d_*\omega_{V'/W'}(sE) = \tau_1^*\omega^{a-1}_{V/W} \otimes \omega_{V_1/W'} = n^!\tau_2^*\omega^a_{V/W}$. Ce qui donne comme précédemment, en appliquant n_*, l'inclusion $n_*d_*\omega^a_{V'/W'} \hookrightarrow \tau_2^*\omega^a_{V/W}$. Or τ étant plat, $f_{2*}\tau_2^*\omega^a_{V/W} = \tau^*f_*\omega^a_{V/W}$. En appliquant f_{2*} à l'inégalité précédente, on trouve la deuxième inclusion. La dernière provient de la trace $\tau_*\mathcal{O}_{W'} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_W$.

Lemme 14 [13]-[19].— *Soient* W *une variété,* $D = \sum_{i=1}^{r} D_i$ *un diviseur à croisements normaux,* $\{m_1,\dots,m_r\}$ *des nombres positifs. Il existe alors une variété* W' *et un revêtement plat* $\tau : W' \longrightarrow W$ *tel que* $D' = (\tau^*D)_{red}$ *soit un diviseur à croisements normaux,* m_i *divise* m_{ij} *où* m_{ij} *est défini par* $\tau^*D_i = \Sigma\, m_{ij}D_{ij}$, τ^*D_i *soit réduit et lisse si* $m_i = 1$.

Remarque.— La construction se fait par récurrence, composante de D par composante. On extrait la m_i-ième racine d'une section d'un faisceau H^{m_i} qui a pour diviseur correspondant la réunion d'un diviseur très ample et de la composante D_i.

DÉFINITION 15.— Un faisceau localement libre F sur une variété W est dit *semi-positif* (noté s.p) si pour tout morphisme $\tau : C \longrightarrow W$ d'une courbe lisse C dans W et pour tout quotient inversible L de τ^*F, L a un degré positif ou nul sur C. Un faisceau cohérent sans torsion F sur W est dit *faiblement positif* (noté f.p) si pour tout faisceau inversible ample H et tout $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que $S^{ba}(F) \otimes H^b$ soit engendré sur un ouvert par ses sections globales, c'est-à-dire que l'application naturelle

$$(*) \qquad H^0(W,S^{ba}(F) \otimes H^b) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{O}_W \longrightarrow S^{ba}(F) \otimes H^b$$

soit surjective sur un ouvert.

Remarques.— 1) Le produit symétrique $S^\ell(F)$ est défini ici comme l'extension du produit symétrique sur l'ouvert sur lequel F est localement libre. En particulier l'injection de F dans $S^1(F)$ n'est pas forcément surjective.

2) Si F est localement libre, F est s.p si et seulement si F est f.p et

et l'application (*) est surjective sur W .

3) Si W est une courbe et si F est localement libre, F est s.p si et seulement si F est f.p.

4) Soient $\tau : W' \longrightarrow W$ un morphisme birationnel entre deux variétés W et W' , $F \hookrightarrow G$ une inclusion de deux faisceaux cohérents sans torsion sur W' égaux sur un ouvert ; alors si F est f.p, $\tau_* G$ est f.p.

5) Soient $\tau : W' \longrightarrow W$ un revêtement plat entre deux variétés W et W' , F un faisceau cohérent sans torsion ; alors si $\tau^* F$ est f.p, F est f.p.

PROPOSITION 16 [13]-[15].— *Pour démontrer* C_{nm} *lorsque la base* W *est de type général, il suffit de montrer que pour un* $\ell > 0$ *tel que* $f_* \omega^{\ell}_{V/W} \neq 0$ *, le faisceau* $f_* \omega^{\ell}_{V/W}$ *est* f.p.

Démonstration.— Si pour tout $\ell > 0$, $f_* \omega^{\ell}_{V/W} = 0$, alors $\kappa(F) = -\infty$ et C_{nm} est trivial. Soit donc un ℓ comme dans la proposition. Pour un faisceau très ample inversible H fixé, il existe $a > 0$ tel que H^2 soit contenu dans $\omega^{a\ell}_W$. En effet le nombre des sections de $\omega^{a\ell}_W$ restreint au diviseur de H^2 croît au plus comme $(a\ell)^{m-1}$, et celui de $\omega^{a\ell}_W$ comme $(a\ell)^m$. Soit alors $b > 0$ tel que $S^{ba}(f_* \omega^{\ell}_{V/W}) \otimes H^b$ soit engendré sur un ouvert par ses sections globales. Supposons que $f_* \omega^{\ell}_{V/W}$ soit localement libre. L'application naturelle $\pi : S^{ba}(f_* \omega^{\ell}_{V/W}) \otimes H^{b} \longrightarrow f_* \omega^{\ell ba}_{V/W} \otimes H^b$ est non triviale, donc le deuxième faisceau a une section globale qui fournit une inclusion de $f^* H^b$ dans $\omega^{\ell ba}_{V/W} \otimes f^* H^{2b}$ et par suite une inclusion de $f^* H^b$ dans $\omega^{\ell ba}_V$. On a donc un diagramme commutatif d'applications rationnelles

