Towards Higher-Order Theorem-Proving with Equality

Christoph Benzmüller
In Zusammenarbeit mit Michael Kohlhase

AG Siekmann

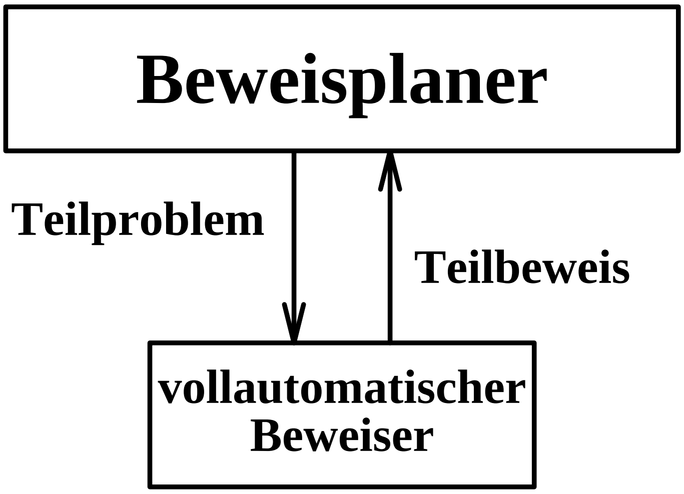
5. Oktober 1995

Übersicht

- Motivation
- Resolution
- Leibnizgleichheit
- Paramomulation
- RUE-Resolution
- Beispiel

Automatisches Beweisen in Ω

Ziel: Unterstützung des Ω-Beweisplaners



Planungsebene:

Arbeitsprache höherer Stufe

$\Longrightarrow$ Beweiser höherer Stufe

LEO: <u>L</u>ogic <u>E</u>ngine for <u>O</u>mega

LEO (Logic Engine for Omega)
Ein automatischer Beweiser höherer Stufe

Basis: **Resolutionskalkül höherer Stufe**

- Klauseltransformation
- Prä-Unifikation
- Resolution, Faktorisierung, primitive Substitution

Anwendungsgebiet: **Mathematik**

Problem: **Gleichheitsbehandlung**

Resolution

$$\frac{N^\alpha \vee C \quad M^\beta \vee D \quad \alpha \neq \beta,\ \alpha,\beta \in \{T,F\}}{C \vee D \vee N \neq^? M}\, Res$$

$$\frac{N^\alpha \vee M^\alpha \vee C}{M^\alpha \vee C \vee N \neq^? M}\, Fak$$

$$\frac{(F_\gamma \overline{U^k})^\alpha \vee C \quad P\ subst.\ f\ddot{u}r\ F^+}{(F_\gamma \overline{U^k})^\alpha \vee C \vee F \neq^? P}\, Prim$$

P ist ein allgemeinster Term von Typ γ, mit einer logischen Konstanten $K \in \{\neg, \vee, \Pi^\beta | \beta \in \mathcal{T}\}$ als Kopfsymbol

$$\frac{C \vee \mathcal{E} \vee \mathcal{E}_\sigma}{\mathcal{C}}\, RP$$

$\mathcal{E}_\sigma \equiv X_1^+ \neq^? A_1 \vee \ldots \vee X_n^+ \neq^? A_n$, wobei die X_i^+ sonst nirgends in $\mathcal{E} \vee \mathcal{E}_\sigma$ frei auftreten und
$\mathcal{C} \in CNF(\sigma(C) \vee \mathcal{E})$

Leibnizgleichheit

$$\boxed{=^{\alpha} \; := \; \lambda X_\alpha.\lambda Y_\alpha.(\forall P_{\alpha\to o}.PX \Rightarrow PY)}$$

Beispiel:

Kodierung der Gleichung $L_\alpha = R_\alpha$

$$\mathsf{C} := \; (P_{\alpha\to o}L_\alpha)^F \vee (P_{\alpha\to o}R_\alpha)^T$$

Problem:

Flexible Literale dürfen durch die Regel der **primitiven Substitution** instanziiert werden:

