

[L-T] J. LIPMAN - B. TEISSIER - Introduction to Volume IV of the collected Papers of O. Zariski, to appear.

[Mi] J. MILNOR - Singular Points of Complex Hypersurfaces, Ann. of Math. Studies 61, Princeton (1968).

[Te₁] B. TEISSIER - Introduction to Equisingularity Problems, Proc. of the AMS 29, 593-632, (1975).

[Te₂] B. TEISSIER - Sur divers conditions numériques d'équisingularité des familles de courbes..., preprint Ecole Polytechnique, E.P./M 208.0675 (1975), voir aussi : B. TEISSIER - Résolution simultanée I, II, dans : Séminaire Demazure-Pinkham-Teissier 1976/1977, Springer Lect. Notes 777.

[Te₃] B. TEISSIER - The Hunting of Invariants..., in : P. Holme (edit) ; Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Northholland (1978).

[Z] O. ZARISKI - Studies in Equisingularity, I, II, III, Ann. J. of Math. 87, (1965), 507-536, 972-1006, Ann. J; of Math. 90 (1968), 961-1023.

En outre, on peut consulter la bibliographie dans [B-G].

SUR L'IDENTIFICATION DE SINGULARITES APPARAISSANT
DANS DES GROUPES ALGEBRIQUES COMPLEXES

Hélène ESNAULT

INTRODUCTION.

Nous allons introduire quelques notations pour rendre plus compréhensible le problème que nous allons exposer.

Pour toutes les propriétés bien connues sur les groupes algébriques et les morphismes algébriques que l'on définit, nous renvoyons le lecteur à (S) et pour la définition de (X, x) , à (S \otimes).

Notations -

- Le corps de base est C , le corps des nombres complexes.
- G est un groupe algébrique, simple, simplement connexe, de dimension n , de rang r , de type A_r , ou D_r ou E_r .
- T est un tore maximal dans G , donc de dimension r .
- W est le groupe de Weyl de G , c'est-à-dire, si $N(T)$ est le normalisateur de T dans G , $W = N(T)/T$.
- B est un sous-groupe de Borel de G , qui contient le tore maximal T .
- V est la variété fermée, algébrique des éléments unipotents du groupe G .

Rappelons les résultats suivants, que l'on utilise par la suite (réf. in [S]) :
La dimension de V est $n-r$, et cette variété ne contient qu'une seule orbite dense

de dimension maximale, soit $n-r$, qui constitue l'orbite des éléments réguliers, i.e. des éléments pour lesquels la dimension du centralisateur est la plus petite possible, soit r (p. 93). Les autres éléments vérifient toujours : $\dim Z_G(x) = r + 2 \dim B_x$, (p. 94), où $Z_G(x)$ est le centralisateur de x dans G , B_x est la sous-variété de la variété des Borel constituée de ceux qui contiennent le point x . Cette variété des Borel, isomorphe à G/B , est complète (p. 62), et la sous-variété $B_x y$ est fermée. La variété V ne contient d'autre part qu'une seule orbite dite sous-régulière (p.140), c'est-à-dire de dimension $n-r-2$. Pour un point quelconque de cette orbite, la dimension de B_x est donc 1. De plus, chaque composante irréductible est isomorphe à P^1 (p. 140), projectif à une dimension sur C .

- x est un élément unipotent sous-régulier de G .

- $O_G(x)$ est l'orbite de x dans G .

- (X,x) est un germe de variété analytique transverse à $O_G(x)$ au point x , c'est-à-dire défini par les propriétés suivantes : le morphisme : $G \times X \rightarrow G$, $(g,x) \rightarrow gxg^{-1}$ est lisse, et X a la dimension minimale pour cette propriété. La dimension de X est donc $r + 2$, et celle de $(X \cap V, x)$ est 2.

- Y est la sous-variété de $G \times (G/B)$ définie par l'ensemble des couples (x, gB) tels que x soit un élément du Borel gBg^{-1} .

- Les 4 variétés $T, T/W, G$ et Y permettent de définir un diagramme commutatif de la façon suivante :

σ' est la première projection de Y sur G .

σ est le morphisme de projection de T sur T/W .

π est défini par les r caractères indépendants de G , ou, d'un point de vue ensembliste, simplement ainsi :

à tout élément de G , on associe sa partie semi-simple (décomposition de Jordan), qui est élément d'un tore maximal, lequel est conjugué à T , et on prend la classe d'équivalence sous l'action de W .

π' est défini ainsi :

à tout élément (x, gB) de Y , on associe l'élément gxg^{-1} de B , dont on prend la partie semi-simple dans T .

- φ est le morphisme de restriction de π à X :

$$\varphi : (X, x) \rightarrow (T/W, [1]).$$

D'autre part, nous rappelons ces résultats démontrés dans [S&] et [E] (III §6 pour le premier et I, II pour le deuxième) et qui furent énoncés par Grothendieck dans le séminaire Shih Weishu (I.H.E.S. 1969-1970).

- Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\sigma'} & G \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\sigma} & T/W \end{array}$$

est une résolution globale et fibre par fibre du pull-back de T et de G au-dessus de T/W . Cela signifie en particulier que Y est lisse, et lisse au-dessus de T , et que ses fibres au-dessus de T sont des résolutions des fibres correspondantes de G au-dessus de T/W .

- Le germe de surface analytique $(X \cap V, x)$ est une singularité normale, isolée et rationnelle. Par rationnel, on entend : pour une résolution $d : X_1 \rightarrow (X \cap V, x)$ de $(X \cap V, x)$, le premier faisceau dérivé du faisceau structural est nul : $R^1 d_* \mathcal{O}_{X_1} = 0$. cf. [A]. (En ces termes, la normalité s'exprime par $d_* \mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{(X \cap V, x)}$. cf. [H] p. 280).

Nous nous proposons de montrer, dans cet exposé :

Le germe de surface $(X \cap V, x)$ est une singularité quadratique.

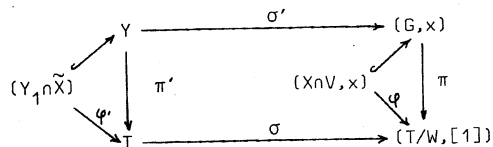
Par quadratique, nous entendons de multiplicité deux. Ceci conduira à une identification de la singularité avec le type du groupe, soit A_r, D_r ou E_r , grâce à M. Artin.

Nous donnons deux démonstrations de ce résultat. L'une, inspirée par Deligne, procède par réduction au cas A_1 , à partir de la résolution de la singularité. Pour ce, les singularités rationnelles quadratiques sont caractérisées par la self-intersection des composantes exceptionnelles de la résolution minimale. L'autre, inspirée par Brieskorn (cf. [Br]) et Lê Dũng Tráng, procède aussi par réduction, mais au cas des groupes de rang 2, et caractérise les singularités rationnelles quadratiques par leur dimension d'immersion.

Nous noterons qu'au cours de cette deuxième démonstration, il est apparu un résultat partiel du théorème de Kraft et Procesi sur la normalité de la "couche" des irréguliers de G .

1. PREMIÈRE DEMONSTRATION.

La situation est donnée par le diagramme suivant :



où Y_1 désigne la fibre de Y sur T au-dessus de 1 , \tilde{X} désigne l'image inverse par σ' de X et x notre unipotent sous-régulier.

Posons quelques remarques :

1 - L'image inverse par σ' du point x est une variété complète de dimension 1, notée (x, D) . Elle est la réunion de droites projectives isomorphes à P^1 , de type α . cf. [S] p. 146.

2 - On peut supposer, que l'une de ces droites projectives est P_α/B , où P_α est le plus petit parabolique contenant B et le sous-groupe à un paramètre correspondant à la racine négative $-\alpha$. En effet, le point x étant irrégulier, il est contenu dans un conjugué du produit de tous les sous-groupes à un paramètre correspondant aux racines positives, sauf pour une racine positive simple. Et dire que le point $(x, P_\alpha/B)$ est dans Y est équivalent à dire que le point x est dans ce produit, noté U_α par la suite, cf. [S] p. 144 et 146.

3 - Il est équivalent de dire que le germe de surface $(X \cap V, x)$ est une singularité rationnelle quadratique, ou que chaque composante exceptionnelle de sa résolution minimale a pour self-intersection -2 . cf. [A].

