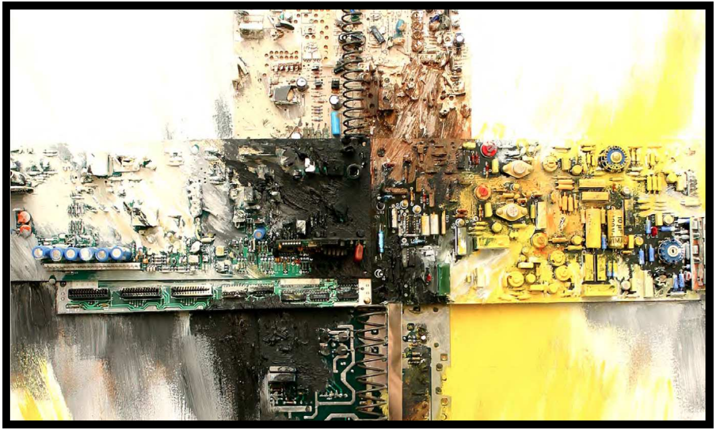
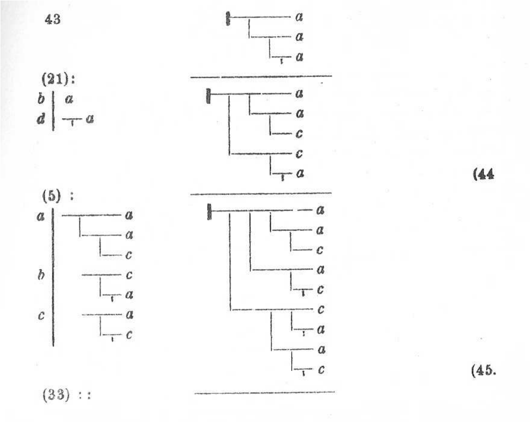


F(o,r,m,a,l,e) L(o,g,i,k)
Eine sehr kurze und unvollständige Einführung

Entwicklung der modernen Logik seit Ende des 19. Jahrhunderts

Gottlob Frege
(1848-1925)



- Begriffsschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (1879)
  - Prädikatenlogik (höherer Stufe) als formale Sprache

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.
Er ist ein Kind von Christoph.
Alle Jungen mögen Fussball.

Formale Logik

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max ist ein kleiner Junge.	$\mathit{istKlein}(\mathit{max}) \wedge \mathit{istJunge}(\mathit{max})$
Er ist ein Kind von Christoph.	$\mathit{istKindVon}(\mathit{max}, \mathit{christoph})$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X. \mathit{istJunge}(X) \supset \mathit{liebtFussball}(X)$

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\ istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: *Liebt Max Fussball?*	Theorem: $liebtFussball(max)$

Logische Konnektive

(weitere Konnektive: $\neg$, $\vee$, $\equiv$, $\exists$, $=$)

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Logische Konnektive
Individuensymbole

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.
Er ist ein Kind von Christoph.
Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$\mathit{istKlein}(\mathit{max}) \wedge \mathit{istJunge}(\mathit{max})$
$\mathit{istKindVon}(\mathit{max}, \mathit{christoph})$
$\forall X.\ \mathit{istJunge}(X) \supset \mathit{liebtFussball}(X)$

Theorem: $\mathit{liebtFussball}(\mathit{max})$

Logische Konnektive
Individuensymbole
Prädikaten- und Relationensymbole

Formaler Kalkül (System abstrakter Regeln)

$$\frac{\triangle \land \square}{\triangle} \qquad \frac{\triangle \land \square}{\square} \qquad \frac{\triangle \quad \square}{\triangle \land \square} \qquad \frac{istKlein(max) \land istJunge(max)}{istJunge(max)}$$

$$\frac{\forall X. \square}{[t \to X]\square} \quad \cdots \qquad \frac{\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)}{istJunge(max) \supset liebtFussball(max)}$$

$$\frac{\triangle \quad \triangle \supset \square}{\square} \quad \cdots \qquad \frac{istJunge(max) \qquad istJunge(max) \supset liebtFussball(max)}{liebtFussball(max)}$$

Kalkül des Natürlichen Schliessens — Gerhard Gentzen (1909-1945)

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$$\frac{istKlein(max) \wedge istJunge(max)}{}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$$\frac{istKlein(max) \wedge istJunge(max)}{istJunge(max)}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$$\frac{istKlein(max) \wedge istJunge(max)}{istJunge(max)} \qquad \frac{\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)}{}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$$\frac{istKlein(max) \wedge istJunge(max)}{istJunge(max)} \qquad \frac{\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)}{istJunge(max) \supset liebtFussball(max)}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \land istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$$\frac{\dfrac{istJunge(max) \land istJunge(max)}{istJunge(max)} \qquad \dfrac{\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)}{istJunge(max) \supset liebtFussball(max)}}{liebtFussball(max)}$$