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{P}_1 \arrow[d, dashed, "p"] \\ W \arrow[r] & \mathbb{P}_2 \end{tikzcd}$$

où p est la projection sur les sections de $f^* H^b$, tel que la fibre générique G de g vérifie $\kappa(G) = 0$ (théorème 3), et tel que (théorème 4) $\kappa(F) \leq \dim g(F)$. Donc $\kappa(F) \leq \dim g(V) - \dim W = \kappa(V) - \dim W$. Si $f_* \omega^{\ell}_{V/W}$ n'est pas localement libre, l'application π n'est pas définie. On prépare dans ce cas $f : V \longrightarrow W$ de telle sorte qu'il existe un morphisme birationnel $\tau : V \longrightarrow V_0$ tel que tous les diviseurs B de V vérifiant $\operatorname{codim} f(B) \geq 2$ soient dans le lieu exceptionnel de τ [27]. L'application π est alors définie si l'on tensorise $\omega^{\ell ba}_{V/W}$ par un tel diviseur B , et il suffit alors de remarquer que $\kappa(\omega_V(B)) = \kappa(V)$.

Remarque.— Si l'on suppose que $\kappa(V) \geq 0$, on peut toujours trouver un revêtement lisse V' de V tel que $\kappa(V') = \kappa(V)$ et $H^0(V', \omega_{V'}) \neq 0$. Il suffit dans ce cas de montrer la proposition 16 pour $\ell = 1$ [13].

§ 7. Variation de structures de Hodge ou positivité de $f_*\omega^{\ell}_{V/W}$

Reprenons notre espace fibré $f : V \longrightarrow W$ tel que $\dim V = n$ et $\dim W = m$ avec les hypothèses du § 6. Posons $D = \bigcup_1^r D_i$, $f_o = f|_{V_o}$, notons $H_o = (R^{n-m} f_{o*}\mathbb{C})_{prim} \otimes \mathcal{O}_{W_o}$ l'espace total de la variation de la structure de Hodge polarisée, $F_o = f_{o*}\omega_{V_o/W_o}$ le $(n-m)$-ième terme de la filtration de Hodge $\{F^p\}_{0\leq p\leq n-m}$ de H_o. *Supposons de plus que les monodromies locales* γ_i *autour des* D_i *de* H_o *soient unipotentes*. Alors une construction standard (voir par exemple [29] page 234) affirme l'existence d'une extension localement libre H de H_o qui correspond aux sections s de H_o qui s'écrivent $s = \Sigma f_i s_i$ où les f_i sont des fonctions holomorphes multivaluées sur W_o, ayant au plus des pôles logarithmiques le long de D et les s_i des sections linéairement indépendantes multivaluées, plates par rapport à la connexion de Gauss-Manin, de H_o. Le "nilpotent orbit theorem" de W. Schmid [29] affirme l'existence d'une extension de la filtration F^p donnée par les mêmes conditions. Posons $F = F^{n-m}H$.

THÉORÈME 17 [6]-[13].— *Sous les hypothèses précédentes,* $f_*\omega_{V/W}$ *est localement libre et* s.p.

Démonstration.— Les deux faisceaux F et $f_*\omega_{V/W}$ sont des extensions de F_o, qui sont donnés par les mêmes conditions [28]. Ils sont donc égaux et $f_*\omega_{V/W}$ est localement libre. Soit $\tau : C \longrightarrow W$ un morphisme d'une courbe lisse C dans W. Supposons que $C_o = \tau^{-1}(W_o)$ soit non vide, et notons L un quotient inversible de τ^*F. La polarisation de H_o définit une métrique hermitienne h sur F_o, donc des métriques hermitiennes h' et h_L sur τ^*F_o et $L|_{C_o}$ dont la courbure Θ_L est positive [22]. Les singularités de h_L le long de $C - C_o$ sont logarithmiques.

Lemme 18 [6].— *On a* $\deg_C L = \frac{i}{2\pi}\int_{C_o} \Theta_L \geq 0$.