4 - Si F est une surface lisse et D un diviseur dans F , la self-intersection de ce diviseur est le degré de son faisceau normal $N_{D/F}$. cf. [H] p. 361.

Au regard des remarques 3 et 4, notre problème est de calculer le degré du faisceau normal à P_α/B dans la résolution $(Y_1 \cap \tilde{X})$ de $(X \cap V)$. Nous allons pour ce établir une suite de lemmes ayant pour but de ramener le calcul dans une variété plus grosse que l'on connaît mieux, en commençant par voir que $(Y_1 \cap \tilde{X})$ est bien une résolution.

LEMME 1 - Le morphisme $c : G \times (Y_1 \cap \tilde{X}) \rightarrow Y_1$, défini par $(h, (z, aB)) \rightarrow (hzh^{-1}, haB)$ est un morphisme lisse au voisinage de $(1, (x, D))$.

Preuve : Les images inverses du morphisme lisse : $G \times X \rightarrow G, (g, y) \rightarrow gyg^{-1}$ par l'inclusion : $V \hookrightarrow G$, puis par le morphisme : $Y_1 \xrightarrow{\sigma'} V$ donnent les morphismes lisses :

$$G \times (X \cap V) \rightarrow V \text{ et } Y_1 \times_V (G \times (X \cap V)) \rightarrow Y_1 .$$

Explicitons cette deuxième application ; remarquons que $Y_1 \times_V (G \times (X \cap V))$ est isomorphe à $G \times (Y_1 \cap \tilde{X})$ par :

$$(y, gB) \times (h, z) \mapsto (h, (z, h^{-1}gB)) ,$$

et le morphisme sur Y_1 est la composition de cet isomorphisme et du morphisme c de notre lemme défini par

$$(h, (z, aB)) \mapsto (hzh^{-1}, haB = gB) .$$

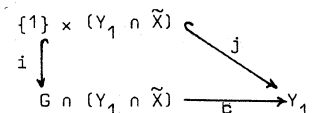
Par changement de base du morphisme : $G \times X \rightarrow G$, on en déduit que ce morphisme est lisse. Par conséquent, l'espace total est lisse. Donc $(Y_1 \cap \tilde{X})$ est lisse.

Ainsi on a montré que $(Y_1 \cap \tilde{X})$ est une résolution de $(X \cap V)$.

Pour toutes les notions de Géométrie Algébrique, nous renvoyons à [H].

LEMME 2 - Le degré du faisceau normal à P_α/B dans $(Y_1 \cap \tilde{X})$ est le même que celui de P_α/B dans Y_1 .

Preuve : Notons : $D_0 = (x, P_\alpha/B)$. On suppose que D_0 est contenu dans $Y_1 \cap \tilde{X}$, donc dans Y_1 . On a le diagramme commutatif :



où i et j sont des immersions et c est le morphisme du lemme 1.

$$\text{On a : } c^* N_{D_0/Y_1} = N_{c^{-1}(D_0)/G \times (Y_1 \cap \tilde{X})} .$$

En effet, le morphisme c étant lisse, sa restriction à D_0 est lisse, donc

les applications tangentées $T_c : T_{c^{-1}(D_0)} \rightarrow T_{D_0}$ et $T_c : T_{G \times (Y_1, n\tilde{X})} \rightarrow T_{Y_1}$ sont surjectives et le noyau de cette deuxième restreint à $c^{-1}(D_0)$ est le même que le noyau de la première, restreint à $c^{-1}(D_0)$. Par suite, les conoyaux de $T_{D_0} \rightarrow T_{Y_1} \otimes \mathcal{O}_{D_0}$ et de $T_{c^{-1}(D_0)} \rightarrow T_{G \times (Y_1, n\tilde{X})} \otimes \mathcal{O}_{c^{-1}(D_0)}$ sont isomorphes.

Par ailleurs, on a la suite exacte de faisceaux de \mathcal{O}_{D_0} -modules :

$$0 \rightarrow N_{\{1\} \times D_0 / c^{-1}(D_0)} \rightarrow N_{\{1\} \times D_0 / G \times (Y_1, n\tilde{X})} \rightarrow N_{c^{-1}(D_0) / G \times (Y_1, n\tilde{X})} |_{D_0} \rightarrow 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{degré } N_{D_0 / Y_1} &= \text{degré } N_{c^{-1}(D_0) / G \times (Y_1, n\tilde{X})} \\ &= \text{degré } N_{\{1\} \times D_0 / G \times (Y_1, n\tilde{X})} - \text{degré } N_{\{1\} \times D_0 / c^{-1}(D_0)} \end{aligned}$$

Or, on a une fibration triviale, dont la fibre au-dessus de 1 contient $\{1\} \times D_0 : G \times (Y_1, n\tilde{X}) \rightarrow G$, donnée par la première projection. Donc : cf. Lemme 2"

$$N_{\{1\} \times D_0 / G \times (Y_1, n\tilde{X})} = N_{\{1\} \times D_0 / \{1\} \times (Y_1, n\tilde{X})} \text{ étendu par : } \mathcal{O}_{\{1\} \times D_0}^n \text{ où } n \text{ est la}$$

dimension de G .

$$\text{Par suite : } \text{degré } N_{\{1\} \times D_0 / G \times (Y_1, n\tilde{X})} = \text{degré } N_{\{1\} \times D_0 / \{1\} \times (Y_1, n\tilde{X})}$$

De plus, considérons le morphisme : $c^{-1}(D_0) \rightarrow G$, donné par la première projection, dont la fibre au-dessus de 1 contient D_0 . Si g est un point de l'image, il existe une courbe $(y, P'/B)$ dans $Y_1 \times \tilde{X}$ telle que : $(gy, g^{-1}P'/B) = (x, P_\alpha/B)$. En particulier, y doit être un point conjugué de x dans X . C'est donc x lui-même, d'après la construction de X . Ainsi, g est dans le centralisateur de x . Inversement, si g est dans le centralisateur de x , la courbe $(x, g^{-1}P_\alpha/B)$ est dans $Y_1 \times \tilde{X}$. L'image du morphisme est donc $Z_G(x)$, et toutes ses fibres sont isomorphes à D_0 . Ce morphisme est donc une fibration localement triviale, et on a, cf. lemme 2" :

$$N_{\{1\} \times D_0 / c^{-1}(D_0)} = \mathcal{O}_{\{1\} \times D_0}^{r+2}, \text{ où } r+2 \text{ est la dimension de } Z_G(x); \text{ donc son}$$

degré est nul.

Conclusion -

$$\text{degré } N_{D_0 / Y_1, n\tilde{X}} = \text{degré } N_{D_0 / Y_1}$$

LEMME 2' - Soient $X \subset Y \subset Z$ trois variétés lisses. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow N_{X/Y} \rightarrow N_{X/Z} \rightarrow N_{Y/Z} |_X \rightarrow 0$$

Preuve : On a les suites exactes :

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_Y \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow N_{X/Y} \rightarrow 0 \text{ et}$$

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_Z \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow N_{X/Z} \rightarrow 0 \text{ et}$$

$$0 \rightarrow T_Y |_X \xrightarrow{a} T_Z |_X \rightarrow N_{Y/Z} |_X \rightarrow 0$$

Le morphisme a se factorise donc à :

$$a_1 = N_{X/Y} \rightarrow N_{X/Z}$$

Pour identifier les coker de a et a_1 , il suffit donc de montrer que a_1 est injective.

Soit x dans $N_{X/Y}$, tel que $a_1(x) = 0$. Il existe donc x_1 dans $T_Z \otimes \mathcal{O}_X$ tel que x soit son image par l'application de définition du fibré normal, et tel qu'il soit en même temps dans T_X . Comme élément de T_X , il a donc une image nulle dans $N_{X/Y}$ qui est exactement x . c.q.f.d.

LEMME 2" - Soit $f : X \rightarrow Y$ une fibration localement triviale, d'une variété lisse dans une autre. Alors : si D est une sous-variété d'une fibre $F : N_{D/X} = N_{D/F}$ étendu par le faisceau trivial $\mathcal{O}_D^{\dim Y}$, et en particulier le degré de $N_{D/X}$ est égal à celui de $N_{D/F}$.