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & regnet \wedge kalt \\ \wedge & (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse) \\ \supset & glatteStrasse \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & istJunge(max) \\ \wedge & \forall X.istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\ \supset & liebtFussball(max) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi.positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\exists X.istGott(X)$$
$$\Box \exists X.istGott(X)$$
$$\Diamond \exists X.istGott(X)$$

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$
\begin{array}{ll}
 & regnet \wedge kalt \\
\wedge & (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse) \\
\supset & glatteStrasse
\end{array}
$$

- Logik erster Stufe

$$
\begin{array}{ll}
 & istJunge(max) \\
\wedge & \forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\
\supset & liebtFussball(max)
\end{array}
$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi. positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$
\begin{array}{l}
\exists X. istGott(X) \\
\Box \exists X. istGott(X) \\
\Diamond \exists X. istGott(X)
\end{array}
$$

Elementare Aussagen (Wahr oder Falsch)

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & regnet \wedge kalt \\ \wedge & (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse) \\ \supset & glatteStrasse \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & istJunge(max) \\ \wedge & \forall X.istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\ \supset & liebtFussball(max) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi.positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\exists X.istGott(X)$$
$$\Box \exists X.istGott(X)$$
$$\Diamond \exists X.istGott(X)$$

Prädikat Individuum Allaussage (Individuen)

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & regnet \land kalt \\ \land & (regnet \land kalt \supset glatteStrasse) \\ \supset & glatteStrasse \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & istJunge(max) \\ \land & \forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\ \supset & liebtFussball(max) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi. positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\begin{array}{l} \exists X. istGott(X) \\ \Box \exists X. istGott(X) \\ \Diamond \exists X. istGott(X) \end{array}$$

Prädikat Individuum Allaussage (Individuen)

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & \mathit{regnet} \land \mathit{kalt} \\ \land & (\mathit{regnet} \land \mathit{kalt} \supset \mathit{glatteStrasse}) \\ \supset & \mathit{glatteStrasse} \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & \mathit{istJunge}(\mathit{max}) \\ \land & \forall X.\mathit{istJunge}(X) \supset \mathit{liebtFussball}(X) \\ \supset & \mathit{liebtFussball}(\mathit{max}) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$\mathit{istGott}(X) \equiv \forall \phi.\mathit{positiv}(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\begin{array}{l} \exists X.\mathit{istGott}(X) \\ \Box\exists X.\mathit{istGott}(X) \\ \Diamond\exists X.\mathit{istGott}(X) \end{array}$$

Funktionen/Prädikate: in Allaussage, als Argument

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & regnet \wedge kalt \\ \wedge & (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse) \\ \supset & glatteStrasse \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & istJunge(max) \\ \wedge & \forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\ \supset & liebtFussball(max) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi. positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\exists X. istGott(X)$$

$$\Box \exists X. istGott(X)$$

$$\Diamond \exists X. istGott(X)$$

Möglicherweise gilt ...

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$
\begin{array}{ll}
 & regnet \land kalt \\
\land & (regnet \land kalt \supset glatteStrasse) \\
\supset & glatteStrasse
\end{array}
$$

- Logik erster Stufe

$$
\begin{array}{ll}
 & istJunge(max) \\
\land & \forall X.istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\
\supset & liebtFussball(max)
\end{array}
$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi.positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\exists X.istGott(X)$$

$$\Box \exists X.istGott(X)$$

$$\Diamond \exists X.istGott(X)$$

Notwendigerweise gilt ...

Theorembeweiser

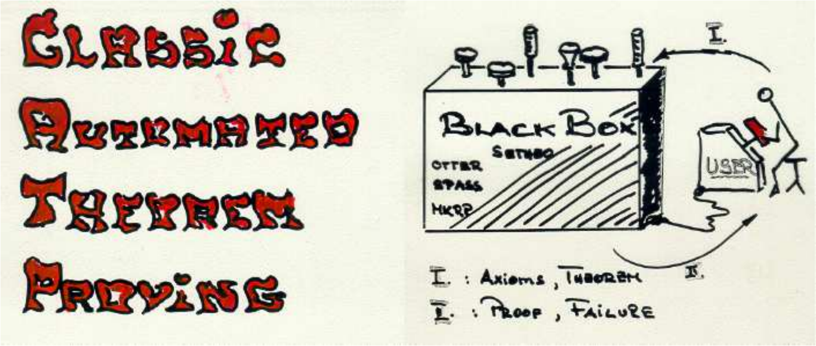


Bild: Jörg Siekmann

Demo: Theorembeweiser

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Eingabe an Theorembeweiser (`http://www.tptp.org`)

```
fof(a1,axiom, istKlein(max) & istJunge(max) ).
fof(a2,axiom,( istKindVon(max,christoph) )).
fof(a3,axiom,( ![X]:(istJunge(X) => liebtFussball(X)) )).

fof(c,conjecture,( liebtFussball(max) )).
```