Idée de la démonstration.— Pour un prolongement $\mathcal{C}^\infty$, Θ de Θ_L à C, le degré de L sur C est $\deg_C L = \frac{i}{2\pi}\int_C \Theta$. On utilise le théorème de Stokes pour ramener le calcul des intégrales autour des points de $C - C_o$ à celui de $\partial \log h_L(s,s)$ sur un cercle entourant un point de $C - C_o$, où s est une section locale de L, et on conclut en utilisant que h_L a au plus des pôles logarithmiques.

Remarque.— Si de plus l'application de C_o dans le domaine des périodes est non triviale, et que F est inversible, alors $\deg_C F$ est *strictement positif* ([22], corollary 7-10).

Soient U un voisinage ouvert de D_1, $D_1^o = D_1 - \bigcup_2^r D_i$, $U^o = U - \bigcup_2^r D_i$. Sur $H|_{U-D}$, la monodromie γ_1 est unipotente et définit une unique filtration dite par le poids $\{W_\ell\}_{0\leq \ell\leq 2(n-m)}$ vérifiant que $NW_\ell \subset W_{\ell-2}$ et que $\left(N^\ell : Gr^W_{(n-m)+\ell}(H|_{U-D}) \longrightarrow Gr^W_{(n-m)-\ell}(H|_{U-D})\right)$ est un isomorphisme pour $N = \log \gamma_1$. Cette filtration W_ℓ admet une extension à $H|_{U^o}$ de sorte que les filtrations

W_ℓ et F^p définissent une variation de structures de Hodge mixtes sur $H_{|D_1^o}$, qui sont polarisées sur leurs parties primitives,
$Gr^W_\ell(H_{|D_1^o})_{prim} = \mathrm{Ker}\left(N^{\ell-(n-m)+1} : Gr^W_\ell(H_{|D_1^o}) \longrightarrow Gr^W_{2(n-m)-\ell-2}(H_{|D_1^o})\right)$ pour $\ell \geq (n-m)$ et 0 sinon, par la polarisation sur $W_\ell(H_{|U-D})$ qui en définit une sur $Gr^W_\ell(H_{|U^o})$. Les filtrations W_ℓ , F^p et la polarisation sur $H_{|D_1^o}$ admettent des extensions à $H_{|D_1}$ qui vérifient, de même que plus haut $Gr^W_\ell(F_{|D_1}) = F^{n-m}(Gr^W_\ell H_{|D_1})_{prim}$. Supposons maintenant que $\tau(C) \cap W_0 = \emptyset$ et que $\tau^{-1}(D_1^o) \neq \emptyset$. Il existe un ℓ tel que le morphisme $\tau^* Gr^W_\ell(F_{|D_1}) \longrightarrow L$ soit défini et non nul. Notons L' le sous-faisceau inversible de L ainsi construit. Le même argument que précédemment appliqué à $Gr^W_\ell(F_{|D_1})$ et à $\tau^{-1}(D_1^o)$ dit que $\deg_C L'$ est positif (ou nul), donc a fortiori $\deg_C L$. On termine la démonstration par récurrence...

COROLLAIRE 18.— *Pour tout espace fibré* $f : V \longrightarrow W$, $f_*\omega_{V/W}$ *est* f.p.

Démonstration.— On combine le lemme 14 qui rend unipotentes les monodromies locales quasi-unipotentes de f , le lemme 13, la définition 15 remarque 5, le théorème 17.

Lemme 19 [15].— *Soit* H *un faisceau inversible ample sur* W *tel que pour un* $a > 0$, $S^a(f_*\omega^\ell_{V/W} \otimes H^\ell)$ *soit engendré sur un ouvert par ses sections globales. Alors* $f_*\omega^\ell_{V/W} \otimes H^{\ell-1}$ *est* f.p.

Idée de la démonstration.— Par extraction de racine de sections bien choisies de certains faisceaux ([11], § 5), on construit un espace fibré $g : T \longrightarrow W$ équipé d'un morphisme $g_*\omega_{T/W} \longrightarrow S^1 f_*\omega^\ell_{V/W} \otimes H^{\ell-1}$ surjectif sur un ouvert. Pour cela, on prend une section générale de l'image du morphisme $S^a(f_*\omega^\ell_{V/W} \otimes H^\ell) \longrightarrow S^1(f_*\omega^{a\ell}_{V/W}) \otimes H^{a\ell}$, dont on peut supposer (§ 6) que le diviseur correspondant $D + \Sigma\, c_i F_i$ dans V est à croisements normaux. Si $a\ell$ divise tous les c_i , il suffit de prendre $T = \mathrm{Spec}_V\left(\bigoplus_0^{a\ell-1} L^{-i}\right)$ où $L^{a\ell} = \mathcal{O}_V(D)$, qui est lisse. Le morphisme cherché est alors la projection de $g_*\omega_{T/W} = f_*\left(\bigoplus_0^{a\ell-1} L^i \otimes \omega_{V/W}\right)$ sur le facteur $f_*(\omega_{V/W} \otimes L^{\ell-1}) = f_*(\omega^\ell_{V/W} \otimes H^{\ell-1})$. Sinon, on prend un revêtement intermédiaire $\tau : S \longrightarrow V$ construit comme dans le lemme 14 tel que $\tau^* F_i = a\ell\, \Sigma\, c'_{ij} F_{ij}$, et on utilise que $\omega_{V/W}$ est un facteur direct de $\tau_*\omega_{S/W}$.