Preuve : On a : $N_{F/X} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_F}(I/I^2, \mathcal{O}_F)$, où I est le faisceau d'idéaux de F dans X . La fibration étant localement triviale, on a : $I/I^2 = M/M^2 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_F$, où M est l'idéal du point fermé dont F est la fibre.

La variété Y étant lisse : M/M^2 est un espace vectoriel de la dimension de Y . D'où : $I/I^2 = \mathcal{O}_F^{\dim Y}$.

On applique alors le lemme 2'. c.q.f.d.

LEMME 3 - Le degré du faisceau normal à P_α/B dans Y_1 est le même que celui dans F_α ,
où

$$F_\alpha = \{(v, gB) \text{ dans } Y_1 \text{ tels que } gB \text{ est dans } P_\alpha/B\}.$$

Preuve : Conformément au lemme 2", il suffit de démontrer qu'il existe une fibration localement triviale à base lisse de Y_1 dont la fibre F contient D_0 .

Considérons le morphisme $f : Y_1 \rightarrow G/P_\alpha$, défini par : $(y, gB) \rightarrow (gP_\alpha)$. Ce morphisme est défini puisque B est contenu dans P_α . D'autre part, toutes les fibres sont des conjuguées de F_α , en particulier isomorphes. L'image est clairement G/P_α en entier, puisqu'il y a des unipotents dans chaque Borel, en particulier dans chaque parabolique. Par suite, f est une fibration localement triviale de fibre F_α , et il est clair que D_0 est contenu dans F_α . c.q.f.d.

LEMME 4 - Le degré du faisceau normal à P_α/B dans F_α est le même que celui dans $F_{1\alpha}$,
où $F_{1\alpha}$ est défini par : $F_{1\alpha} = F_\alpha/U_\alpha$.

Preuve : Il suffit de montrer que $F_{1\alpha}$ est bien défini et que F_α est fibré sur une variété lisse de fibre isomorphe à $F_{1\alpha}$, conformément au lemme 2".

Le groupe U_α , défini comme produit de tous les sous-groupes à un paramètre unipotents correspondant aux racines positives β , excepté la racine α , opère sans point fixe sur F_α par : $(u, (v, gB)) \rightarrow (uv, gB)$. Il suffit en effet de remarquer que P_α normalise U_α , cf. [S] p. 141. Cette opération est sans point fixe. Le quotient de F_α par U_α , noté $F_{1\alpha}$ est donc lisse. On peut alors considérer la fibration localement triviale : $F_\alpha \rightarrow P_\alpha \rightarrow U_\alpha$, où $F_\alpha \rightarrow P_\alpha$ est la projection sur le premier facteur et $P_\alpha \rightarrow U_\alpha$ est la projection correspondant à la décomposition $P_\alpha = \langle X_{-\alpha}, T, X_\alpha \rangle \cdot U_\alpha$. cf. [S] p. 132. La fibre est isomorphe à $F_{1\alpha}$, et on applique le lemme 2".

LEMME 5 - Le degré du faisceau normal à P_α/B dans $F_{1\alpha}$ est le même que celui de la variété des Borel de SL_2 dans la variété Y_0 correspondante à $SL_2 : \{(x, B') \text{ dans } SL_2 \times SL_2/B_0 \text{ tels que } x \text{ est dans } B'\}$.

Preuve : Il suffit d'établir un isomorphisme entre $F_{1\alpha}$ et Y_0 qui envoie P_α/B sur la

variété des Borel de SL_2 .

C'est une conséquence directe du théorème de Tits-Bruhat : cf. [S] p. 132.

On note B_0 le Borel des matrices triangulaires supérieures de SL_2 . On a l'isomorphisme : $F_1 \rightarrow Y_0$,

$$\left\{ x_\alpha(t)n_\alpha, x_\alpha(u), x_\alpha(t)n_\alpha \right\} \mapsto \left[\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ B_0 \end{array} \right]$$

Dire que c'est un morphisme revient à écrire les règles de conjugaison dans G . La surjectivité est le même lemme de Bruhat-Tits dans SL_2 , et l'injectivité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1-tu & t^2u \\ -u & 1+tu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t'u' & t'^2u' \\ -u' & 1+t'u' \end{pmatrix}$$

implique que : $u = u'$, $tu = t'u'$ et $t^2u = t'^2u'$. Si u est non nul, $t = t'$ et le problème est résolu. Si u est nul,

$$\begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B_0 = \begin{pmatrix} -t' & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B_0$$

Ce qui implique $t = t'$.

LEMME 6 - Dans Y_0 , la self-intersection de la variété des Borel est -2.

Preuve : Soit U^-TU la grosse cellule de SL_2 .

$$U^-TU = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ de } SL_2, \text{ tels que } a \neq 0. \right\} \\ = C^* \times C^2$$

La variété des Borel de SL_2 comprend deux cartes paramétrées par : U^- et U . Le changement de cartes s'écrit : dans $U^- \cap U$, $U^-B = UB^-$ si et seulement si $u = u^-bw^{-1}$, où b est un élément de B et w est la symétrie $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'élément b s'écrit :

$$b = \begin{pmatrix} t & v \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne en identifiant :}$$

$$v = 1, \quad \underline{u^-} = u^{-1} \quad \text{et} \quad -t = u.$$

La variété Y_0 est paramétrée sur la variété des Borel par : $Y_0 \rightarrow SL_2/B_0$, où cette application est la deuxième projection. Les fibres sont isomorphes à $U^- \times U$, et il y a deux cartes : $U \times U^-$, de coordonnées (x, u^-) correspondant à l'élément $(u^- x u^{-1}, u^- B)$ et $U^- \times U$, de coordonnées (y, u) correspondant à l'élément $(u y u^{-1}, u B)$. Le changement de cartes s'écrit : $(x, u^-) = (y, u)$ si et seulement si $u^- = u^{-1}$ (changement de cartes dans la variété des Borel) et $x = (-y)u^2$. La formule du genre donne : $2g(D) - 2 = D.D + D.K$, où ici D est la variété des Borel, donc de genre nul, (on vient de voir qu'elle est isomorphe à P^1), et K est le diviseur canonique de Y_0 .

Calcul de K :

$$dx \wedge du^- = d(-yu^2) \wedge d(u^{-1}) = dy \wedge du.$$

Le diviseur K est donc trivial car le changement de cartes est trivial. Donc : $-2 = D.D$, et $N_{D/Y_0} = O_D(-2)$ et degré $N_{D/Y_0} = -2$. c.q.f.d.

2. DEUXIÈME DÉMONSTRATION.

Celle-ci est basée sur la proposition suivante : cf. [D.V]. Soit $(X \cap V, x)$ un germe de surface, singulier, normal, rationnel. Il est équivalent de dire que cette singularité est de multiplicité 2 ordinaire ou que c'est un germe d'hypersurface, c'est-à-dire a pour dimension d'immersion 3.

Le problème revient donc à montrer que $(X \cap V, x)$ est un germe d'hypersurface, ou, au regard du lemme suivant, que le lieu critique du morphisme $\varphi : X \rightarrow T/W$ est lisse.

LEMME PRELIMINAIRE - Soit $f : C^n, 0 \rightarrow C^p, 0$ un germe de morphisme analytique dominant. Supposons que le lieu critique de f , noté $C(f)$, soit lisse et contienne 0 . Alors le germe $(f^{-1}(0), 0)$ a pour dimension d'immersion $n-p+1$. (La structure analytique du lieu critique est donnée par les mineurs $p \times p$ de la matrice jacobienne de f).

Preuve : (par récurrence)

$$\text{Soient : } C^n, 0 = \text{Spec an } C\{x_1, \dots, x_n\}$$

- M l'idéal maximal $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$

- M^k ses puissances respectives.

- $p = 1$ - Dans ce cas, il n'y a rien à prouver.

- $p > 1$

L'idéal J de $C(f)$ est donné par les mineurs $p \times p$ de :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Il n'est pas contenu dans M^k , pour $k > 1$, sinon $C(f)$ ne serait pas lisse. Donc un des mineurs $p \times p$, par exemple le premier :

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

est dans $M - M^2$.