THÉORÈME 20 [15].— *Pour tout espace fibré* $f : V \longrightarrow W$ *et tout* $\ell > 0$, *le faisceau* $f_*\omega^\ell_{V/W}$ *est* f.p.

Démonstration.— Soit H un faisceau ample sur W . Il existe alors s tel que H^s vérifie les conditions du lemme 19. Soit r le plus petit s tel que $f_*\omega^\ell_{V/W} \otimes H^{s\ell-1}$ soit f.p. Par définition, il existe $a > 0$ tel que $S^a(f_*\omega^\ell_{V/W} \otimes H^{r\ell-1}) \otimes H^a$ soit engendré sur un ouvert par ses sections globales. Donc (lemme 19) $f_*\omega^\ell_{V/W} \otimes H^{r(\ell-1)}$ est f.p et $r(\ell-1) > (r-1)\ell - 1$, ou encore $r \leq \ell$. Ainsi, pour tout espace fibré $f : V \longrightarrow W$ et tout H inversible et ample sur W , $f_*\omega^\ell_{V/W} \otimes H^{\ell^2-\ell}$ est f.p. Prenons un $a > 0$ et un revêtement lisse

$\tau : W' \longrightarrow W$ tel que l'on ait $\tau^*H = H'^d$ avec H' ample et $d = 2a(\ell^2 - \ell) + 1$ et dont le discriminant dans W soit à croisements normaux et rencontre transversalement le lieu non lisse de f (lemme 14). Soit $f' : V' \longrightarrow W'$ la famille obtenue comme dans le lemme 13. Alors $f'_*\omega^{\ell}_{V'/W'} \otimes H'^{\ell^2-\ell}$ est f.p, donc (lemme 13 et définition 15 remarque 4), $\tau^*f_*\omega^{\ell}_{V/W} \otimes H'^{\ell^2-\ell}$ est f.p. Il existe donc $b > 0$ tel que $S^{2ba}(\tau^*f_*\omega^{\ell}_{V/W} \otimes H'^{\ell^2-\ell}) \otimes H'^b = \tau^*(S^{2ba}(f_*\omega^{\ell}_{V/W}) \otimes H^b)$ soit engendré sur un ouvert pas ses sections globales. Si l'on choisit b grand de telle sorte que $\tau_*\mathcal{O}_{W'} \otimes H^b$ soit engendré par ses sections globales, alors $S^{2ba}(f_*\omega^{\ell}_{V/W}) \otimes H^{2b}$ est engendré sur un ouvert par ses sections globales. Donc $f_*\omega^{\ell}_{V/W}$ est f.p. *Ainsi* C_{nm} *est vrai si la base* W *est de type général.*

§ 8. Méthodes algébriques ou quelques cas de $C^{+'}_{nm}$

On se place dans le cas où notre espace fibré $f : V \longrightarrow W$ est une famille de surfaces de type général ou de courbes de genre ≥ 2 ($\kappa(F) = \dim F$). On suppose de plus que *pour tout* $\ell > 0$, $f_*\omega^{\ell}_{V/W}$ *est localement libre.* On pose $F_\ell = f_*\omega^{\ell}_{V/W}$, on note $r(\ell)$ le rang de F_ℓ , et on pose $f_\ell = \det F_\ell = \bigwedge^{r(\ell)} F_\ell$. Alors

THÉORÈME 21 [11].— *Sous les hypothèses précédentes, on a*
$\kappa(W, f^{r(a)}_{ab} \otimes f_a^{-b.r(ab)}) \geq \mathrm{Var}\, f$ *pour* a *et* b *grands.*