Or, si f_1 est dans M^{a_1}, \dots, f_p est dans M^{a_p} , le mineur Δ_1 est dans $M^{a_1 + a_p - p}$.

Donc, $a_1 + a_p = p + 1$, ce qui entraîne par exemple : f_1 est dans $M - M^2, \dots, f_{p-1}$ est dans $M - M^2, f_p$ est dans M^2 . Ecrivons $f_i = l_i + \varphi_i$ ($1 \leq i \leq p-1$), où φ_i est dans M^2 et l_i dans $M - M^2$. Si tous les l_i sont linéairement indépendants, le morphisme f est lisse et le lieu critique est vide, ce qui est exclu ! D'autre part, si le rang des l_i est plus petit que $p-2$, en prenant des combinaisons linéaires bien choisies des f_i au lieu des f_i eux-mêmes, on obtient que la somme $a_1 + a_p$ est plus grande que $p+2$. Donc, quitte à faire un changement de coordonnées analytiques dans $C\{x_1, \dots, x_n\}$, f s'écrit :

$$f_1 = x_1, \quad f_{p-1} = x_{p-1}, \quad f_p = f_p, \quad f_p \text{ étant dans } M^2 - M^3$$

D'où : $(f^{-1}(0), 0)$, contenu dans $C^p \times C^{n-p}, 0$ est isomorphe à : $(g^{-1}(0), 0)$, contenu dans $C^{n-p}, 0$, et défini par :

$$g : C^{n-p} \rightarrow C, \quad (x_{p+1}, \dots, x_n) \mapsto f_p(0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Remarque - On ne prétend pas que g lui-même est dans $M^2 - M^3$, mais seulement que g est dans M^2 .

Nous allons donc montrer que le lieu critique de $\varphi : X \rightarrow T/W$ est lisse. Pour ce, nous procédons en deux temps :

- 1 - Le lieu critique de φ , noté $C(\varphi)$ est normal. Il est la normalisation du discriminant de φ , noté $\Delta(\varphi)$.
- 2 - La normalisation de $\Delta(\varphi)$ se construit par d'autres méthodes. Elle est lisse.

Remarquons tout d'abord que le lieu critique de φ , en tant que variété déterminentielle, est de Cohen-Macaulay, d'après Hochster-Eagon. Pour montrer qu'il est normal, il suffit de montrer qu'il est lisse en codimension 1. (Théorème de Serre)

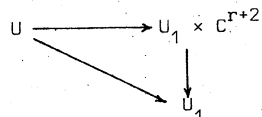
Notations -

Soit $[t]$ un point en codimension 1 dans $\Delta \subset T/W$, t_i ses antécédents dans T par $\sigma : T \rightarrow T/W$, $Z_G(t_i)$ le centralisateur de l'un de ces t_i , H le groupe semi-simple associé $(Z_G(t_i), Z_G(t_i))$. Ce groupe H est de rang 2, donc soit de type A_2 , soit de type $A_1 \times A_1$. Le groupe $Z_G(t_i)$ est un produit semi-direct d'un tore central T' de rang $r-2$ et de H . cf. [S.Ch] exp.

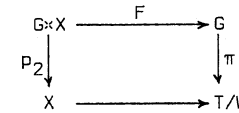
Quelques remarques -

Remarque 1 - Le morphisme $\varphi : (X, x) \rightarrow (T/W, 1)$ est dominant (en fait plat). (i.e. : son image contient un ouvert analytique). La variété transverse (X, x) est construite de telle sorte que $F : G \times X \rightarrow G$, $(g, x) \rightarrow g \times g^{-1}$ soit un morphisme lisse et que la dimension de X soit minimale pour cette propriété, soit $r+2$, x étant sous-régulier cf. [S1] p. 74.

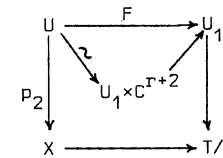
En particulier, il existe des voisinages U et U_1 pour la topologie forte, de $(1, x)$ et x dans $G \times X$ et G , un isomorphisme $U \rightarrow U_1 \times \mathbb{C}^{r+2}$ tels que l'application $U \subset G \times X \rightarrow U_1 \subset G$ se factorise par $U \rightarrow U_1 \times \mathbb{C}^{r+2}$ et la première projection :



L'application φ étant équivariante sous l'action de conjugaison de G , on a le diagramme commutatif suivant :



En particulier, ce diagramme est aussi commutatif :



Donc φ est dominant. (En fait, la fibre spéciale a la dimension 2, donc φ est plat).

Remarque 2 - Le lieu critique de φ , noté $C(\varphi)$, est l'intersection de X avec le lieu critique de $\pi : G \rightarrow T/W$.

Le morphisme F étant lisse, π est lisse en un point y dans X si et seulement si $F \circ \pi = \varphi \circ p_2$ est lisse en tous les points (g, z) tels que $F(g, z) = y$. Or p_2 est une fibration triviale. Donc $\varphi \circ p_2$ est lisse en (g, z) si et seulement si φ est lisse en $F(g, z) = y$. Soit : $C(\varphi) = C(\pi) \cap X$.

Remarque 3 - Les remarques 1 et 2 montrent que le discriminant de φ , $\Delta(\varphi)$ est le même, au voisinage du point $[1]$, que celui de π , donc celui de $\sigma : T \rightarrow T/W$.

Remarque 4 - Le germe de variété analytique X étant construit de telle sorte qu'il soit transverse dans G à un point sous-régulier unipotent, et l'ensemble des points sous-réguliers de G étant dense dans la variété des points irréguliers de G , cf. [S] p. 140 on peut choisir X suffisamment petit de sorte que X ne contienne que des points réguliers et sous-réguliers.

De plus, X coupe les orbites de ces points de façon transverse. (Ceci signifie que la somme des espaces tangents à l'orbite du point au point et à X au point est l'espace tangent à G au point).

Choisissons un point z dans $C(\varphi)$ tel que : $\varphi(z) = [t]$. Ce point est, au regard de la remarque 4, un sous-régulier, c'est-à-dire un conjugué par l'action de G d'un point de la forme : $t_1 u$, où u est un élément unipotent de H . Cet unipotent est nécessairement sous-régulier dans H et dans $Z_G(t_1)$.

En effet :

$$\dim Z_G(t_1) = r + 2$$

$$Z_G(t_1 u) = Z_G(t_1) \cap Z_G(u) .$$

$$= Z_{Z_G(t_1)}(u) = T'.Z_H(u) .$$

Donc : $\dim Z_{Z_G(t_1)}(u) = r + 2$ et u est sous-régulier dans $Z_G(t_1)$.

Et aussi : $\text{rang } H = 2$

$$\dim Z_H(u) = r + 2 - \text{rang } T' = 4$$

Donc u est sous-régulier dans H .

Sans restriction de généralité, on peut supposer que $z = t_1 u$.

Construisons un germe particulier de variété analytique lisse, transverse à l'orbite dans G de z au point z .

LEMME 1 - La sous-variété $T'.u$ est transverse à l'orbite de $z = t_1 u$ dans $Z_G(t_1)$ au point $z = t_1 u$.

Preuve : L'espace tangent au point z à $T'.u$ s'écrit :

$$T_Z T'.u = \{t_1 s u / s \in T_1 T'\}$$

L'espace tangent au point z à l'orbite de z dans $Z_G(t_1)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} T_Z O_{Z_G(t_1)}(z) &= T_Z t_1 O_H(u) \\ &= \{t_1 (hu - uh) / h \in T_1 H\} \end{aligned}$$

Cherchons $T_Z T'.u \cap T_Z O_{Z_G(t_1)}(z)$:

$$t_1 s u = t_1 (hu - uh) \text{ si et seulement si } s = h - \text{adu } h .$$

Donc s est dans $T_1 H$, donc nul.

LEMME 2 - Si X_H est un germe de variété dans H , transverse en u à l'orbite de u dans H , alors $T'.X_H$ est transverse en z à l'orbite de z dans $Z_G(t_1)$.

Preuve : On peut écrire X_H sous la forme $X_H = X_H^0 . u$, où X_H^0 est dans H et 1 dans X_H^0 .

L'espace tangent au point z à $T'.X_H$ s'écrit :

$$T_Z . T'.X_H^0 u = \{t_1 s u + t_1 x u, s \in T_1 T' \text{ et } x \in T_1 X_H^0 \subset T_1 H\}$$

Cherchons $T_Z T'.X_H^0 u \cap T_Z O_{Z_G(t_1)}(z)$:

$$t_1 s u + t_1 x u = t_1 (hu - uh) \text{ si et seulement si } s + x = h - \text{adu } h .$$

Donc s est dans $T_1 H$, donc nul, et $x = h - \text{adu } h$.

Comme X_H est transverse à $O_{Z_G(t_1)}(z)$, ceci implique que x est nul. Soit :
 $x + s = 0 = h - \text{adu } h .$ c.q.f.d.

Notons par la suite : $X' = T'.X_H$.

LEMME 3 - Le germe X' est transverse à l'orbite de z dans G .

Preuve : Par construction, X' est lisse et de la bonne dimension $r + 2$. (Ce qui revient à dire que l'orbite de z a la même codimension dans $Z_G(t_1)$ que dans G).

L'espace tangent au point z à l'orbite $O_G(z)$ de z dans G s'écrit :

$$T_Z O_G(z) = \{yz - zy / y \in T_1 G\} .$$

Cherchons $T_Z X' \cap T_Z O_G(z)$:

$$sz + xz = yz - zy \text{ si et seulement si } s + x = y - \text{adz } y, \text{ où } y \text{ est dans } T_1 G,$$

x dans $T_1 X_H^0$, s dans $T_1 T'$. Le problème est de montrer que cette égalité implique que y est dans $T_1 Z_G(t_i)$, car alors le lemme 2 permet de conclure que $s + x = 0$.

Regardons les applications linéaires adz et $1 - \text{adz}$ de $T_1 G$ dans $T_1 G$.

- L'élément z étant dans $Z_G(t_i)$, l'application adz laisse $T_1 Z_G(t_i)$ invariant.

Le tore T' étant dans le centre de $Z_G(t_i)$, $T_1 T'$ est dans le noyau de $1 - \text{adz}$.

- Considérons la grosse cellule de G qui contient le tore T , les sous-groupes à un paramètre correspondant aux racines positives qui contiennent le point u , R_0 le système de racines associé au groupe H (i.e. : soit $A_1 \times A_1$, soit A_2), R le système de racines associé au groupe G . Ecrivons cette grosse cellule sous la forme $V.O.V'$, où O est une grosse cellule dans $Z_G(t_i)$ de la forme $\prod_{\alpha \in R_0} X_{-\alpha} \cdot T \cdot \prod_{\alpha \in R} X_{\alpha}$ où les X_{α} sont les sous-groupes à un paramètre correspondant aux racines α , où $V = \prod_{\beta \in R-R_0} X_{-\beta}$ et où $V' = \prod_{\beta \in R-R_0} X_{\beta}$. Nous voulons montrer que $T_1 V$ et $T_1 V'$ sont laissés invariants par les deux applications linéaires adz et $1 - \text{adz}$, et pour ce faire, nous montrons que V et V' sont laissés invariants par l'action de conjugaison par z .

L'élément t_i du tore T laissant invariant chaque sous-groupe à un paramètre, il suffit de considérer l'action de l'élément unipotent u .

- Notons $x_{\beta}(c_{\beta})$ un élément de X_{β} , où x_{β} est l'isomorphisme : $x_{\beta} : G_a \rightarrow X_{\beta}$, G_a est le groupe additif et c_{β} un élément de G_a . Notons α_1 et α_2 les deux racines simples positives de R_0 . Dans le cas A_2 , u est de la forme $x_{\alpha_1}(c_{\alpha_1}) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_{\alpha_1+\alpha_2})$, où c_{α_1} est non nul et $c_{\alpha_1+\alpha_2}$ peut être nul. Dans le cas $A_1 \times A_1$, u est de la forme $x_{\alpha_1}(c_{\alpha_1})$, où c_{α_1} est non nul.

Soit β une racine positive de $R-R_0$. D'après les règles de conjugaison : cf. [S] p. 111.

$$x_{\alpha}(c_{\alpha}) x_{\beta}(c_{\beta}) x_{\alpha}(-c_{\alpha}) x_{\beta}(-c_{\beta}) \text{ est contenu dans } \left(\prod_{m\alpha+n\beta \in R, m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*} X_{m\alpha+n\beta} \right) X.$$

Or, si α est dans R_0 et β est dans $R-R_0$, $m\alpha+n\beta$ est dans $R-R_0$.

En particulier, V' est stable par l'action de conjugaison de u .

- On regarde l'action de u sur V .

Nous savons que, pour tout représentant n_w , dans le normalisateur $N(T)$ du tore T d'un élément w du groupe de Weyl $W = N(T)/T$, la proposition suivante est vérifiée : cf. [S] p. 98

$$n_w X_{\alpha} n_w^{-1} \subset X_{w(\alpha)}.$$

$$\text{Donc : } n_w x_{\alpha_1}(c_{\alpha_1}) n_w^{-1} = x_{w(\alpha_1)}(c_{w(\alpha_1)}).$$

Soit β une racine négative de $R-R_0$. On a :

$$\begin{aligned} x_{\alpha_1}(c_{\alpha_1}) x_{\beta}(c_{\beta}) x_{\alpha_1}(c_{\alpha_1})^{-1} &= n_w^{-1} x_{w(\alpha_1)}(c_{w(\alpha_1)}) n_w x_{\beta}(c_{\beta}) n_w^{-1} x_{w(\alpha_1)}(-c_{w(\alpha_1)}) n_w \\ &= n_w^{-1} x_{w(\alpha_1)}(c_{w(\alpha_1)}) x_{w(\beta)}(c_{w(\beta)}) x_{w(\alpha_1)}(-c_{w(\alpha_1)}) n_w. \end{aligned}$$

En particulier, s'il existe w dans W tel que :

$$1 - w(\alpha_1) < 0, w(\alpha_1) \in R_0$$

$$1' - \text{ Dans le cas } A_2 \text{ où éventuellement } u \text{ s'écrit } x_{\alpha_1}(c_{\alpha_1}) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_{\alpha_1+\alpha_2}) : w(\alpha_1+\alpha_2) < 0, w(\alpha_1+\alpha_2) \in R_0.$$

$$2 - w(\beta) < 0 \text{ pour tout } \beta < 0 \text{ et dans } R-R_0.$$

on a alors pour ce w :

$$- x_{w(\beta)}(c_{w(\beta)}) \text{ dans } V.$$

$$- x_{w(\alpha_1)}(c_{\alpha_1}) x_{w(\beta)}(c_{w(\beta)}) x_{w(\alpha_1)}(-c_{\alpha_1}) = y \text{ dans } V.$$

$$- n_w^{-1} y n_w \text{ dans } V.$$

Par le même principe, en conjugant éventuellement s'il y a lieu par $x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_{\alpha_1+\alpha_2})$, on reste dans V . (Remarque : $x_{\alpha_1}(c_{\alpha_1})$ et $x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_{\alpha_1+\alpha_2})$ commutent, de sorte que l'ordre de conjugaison est égal).

Appelons C) les conditions 1-1' -et 2- et construisons un w avec ces conditions C).

$$\text{a) Cas } A_1 \times A_1 \quad u = x_{\alpha_1}(c_{\alpha_1})$$

Choisissons $w = s_{\alpha_1}$, la symétrie par rapport à α_1 .

Par définition :

- $s_{\alpha_1}(\alpha_1) = -\alpha_1$. La condition 1 est remplie.

- $s_{\alpha_1}(\beta) = \beta - 2 \frac{(\alpha_1, \beta)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1$

Deux cas se présentent :

i) Dans l'espace de représentation du système de racines R, les hyperplans correspondant aux racines α_1 et $-\beta$ sont orthogonaux. Auquel cas : $(\alpha_1, -\beta) = 0$.

D'où $s_{\alpha_1}(\beta) = \beta$. La condition 2 est remplie.

ii) Dans l'espace de représentation du système de racines R, les hyperplans correspondant aux racines α_1 et $-\beta$ ne sont pas orthogonaux.

Si $-\beta$ est une racine simple : $(\alpha_1, -\beta)$ est négatif, donc est une racine négative dans $R-R_0$. La condition 2 est remplie.