Démonstration.— Pour a grand, les sections de ω^a_F définissent un morphisme birationnel de F sur F' dans $\mathbb{P}^N$, où $N = \dim H^0(F,\omega^a_F) - 1 = r(a) - 1$. Le point du schéma de Hilbert correspondant à $F' \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ est stable au sens de Mumford [24], et il existe un schéma de modules grossier M naturellement plongé dans un projectif $\mathbb{P}$ par $i : M \hookrightarrow \mathbb{P}$, équipé d'une application rationnelle $\Psi : W \dashrightarrow M$. On veut alors comparer le faisceau du théorème 21 et $(i \circ \Psi)^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. Pour b grand, l'application $S^b(F_a) \longrightarrow F_{ab}$ est surjective sur un ouvert de même que l'application $\bigwedge^{r(ab)}(S^b(F_a)) \longrightarrow f_{ab}$. Notons L l'image de cette dernière, qui est de rang 1 . Pour une trivialisation $t : F_{a|U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U^{r(a)}$ sur un ouvert U , de F_a , on a un morphisme $g_t : \bigwedge^{r(ab)}(S^b(\mathbb{C}^{r(a)})) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U \longrightarrow L_{|U}$, donc un morphisme $g^*_t : U \longrightarrow \mathbb{P}' = \mathbb{P}\left(\bigwedge^{r(ab)}(S^b(\mathbb{C}^{r(a)}))\right)$, sur lequel $\mathbb{P}'$ opère $SL(\mathbb{C}^{r(a)})$. Un point $g^*_t(u)$, si la fibre $f^{-1}(u)$ est lisse, est le point correspondant du schéma de Hilbert, qui est stable [24]-[21]. Il existe donc un polynôme homogène sur $\mathbb{P}'$ invariant par $SL(\mathbb{C}^{r(a)})$, qui n'annule pas $g^*_t(u)$, et de tels polynômes homogènes séparent les $SL(\mathbb{C}^{r(a)})$-orbites différentes. Notons P un tel polynôme, p son degré. Il induit une section P_t de $L^p{}_{|U}$ par g_t . Une autre trivialisation t' de $F_{a|U}$ induit une section $P_{t'}$ de $L^p{}_{|U}$ qui diffère de P_t par une puissance du déterminant d'un élément β de $GL(\mathbb{C}^{r(a)}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ qui transforme t en $t' = \beta t$. Par un calcul explicite, on trouve : $P_{t'} = P_t(\det \beta)^{pbr(ab)/r(a)}$. Ce qui signifie que P induit une section globale du faisceau $L^P \otimes f_a^{-pbr(ab)/r(a)}$. On conclut en observant que les fibres lisses non isomorphes de f sont séparées par les P et que $\operatorname{Var} f = \dim \Psi(W)$.

Pousser plus loin l'étude de $C^{+\prime}_{nm}$ dans le cas précédent, c'est donc comparer $\omega^{\ell}_{V/W}$ et le faisceau du théorème 21. Dans le cas où $\dim V = 3$ et $\dim W = 1$ les F_ℓ sont toujours localement libres, et vérifient le théorème de Riemann-Roch : $\dim H^0(W,F_\ell) - \dim H^1(W,F_\ell) = \deg F_\ell - \operatorname{rang}(F_\ell)(\text{genre } W - 1)$. Or $\deg F_\ell \geq 0$ (théorème 20), et $\deg F_\ell > 0$ si $\operatorname{Var} f > 0$ (théorème 21) pour ℓ grand. Choisissons un tel $\ell = ba$. Alors $\dim H^0(V,\omega^{ba}_{V/W}) \geqslant (br(ba)/r(a))\deg F_a + r(ba)(1 - \text{genre } W)$ où le deuxième membre de l'inégalité croît comme un polynôme en b^3 si $\operatorname{Var} f \neq 0$, ce qui donne $C^{+\prime}_{3,1}$ dans ce cas. Si $\operatorname{Var} f = 0$, il n'y a rien à démontrer. Donc

THÉORÈME 22 [11].— *$C^{+\prime}_{3,1}$ est vrai si $\kappa(F) = 2$.*

Dans le cas d'une famille de courbes $f : V \longrightarrow W$, on peut supposer que V est une désingularisation de T telle que $g : T \longrightarrow W$ existe et soit un espace fibré semi-stable. En effet [26], il existe un schéma de modules grossier $\overline{M}_g$ des courbes de genre g (le genre de F est g) et une application rationnelle $W \dashrightarrow \overline{M}_g$ que l'on peut supposer partout définie. Un schéma de modules fin existe comme revêtement $\overline{M}^{(\mu)}_g$ de $\overline{M}_g$. On prend un revêtement W' de W tel qu'un morphisme de W' dans $\overline{M}^{(\mu)}_g$ soit défini. D'après le lemme 14, on peut supposer que W' est lisse. Le pull-back sur W' de la famille universelle sur $\overline{M}^{(\mu)}_g$ est une famille semi-stable sur W' . On applique alors le lemme 13.

Soit donc $f : V \longrightarrow W$ une famille semi-stable de courbes de genre g . (Bien que V ne soit pas lisse, le calcul sur les faisceaux dualisants est le même que pour l'espace fibré obtenu par désingularisation de V , car les singularités de V sont rationnelles et de Gorenstein [30]).

THÉORÈME 23 [17].— *Sous les hypothèses précédentes et si $g \geq 1$, alors $f^*(\bigwedge^{r(1)} f_*\omega_{V/W})$ est inclus dans $\omega^{g(g+1)/2}_{V/W}$. En particulier $\kappa(V/W) \geq \kappa(\bigwedge^{r(1)} f_*\omega_{V/W})$.*

Remarque.— On construit cette inclusion par le déterminant de Wronski [5].

Il reste à démontrer que $\kappa(\bigwedge^{r(1)} f_*\omega_{V/W}) \geq \operatorname{Var} f$, ce que l'on peut faire en utilisant le domaine des périodes des fibres de f et sa construction explicite [17]-[5]. On peut le montrer aussi en utilisant la forme relative du théorème de Riemann-Roch et le théorème 21.

THÉORÈME 23 [25].— *Sous les hypothèses précédentes et si $g \geq 2$, avec les notations du théorème 21, alors $f_a = (f_1^{12} \otimes I)^{a(a-1)/2} \otimes f_1$, pour un faisceau d'idéaux I dans $\mathcal{O}_W$.*

Un calcul explicite montre alors qu'une puissance de f_1 contient $f_{ab}^{r(a)} \otimes f_a^{-b.r(ab)}$ pour a et b grands. Donc

THÉORÈME 24 [5].— $C^{+\prime}_{n,n-1}$ *est vrai si* $\kappa(F) = \dim F = 1$.

Considérons maintenant un espace fibré $f : V \longrightarrow W$ tel que $\dim V = 3$, $\dim W = 1$, F est soit une surface K3 , soit une surface abélienne, ou bien $\dim V = n = \dim W + 1$ et F est une courbe elliptique. Dans tous les cas $\omega_F = \mathcal{O}_F$. De même que pour le théorème 23, on peut supposer dans le dernier cas que la famille f est semi-stable et qu'elle est munie après revêtement de W d'un morphisme dans le schéma des modules des courbes elliptiques $\overline{M}_1^{(\mu)}$, qui est une courbe. Le calcul se ramène donc à un calcul d'une famille de courbe sur une courbe, si $\operatorname{Var} f = 1$, qui est le seul cas à considérer. Dans les trois cas, $f_*\omega_{V/W}$ est un faisceau inversible de degré positif (strictement si $\operatorname{Var} f \neq 0$) d'après le théorème 17 et la remarque du lemme 18. Donc $\deg f_1 \geq \operatorname{Var} f$. Or $f^*f_*\omega_{V/W}$ est inclus dans $\omega_{V/W}$. Ce qui donne le

THÉORÈME 24 [5]-[11].— $C^{+\prime}_{3,1}$ *est vrai si* F *est une surface abélienne ou une surface* K3 . $C^{+\prime}_{n,n-1}$ *est vrai si* F *est une courbe elliptique.*

Remarque.— Si F est une surface hyperelliptique ou une surface d'Enriques (voir aussi plus bas), on peut se ramener aux cas précédents par un revêtement approprié de V et des arguments du genre de ceux du corollaire 10.

Si enfin on a une famille de surfaces elliptiques sur une courbe, on peut supposer après revêtement de W que f se factorise en $g : V \longrightarrow S$ et $h : S \longrightarrow W$, où g est un espace fibré dont la fibre est une courbe elliptique. De $C^{+\prime}_{3,2}$ pour g , on tire que $g_*\omega^a_{V/S}$ a une section globale pour a grand, donc une inclusion $\omega^a_{S/W} \hookrightarrow g_*\omega^a_{V/W}$. Si $\kappa(S/W) \geq 1$, on a $C^{+\prime}_{3,1}$ dans ce cas. Sinon, $\kappa(S/W) = -\infty$ (resp. $\kappa(S/W) = 0$) et d'après $C^{+\prime}_{2,1}$, on peut supposer que S est le produit de W et de $\mathbb{P}^1$ (resp. d'une courbe elliptique E). On étudie alors g en comparant par un calcul peu agréable le discriminant dans S' de la réduction semi-stable $g' : V' \longrightarrow S'$ de g , avec $g'_*\omega^a_{V'/S'}$. On obtient le

THÉORÈME 25 [11].— $C^{+\prime}_{3,1}$ *est vrai si* F *est une surface elliptique.*

Ceci épuise tous les cas de la conjecture d'Iitaka, façon forte, utiles à la démonstration des tableaux de classification (§ 1).