Si $-\beta$ est une racine composée, alors :

$$-\beta = m\alpha_1 + \beta_1 \text{ et } s_{\alpha_1}(\beta) = [(\alpha_1, -\beta) - m]\alpha_1 - \beta_1$$

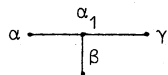
Or, $|(\alpha_1, -\beta)| \leq |\alpha_1| |\beta| = 2$ et l'égalité n'a lieu que si α_1 et $-\beta$ sont colinéaires, soit $\alpha_1 = -\beta$, ce qui est exclu puisque $-\beta$ est dans $R-R_0$.

Comme $(\alpha_1, -\beta) \neq 0$, $|(\alpha_1, -\beta)| = 1$.

Si $m \geq 1$, cela implique que $[(\alpha_1, -\beta) - m] \leq 0$ et la condition 2 est remplie.

Si $m = 0$, $-\beta = \beta_1$.

Ecrivons dans ce cas β_1 sous la forme $a\alpha + b\beta + c\gamma + \beta_2$, où β_2 est orthogonal à α_1 , α et β et γ ne sont pas orthogonaux à α_1 . De sorte que : $(\alpha, \alpha_1) = (\beta, \alpha_1) = (\gamma, \alpha_1) = -1$ et $(\alpha, -\beta) = -a - b - c \leq 0$. La condition 2 est remplie.



Conclusion - Dans le cas $A_1 \times A_1$, s_{α_1} vérifie les conditions C).

b) Cas A_2 . $u = x_{\alpha_1}(c_{\alpha_1})$, la démonstration pour $A_1 \times A_1$ reste valable.

c) Cas A_2 . $u = x_{\alpha_1}(c_{\alpha_1}) x_{\alpha_1 + \alpha_2}(c_{\alpha_1 + \alpha_2})$, et soit $w = s_{\alpha_1 + \alpha_2}$.

$$- s_{\alpha_1 + \alpha_2}(\alpha_1) = -\alpha_2 \text{ et } s_{\alpha_1 + \alpha_2}(\alpha_1 + \alpha_2) = -(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Les conditions 1 et 1' sont remplies.

$$- s_{\alpha_1 + \alpha_2}(\beta) = \beta - 2 \frac{(\beta, \alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)} (\alpha_1 + \alpha_2)$$

Deux cas se présentent :

i) Dans l'espace de représentation du système de racines R, les hyperplans correspondants aux racines $-\beta$ et $\alpha_1 + \alpha_2$ sont orthogonaux. Auquel cas : $(\alpha_1 + \alpha_2, -\beta) = 0$.

D'où $s_{\alpha_1 + \alpha_2}(\beta) = \beta$. La condition 2 est remplie.

ii) Dans l'espace de représentation du système de racines R, les hyperplans correspondant aux racines $\alpha_1 + \alpha_2$ et $-\beta$ ne sont pas orthogonaux.

Si $(\alpha_1 + \alpha_2, -\beta)$ est négatif, la condition 2 est remplie.

Supposons donc que $(\alpha_1 + \alpha_2, -\beta)$ soit positif. Cela implique, de même que précédemment, que $(\alpha_1 + \alpha_2, -\beta) = 1$.

Donc $s_{\alpha_1 + \alpha_2}(\beta) = \beta + (\alpha_1 + \alpha_2)$.

Ecrivons $-\beta$ sous la forme : $-\beta = m\alpha_1 + n\alpha_2 + a\alpha + b\beta + c\gamma + \beta_2$ où β_2 est orthogonal à α_1 et α_2 , où α n'est pas orthogonal à α_1 mais est orthogonal à α_2 , où β et γ ne sont pas orthogonaux à α_2 mais sont orthogonaux à α_1 .

Alors : $(-\beta, \alpha_1 + \alpha_2) = (m\alpha_1 + n\alpha_2 + a\alpha + b\beta + c\gamma, \alpha_1 + \alpha_2)$

$$= 2m + 2n - (m+n) - a - b - c$$

(*) $= m + n - (a + b + c) = 1$

et $s_{\alpha_1 + \alpha_2}(\beta) = -m\alpha_1 - n\alpha_2 - a\alpha - b\beta - c\gamma - \beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2$

$$= -(m-1)\alpha_1 - (n-1)\alpha_2 - a\alpha - b\beta - c\gamma - \beta_2.$$

Supposons $m = 0$.

Alors : $(-\beta, \alpha_2) = (n\alpha_2 + a\alpha + b\beta + c\gamma, \alpha_2) = 2n - b - c$

$$(-\beta, \alpha_1) = (n\alpha_2 + a\alpha + b\beta + c\gamma, \alpha_1) = -n - a$$

Comme $|(-\beta, \alpha_2)| \leq 1$ et $|(-\beta, \alpha_1)| \leq 1$

on a : - Si n et a sont tous deux nuls, cela contredit (*).

- Donc $n + a = 1$. Comme n ne peut être nul, toujours d'après (*), $a = 0$ et $n = 1$.

Les conditions (*) fournissent alors : $b + c = 0$, soit $b = 0$ et $c = 0$, ce qui contredit $(2n - b - c) \leq 1$.

Donc : $m \geq 1$.

Supposons $n = 0$.

Alors :

$$(-\beta, \alpha_2) = (m\alpha_1 + a\alpha + b\beta + c\gamma, \alpha_2) = -m - b - c$$

$$(-\beta, \alpha_1) = (m\alpha_1 + a\alpha + b\beta + c\gamma, \alpha_1) = 2m - a$$

avec : $m + b + c \leq 1$

$$|2m - a| \leq 1$$

Si m est nul, cela contredit (*). Donc $m = 1$ et $b + c = 0$, soit b et c nuls, ce qui de nouveau entraîne par (*) que a est nul, et $2m = 2 \leq 1$ est impossible.

Donc : $n \geq 1$.

La condition 2 est ainsi remplie.

Conclusion - Dans le cas A_2 , où $u = x_{\alpha_1}^{(c_{\alpha_1})}$, s_{α_1} vérifie les conditions C). Dans le cas A_2 , où $u = x_{\alpha_1}^{(c_{\alpha_1})} x_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(c_{\alpha_1 + \alpha_2})}$, $s_{\alpha_1 + \alpha_2}$ vérifie les conditions C).

- Revenons au problème initial ! Les applications linéaires adz et $(1-adz)$ laissent invariants (ce que l'on vient de montrer) les sous-espaces T_1V , T_1V' , $T_1Z_G(t_1)$, dont la somme est l'algèbre de Lie T_1G .

En particulier, si $(1-adz)y$ est dans $T_1Z_G(t_1)$, cela implique que y est dans $Z_G(t_1)$.

Le lemme 2 permet alors de conclure :

$s + x = (1-adz)y$, avec x dans $T_1X_H^0$, s dans T_1T' et y dans $T_1Z_G(t_1)$, implique

que s et x sont nuls.

Le lemme 3 est ainsi démontré.

LEMME 4 - Les remarques 1, 2, 3, relatives au morphisme $\varphi : (X, x) \rightarrow (T/W, [1])$ sont valables, relativement au morphisme $\varphi' : (X', z) \rightarrow (T/W, [t])$. (Eventuellement en prenant un représentant plus petit de X').

Preuve : Il suffit de montrer que le morphisme : $G \times X' \rightarrow G, (g, y) \rightarrow gyg^{-1}$ est lisse au point $(1, z)$. Calculons pour ce l'application tangente en ce point.

$$T_1G \times T_2X' \rightarrow T_2G, (Y, Z) \rightarrow (YZ - zY + Z)$$

Elle est surjective puisque X' est transversale en z à son orbite dans G (lemme 3).

En particulier : - φ' est dominante.

$$- C(\varphi') = C(\pi) \cap X'$$

$$- (\Delta(\varphi'), [t]) = (\Delta(\pi), [t]).$$

LEMME 5 - Le lieu critique $C(\varphi')$ de $\varphi' : (X', z) \rightarrow (T/W, [t])$ est lisse.