§ 9. Quelques questions

1) Bien-sûr, C_{nm} et C^+_{nm} . Pour l'étude de l'application d'Albanese, il suffirait (résultats 12-3) et corollaire 10) de connaître C_{nm} lorsque W est birationnelle à $A(W)$.

2) A propos des points d'interrogation du théorème 1.

a) Si $\dim V = \kappa(V)$, l'anneau $R(V)$ est-il de type fini ?

b) Si $\kappa(V) = 0$ et $\dim V = n$, a-t-on $\dim H^0(V,\Omega^k_V) \leq \binom{n}{k}$? [12]. Ceci est vrai comme conséquence du théorème 1 si $\dim V = 3$ et $q(V) \geq 1$ et comme conséquence du théorème 2 si V est birationnelle à sa variété d'Albanese ou si $q(V) = \dim V - 1$.

c) Si $\kappa(V) = -\infty$, est-il vrai que pour tout faisceau inversible L , il existe N tel que pour tout $m \geq N$ on ait $H^0(V, L \otimes \omega_V^m) = 0$? Cette question est connue sous le terme "Adjunction terminates". La réponse est positive si $\dim V = 3$ et $q(V) \geq 1$ comme conséquence du théorème 1.

Addendum - Octobre 1981

Depuis Février, les résultats 12 ont été agrandis de plusieurs contributions.

Dans une nouvelle version de [14], Y. Kawamata termine la démonstration de $C_{n,1}$. Par ailleurs, il prouve $C_{n,n-2}$ lorsque F est une surface elliptique et C^+_{nm} lorsque $\omega_F^{\ell} = \mathcal{O}_F$ pour un $\ell > 0$.

De son côté, E. Viehweg réduit la démonstration de C^+_{nm} à celle de l'inégalité $\kappa(W, \det f_* \omega^{\ell}_{V/W}) \geq \operatorname{Var} f$ pour un $\ell > 0$. Quant à cette dernière inégalité, elle est vérifiée comme conséquence des théorèmes 20 et 21 lorsque F est une surface de type général.

On obtient ainsi $C_{n,n-2}$ et C_{nm} pour $n \leq 4$.

On peut alors, en appliquant la même méthode de démonstration que dans le § 5, compléter le théorème 2.

(iv) Si $q(V) = 1$ et $\kappa(V) = 0$, alors α a une fibre F telle que $\kappa(F) = 0$.

(v) Si $q(V) = \dim V - 2$ et $\kappa(V) = 0$, alors α est un fibré étale de fibre F telle que $\kappa(F) = 0$.

De plus, si $\dim V \leq 4$ et $\kappa(V) = -\infty$, alors la factorisation de Stein de α a une fibre F telle que $\kappa(F) = -\infty$.

Pour plus de précisions sur ces derniers développements (et aussi pour une démonstration plus lisible du § 5, point 3), voir dans les "Proceedings of the symposia on algebraic varieties and analytic varieties, Tokyo 7/81", à paraître chez Kinokumiya et North Holland, les articles des deux auteurs pré-cités et la bibliographie correspondante.

BIBLIOGRAPHIE

[0] M. NOETHER - *Mentre le curve algebriche sono create da Dio, le superficie invece sono opera del Demonio*, Cité par F. Enriques, Superficie Algebriche, 1949, 464.

A) Théorie de la classification - Ordre chronologique

[1] S. IITAKA - *On* D-*dimensions of algebraic varieties*, J. Math. Soc. Japan 23(1971).

[2] S. IITAKA - *Genera and classification of algebraic varieties* I (en japonais), Sugaku 24(1972), 14-27.

Dans ces deux articles, S. Iitaka introduit les dimensions de Kodaira, démontre les théorèmes 3 et 4 et formule la conjecture C_{nm} ainsi que le premier programme de classification.

[3] K. UENO - *Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces*, Springer Lecture Notes 620.

Oeuvre de référence. Démonstration des théorèmes 5 et 6.

[4] K. UENO - *Kodaira dimension of certain fibre spaces*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, 279-292, Iwanami (1977).

Première démonstration de $C_{2,1}$ sans utiliser la classification des surfaces.

[5] E. VIEHWEG - *Canonical divisors and the additivity of the Kodaira dimension for morphisms of relative dimension one*, Comp. Math. 35(1977), 197-233.

Démonstration de $C^+_{n,n-1}$.

[6] T. FUJITA - *On Kähler fibre spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan 30(1978), 779-794.

[7] T. FUJITA - *The sheaf of relative canonical forms of a Kähler fibre space over a curve*, Proc. Japan Acad. 54(1978), 183-184.

Première utilisation de la théorie de Hodge pour un espace fibré f tel que f ne soit pas lisse. Démonstration des lemme 18 et théorème 17 lorsque $\dim W = 1$. Démonstration du théorème 24.

[8] K. UENO - *Classification of algebraic varieties* II - *Algebraic threefolds of parabolic type -*, Int. Symp. on Alg. Geom. Kyoto (1977), 693-708.

Démonstration des théorèmes 7 et 8 lorsque $\dim W \leq 3$. Démonstration de quelques points du théorème 1.

[9] K. UENO - *On algebraic fibre spaces of abelian varieties*, Math. Ann. 237(1978), 1-22.

Démonstration de C^+_{nm} lorsque F est une variété abélienne.

[10] Y. KAWAMATA, E. VIEHWEG - *On a characterization of an abelian variety in the classification theory of algebraic varieties*, Comp. Math. 41(1980), 355-359.

Démonstration des théorèmes 7 et 8.

[11] E. VIEHWEG - *Klassifikationstheorie algebraischer Varietäten der Dimension drei*, Comp. Math. 41(1980), 361-400.

Démonstration de $C^+_{3,1}$ et autre démonstration de $C^+_{n,n-1}$. Démonstration complète du théorème 1.

[12] K. UENO - *Birational geometry of algebraic threefolds*, Géométrie algébrique, Angers (1979), 311-323.

Exemples de classes de variétés sans modèle minimal. Calcul de $\dim H^0(V,\Omega^2_V)$ lorsque $\kappa(V) = 0$ et $q(V) \geq 1$. Discussion de problèmes ouverts.

[13] Y. KAWAMATA - *Characterization of abelian varieties*, Manuscrit.

Démonstration des théorèmes 2 et 17. Démonstration de C_{nm} lorsque $\kappa(W) = \dim W$ et $\kappa(V) \geq 0$.

[14] Y. KAWAMATA - *Kodaira dimension of algebraic fibre spaces over curves*, Manuscrit 2ème version.

Démonstration de quelques cas de $C_{n,1}$.

[15] E. VIEHWEG - *Die Additivität der Kodaira Dimension für projektive Faserraüme über Varietäten des allgemeinen Typs*, Manuscrit. A paraître dans Journal für die reine und ungewandte Mathematik.

Démonstration de C_{nm} lorsque $\kappa(W) = \dim W$ en utilisant [13].

[16] K. UENO - *On three-dimensional compact complex manifolds with non-positive Kodaira dimension*, Manuscrit.

Recherche de variétés complexes non algébriques V telles que $\kappa(V) \leq 0$.

B) <u>Références concernant les méthodes utilisées</u>

[17] S. Ju. ARAKELOV - *Families of algebraic curves with fixed degeneracies*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 35(1971) - Math. USSR Izv. 5(1971), 1277-1302.

[18] M.F. ATIYAH - *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc. (3), 7(1957), 414-452.

[19] S. BLOCH and D. GIESEKER - *The positivity of the Chern classes of an ample vector bundle*, Inventiones Math. 12(1971), 112-117.

[20] P. DELIGNE - *Théorie de Hodge* II , Publ. Math. I.H.E.S. 40(1971), 5-58.

[21] D. GIESEKER - *Global moduli for surfaces of general type*, Inventiones Math. 43(1977), 233-282.

[22] P. GRIFFITHS - *Period of integrals on algebraic manifolds* III, Publ. Math. I.H.E.S. 38(1970), 125-180.

[23] D. LIEBERMAN and E. SERNESI - *Semicontinuity of* L-*dimension,* Math. Ann. 225(1977), 77-88.

[24] D. MUMFORD - *Geometric Invariant Theory,* Springer 1965.

[25] D. MUMFORD - *Stability of projective varieties,* L'Enseignement Math. 23(1977).

[26] H. POPP - *On moduli of algebraic varieties* III. *Fine moduli spaces,* Comp. Math. 31(1975), 237-258.

[27] M. RAYNAUD - *Flat modules in algebraic geometry,* Comp. Math. 24(1972), 11-13.

[28] F. SAKAI - *Kodaira dimension of complements of divisors,* Complex Analysis and Algebraic Geometry, 1977, Iwanami, 239-257.

[29] W. SCHMID - *Variation of Hodge structure : The singularities of the period mapping,* Inventiones Math. 22(1973), 211-319.

[30] E. VIEHWEG - *Rational singularities of higher dimensional schemes,* Proc. of the A.M.S. 63(1977), 6-8.

Hélène ESNAULT

Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55 - 5e étage
2 Place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05