Preuve : Le lieu critique $C(\varphi')$ étant constitué des points sous-réguliers de X' (lemme 4), ils sont de la forme $t.y$, où t est un élément quelconque de T' et y un sous-régulier de H qui est dans X_H .

$$\text{Donc : } C(\varphi') = T'.C(X_H).$$

Il suffit alors de traiter le problème dans H , c'est-à-dire dans SL_2 ou $SL_1 \times SL_1$, ce que l'on fait en fin d'exposé, la démonstration ne reposant que sur des calculs. Plus précisément nous montrons que le lieu critique $C(X_H)$ est lisse et qu'il est la normalisation de son discriminant $\Delta(X_H)$.

LEMME 6 - Le lieu critique $C(\pi)$ de $\pi : (G, z) \rightarrow (T/W, [t])$ est lisse au point z .

Preuve : L'application : $G \times X' \rightarrow G, (g, y) \rightarrow gyg^{-1}$ étant lisse en $(1, z)$ (lemme 4), sa restriction à $C(\pi) : G \times C(\varphi') \rightarrow C(\pi)$ est lisse en ce point, par changement de base. En particulier, $C(\pi)$ est localement, au voisinage du point $(1, z)$, le produit

de l'orbite de z dans G et de $C(\varphi')$, donc est lisse.

Notons $C(\pi)^0$ l'ouvert de $C(\pi)$ constitué seulement des points sous-réguliers.

LEMME 6' - L'ouvert $C(\pi)^0$ est normal.

Preuve : Le lieu critique $C(\pi)$ étant une variété déterminentielle, il est Cohen-Macaulay, et en particulier l'ouvert $C(\pi)^0$. On vient de voir qu'il est lisse en codimension 1. Il est donc normal, d'après le théorème de Serre.

Remarque : Ce lemme 6' fournit un résultat partiel du théorème de Kraft et Procesi, non encore publié, qui assure que la variété $C(\pi)$ entière est normale.

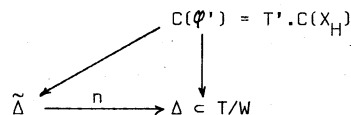
LEMME 7 - Le lieu critique $C(\varphi)$ de $\varphi : X \rightarrow T/W$ est lisse au voisinage du point z .

Preuve : L'application $G \times X \rightarrow G, (g,y) \rightarrow gyg^{-1}$ étant lisse en $(1,z)$, (construction de X), sa restriction à $C(\pi) : G \times C(\varphi) \rightarrow C(\pi)$ est lisse en $(1,z)$, par changement de base. La base $C(\pi)$ étant lisse en z (lemme 6), l'espace $G \times C(\varphi)$ est lisse en $(1,z)$. Donc : $C(\varphi)$ est lisse en z .

Conclusion - Nous avons démontré le premier point : le lieu critique de $\varphi : (X,x) \rightarrow (T/W,[1])$ est lisse en codimension 1, de Cohen-Macaulay, donc normal.

Nous voulons démontrer que le lieu critique $C(\varphi)$ est un revêtement non ramifié de la normalisation $\tilde{\Delta}$ du discriminant.

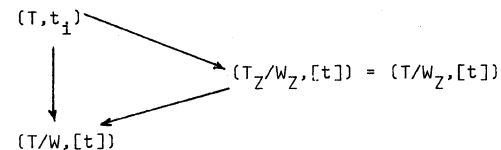
Considérons donc la normalisation $\tilde{\Delta}$ de Δ , et $C(\varphi')$ le lieu critique de φ' . D'après le lemme 5, $C(\varphi')$ est lisse. Nous avons donc la factorisation suivante :



LEMME 8 - Le morphisme $C(\varphi') \rightarrow \tilde{\Delta}$ est lisse au point z .

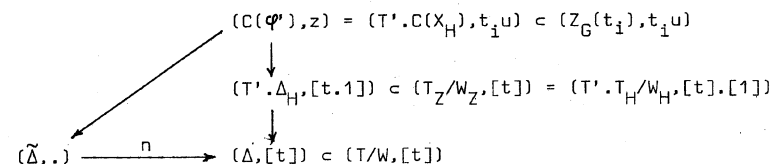
Preuve : Notons W_Z le groupe de Weyl dans $Z_G(t_i)$. Puisque T' est dans le centre de $Z_G(t_i)$, on a : T_Z/W_Z est isomorphe à $T'.T_H/W_H$ au voisinage du point t . (W_H note ici le groupe de Weyl dans H).

De plus, on a la factorisation suivante :



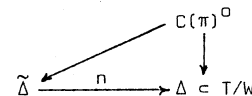
Le sous-groupe de ramification du point t_i , par rapport au morphisme $(T,t_i) \rightarrow (T/W,[t])$ est engendré par les symétries correspondant aux racines α telles que : $\alpha(t_i) = 1$. C'est donc exactement W_H . Ce qui entraîne en particulier que le morphisme $(T_Z/W_Z,[t]) \rightarrow (T/W,[t])$ est lisse au point $[t]$.

Par ailleurs, nous avons le diagramme suivante :



Le morphisme : $(T_Z/W_Z,[t]) \rightarrow (T/W,[t])$ est lisse au point $[t]$. Par changement de base, le morphisme $(T'.\Delta_H,[t].[1]) \rightarrow (\Delta,[t])$ est lisse au point $([t].[1])$. Le lieu critique $(C(\varphi'),z)$ étant la normalisation de $(T'.\Delta_H,[t].[1])$, par changement de base, on obtient que le morphisme : $(C(\varphi'),z) \rightarrow (\tilde{\Delta},.)$ est lisse au point z .

Nous avons vu, (lemme 6'), que le lieu critique $C(\pi)^0$ de $\pi : G \rightarrow T/W$ est normal. Nous avons donc la factorisation suivante :



LEMME 9 - Le morphisme $C(\pi)^0 \rightarrow \tilde{\Delta}$ est lisse partout.

Preuve : Nous savons, (lemme 6), que :

$$T_Z C(\varphi') \oplus T_Z O_G(z) = T_Z C^0(\pi).$$

L'application tangente à $C(\pi)^0 \rightarrow \tilde{\Delta}$ en z s'écrit :

$$T_z C(\varphi') \oplus T_z O_G(z) \rightarrow T_{[t]} \tilde{\Delta}.$$

Comme $T_z C(\varphi') \rightarrow T_{[t]} \tilde{\Delta}$ est de rang maximal, soit $r-1$, et que $\tilde{\Delta}$ est lisse au point $[t]$, nous en concluons que $C(\pi)^0 \rightarrow \tilde{\Delta}$ est de rang maximal au point z , donc lisse en ce point.

Remarquons que nous avons utilisé le fait que la normalisation du discriminant est lisse, ce que nous démontrons en fin d'exposé, car il ne s'agit que de calculs.

Enfin, le morphisme $C(\pi)^0 \rightarrow \tilde{\Delta}$ étant lisse en codimension 1, il est globalement lisse. (Purity of branched locus).

Nous savons, (lemme 7), que le lieu critique $C(\varphi)$ de $\varphi: X \rightarrow T/W$ est normal. Nous avons donc la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} & C(\varphi) & \\ & \swarrow & \downarrow \\ \tilde{\Delta} & \xrightarrow{n} & \Delta \subset T/W \end{array}$$

LEMME 10 - Le morphisme $C(\varphi) \rightarrow \tilde{\Delta}$ est lisse partout.

Preuve : Suivant la même remarque que pour $C(\pi)^0$, il suffit de montrer que $C(\varphi) \rightarrow \tilde{\Delta}$ est lisse en codimension 1. En écrivant la même décomposition que plus haut, mais relative à $C(\varphi)$, (lemme 7), on a : $T_z C(\varphi) + T_z O_G(z) = T_z C(\pi)$, et il suffit de remarquer que l'image de $T_z O_G(z)$ dans $T_{[t]} \tilde{\Delta}$ est nulle, le morphisme $G \rightarrow T/W$ étant équivariant sous l'action de conjugaison de G .

Conclusion - Le lieu critique $C(\varphi)$ est lisse comme espace total d'un morphisme lisse sur une base lisse. c.q.f.d.

Il nous reste à montrer que :

1 - $\tilde{\Delta}$ est lisse.

2 - Pour les cas A_2 et $A_1 \times A_1$, le lieu critique $C(X_H)$ est lisse et est la normalisation de son discriminant.

Point 1 -

Notons D l'image inverse par le morphisme $T \rightarrow T/W$ du discriminant Δ , D_α l'hyperplan de T , composante de D , défini par : $\{t \text{ dans } T \text{ tels que } \alpha(t) = 1\}$.

La variété D est alors la réunion de tels D_α .

Choisissons un de ces α , et notons W_α le sous-groupe de W qui fixe globalement cet hyperplan. Ce sous-groupe est indépendant du choix de α , puisque toutes les racines sont d'égale longueur dans les cas que l'on considère : A, D, E .

LEMME - Dans ces cas A, D et E , le groupe W_α est un groupe de Weyl, c'est-à-dire qu'il est engendré par des symétries.

Preuve : Choisissons pour α la racine la plus "longue", que l'on note α_0 . Le groupe W_{α_0} contient toutes les symétries par rapport aux racines qui sont orthogonales à α_0 , donc le groupe engendré par celles-ci, que l'on note W_0 . Il suffit donc de montrer l'égalité de ces deux groupes, et pour cela, compter leur nombre d'éléments.

Cas A_r : W_0 est le groupe de Weyl de A_{r-2} .

Cas D_r : W_0 est le groupe de Weyl de $A_1 \times D_{r-2}$.

Cas E_6 : W_0 est le groupe de Weyl de A_5 .

Cas E_7 : W_0 est le groupe de Weyl de D_6 .

Cas E_8 : W_0 est le groupe de Weyl de E_7 .

(Pour ceci, voir les diagrammes de Dynkin complétés dans [B] p. 250).

Le groupe de Weyl envoyant chaque racine sur une autre, on peut calculer l'ordre de W_{α_0} en considérant l'orbite sous W d'un élément générique de D . Celui-ci n'est fixé que par 1 et s_{α_0} .

Donc : cardinal de l'orbite de x dans T = cardinal de l'orbite de x dans D_{α_0} multiplié par cardinal du nombre d'hyperplans D_α .

$$|W|/2 = |W_{\alpha_0}| \times \text{nombre de racines positives.}$$

Ceci permet de calculer l'ordre de W_{α_0} , et on trouve ainsi que c'est le même que celui de W_0 .

On utilise alors le théorème de Chevalley pour conclure que : $D_{\alpha_0}/W_{\alpha_0}$ est lisse.
cf. [Ch].

Par ailleurs, on a la factorisation suivante :

$$T \longrightarrow T/W_0 \longrightarrow T/W, \text{ donc par restriction à } D_{\alpha_0} :$$

$$D_{\alpha_0} \longrightarrow D_{\alpha_0}/W_{\alpha_0} \longrightarrow \Delta.$$

Le morphisme : $D_{\alpha_0}/W_{\alpha_0} \longrightarrow \Delta$ est génériquement 1-1 d'après le calcul des orbites précédemment fait, et $D_{\alpha_0}/W_{\alpha_0}$ étant lisse est en particulier normal. C'est donc la normalisation.

Point 2 -

i) Cas SL_2 :

$$x = \begin{pmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad u \neq 0$$

$$X_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a' & c' & c' \\ a & 0 & c \end{pmatrix} \right\} \quad \text{où } c' = c^{-1}$$

$$X = X_0 x = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u & 0 \\ a' & a'u+c' & c' \\ a & a'u & c \end{pmatrix} \right\} = C^* \times C^3$$

L'application φ s'écrit :

$$C^* \times C^3 \longrightarrow C^2, (c, a, c', c') \longmapsto (\alpha, \beta) \quad \text{avec :}$$

$$\alpha = 1 + c + a'u + c^{-1}$$

$$\beta = 1 + ca'u - c'au + c + c^{-1}$$

Le lieu critique $C(\varphi)$ est donné par les mineurs 2×2 de la matrice jacobienne, soit :

$$\begin{cases} a = c' = 0 \\ (c-1)(1-c^{-2}) - a'u = 0. \end{cases}$$

$$\text{Donc : } (C(\varphi), x) = (C^*, 1) \subset C^* \times C^3$$

L'immersion est donnée par la deuxième équation de $C(\varphi)$.

Le lieu discriminant de φ est donné par :

$$C^* \longrightarrow C^2, c \longmapsto (2c + c^{-2}, c^2 + 2c^{-1}).$$

Il reste à montrer que ce morphisme est la normalisation de son image.

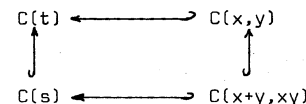
LEMME - Le morphisme $n : C^* \longrightarrow C^2$ est génériquement 1-1.

Preuve : On a : $C[2t + t^{-2}, t^2 + 2t^{-1}] \hookrightarrow C[t, t^{-1}]$

On veut montrer que : $C(2t + t^{-2}, t^2 + 2t^{-1}) = C(t, t^{-1}) = C(t)$. Faisons opérer le groupe symétrique à deux éléments S_2 sur $C(t)$ par : $t \longmapsto t^{-1}$. Alors, $C(t)^{S_2} = C(s)$, où $s = t + t^{-1}$. Cette action laisse $C(x, y)$ invariant et échange x et y .
($x = 2t + t^{-2}, y = t^2 + 2t^{-1}$).

$$\text{Donc, } C(x, y)^{S_2} = C(x+y, xy) \quad \text{où } x + y = s^2 + 2s - 2 \text{ et } xy = 2s^3 + 3 - 6s.$$

On a le diagramme :



et les flèches horizontales sont d'ordre égal.

Notons $k_1 = C(x+y, xy)$. On a $s_1 = 2s^3 - 6s + 3/s^2 + 2s - 2$, et s_1 est dans k_1 . Or, $s_1 = 2s + z$, où z est un élément de k_1 . Donc s est dans k_1 et $C(x+y, xy) = C(s)$.

Conclusion - $C(x, y) = C(t)$.

LEMME - Le morphisme n est fini.

Preuve : Il est affine : $\text{Spec } C[x, y]/(xy-1) \longrightarrow \text{Spec } C[2x+y^2, x^2+2y]$. Il suffit de montrer qu'il est quasi-fini : or, $\text{Spec } C[x, y]/(xy-1)$ est irréductible. c.q.f.d.

Conclusion - $C(\varphi)$ est la normalisation de $\Delta(\varphi)$.

ii) Cas $A_1 \times A_1$:

$$x = \text{Id} \times \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u \neq 0, \quad x \in \text{SL}_2 \times \text{SL}_2$$

Il suffit donc de traiter le morphisme suivant :

$$n : \text{SL}_2 \times \begin{pmatrix} 1 & u \\ v & vu+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$(a, b, c, d, v) \longmapsto (a+d, 2+uv)$$

Le lieu critique de n a pour équations :

$$\begin{cases} b = c = 0 \\ d - a = 0 \text{ soit } a = d = 1. \end{cases}$$

Le morphisme n s'écrit alors :

$$n : 1 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}(1, v) \text{ — } uv, \text{ qui vérifie toutes les propriétés requises.}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [A] M. ARTIN - On isolated rational singularities of surfaces. Am. J. of Math. n°88, 1966.
- [B] BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4, 5 et 6.
- [Br] E. BRIESKORN - Singular elements of semi-simple algebraic groups. Compte-rendu du Congrès International de Nice. 1970.
- [Ch] C. CHEVALLEY - Invariants of finite groups generated by reflections. Am. J. of Math. n°77, 1955, pp. 778-782.
- [S.Ch] C. CHEVALLEY - Séminaire Chevalley E.N.S. 1956-58. Exposé n°17 : les sous-groupes radiciels.
- [D.V] P. DUVAL - On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction. Proc. of Cambridge n°30, 1934.

- [E] H. ESNAULT - Thèse de 3ème cycle. Paris 7.
- [H] R. HARTSHORNE - Algebraic Geometry. Springer Verlag (édition de 1978).
- [S1] P. SLODOWY - Einfache Singularitäten und einfache algebraische Gruppen. [Universität Regensburg] *1
- [S] R. STEINBERG - Conjugacy classes in algebraic groups. Lectures Notes n°366. Springer-Verlag. (Edition de 1974).
- *1 P. Slodowy - Simple Singularities and Simple Algebraic Groups. Berlin (u.a.) : Springer, 1980. (Lecture Notes in Mathematics, 815). (Series : Mathematisches Institut der Universität Bonn).