- $\boxed{[(\lambda X_\alpha.\neg(P^1_{\alpha\to o}X)) \; / \; P]}$

  $\mathsf{C} \longrightarrow \quad (P^1L)^T \vee (P^1R)^F$

- $\boxed{[(\lambda X_\alpha.(P^2_{\alpha\to o}X) \vee (P^3_{\alpha\to o}X)) \; / \; P]}$

  $\mathsf{C} \longrightarrow \quad (P^2L)^F \vee (P^2R)^T \vee (P^3R)^T$

  $\qquad\qquad (P^3L)^F \vee (P^2R)^T \vee (P^3R)^T$

- $\boxed{[(\lambda X_\alpha.\Pi^\tau(P^5_{\alpha\to\tau\to o}X)) \; / \; P]}$ f. jed. Typ τ

  $\mathsf{C} \longrightarrow \quad (P^5LV^-_\tau)^F \vee (P^5RW_\tau)^T$

- ... weitermachen auf neuen Klauseln

Spezielle Verfahren zur Gleichheitsbehandlung auf höherer Stufe

Vorgehen:
Orientierung an erster Stufe und Übertragung auf höhere Stufe

- $\boxed{\text{Termersetzung}}$

- $\boxed{\textbf{Differenzreduzierung}}$

Auswahl:

1. Paramodulation
2. RUE-Resolution kombiniert mit verallgemeinerter Rippling-Technik
3. ...???...

Resolution (mit primitiven Symbolen $=^\alpha$)

$$\frac{N^\alpha \vee C \quad M^\beta \vee D \quad \alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in \{T, F\}}{C \vee D \vee (N = M)^F}\, Res$$

$$\frac{N^\alpha \vee M^\alpha \vee C}{M^\alpha \vee C \vee (N = M)^F}\, Fak$$

$$\frac{(F_\gamma \overline{U^k})^\alpha \vee C \quad P\ subst.\ für\ F^+}{(F_\gamma \overline{U^k})^\alpha \vee C \vee (F = P)^F}\, Prim$$

P ist ein allgemeinster Term von Typ γ, mit einer logischen Konstanten $K \in \{\neg, \vee, \Pi^\beta | \beta \in \mathcal{T}\}$ als Kopfsymbol

$$\frac{C \vee \mathcal{E} \vee \mathcal{E}_\sigma}{\mathcal{C}}\, RP$$

$\mathcal{E}_\sigma \equiv X_1^+ \neq^? A_1 \vee \ldots \vee X_n^+ \neq^? A_n$, wobei die X_i^+ sonst nirgends in $\mathcal{E} \vee \mathcal{E}_\sigma$ frei auftreten und
$\mathcal{C} \in CNF(\sigma(C) \vee \mathcal{E})$

Erinnerung an Paramodulation erster Stufe

Paramodulationsregel:

$$\frac{A[T] \vee C \quad L = R \vee D \quad \sigma(T) = \sigma(L)}{\sigma(A[R] \vee C \vee D)}\ Para$$

Reflexivitätsaxiom:

$$\boxed{\mathsf{X} = \mathsf{X}}$$

Wird benötigt zum Eliminieren von Literalen $\neg S = T$, falls S und T unifizierbar.

Paramodulation höherer Stufe

Regel:

$$\frac{(A[T_\beta])^\alpha \vee C \quad (L_\beta = R_\beta)^T \vee D}{(A[R])^\alpha \vee C \vee D \vee (T = L)^F}\, Para$$

Vorsicht falls T Variablen enthält, die in $A[T]$ gebunden sind

- **kein Reflexivitätsaxiom** oder entspr. Regel notwendig

$$\frac{(A_{\alpha\to\beta} = B_{\alpha\to\beta})^T \vee C}{(A_{\alpha\to\beta} Z_\alpha = B_{\alpha\to\beta} Z_\alpha)^T \vee C}\, Ext$$

Vorteil: **weniger flexible Literale**

Problem: Bestimmung von T (wie in FOL)

Erinnerung an RUE-Resolution erster Stufe

RUE-Regel: (Resolution by Unification and Equality)

$$\frac{A \vee C \quad \neg B \vee D}{\sigma(C \vee D) \vee \neg(L_i = R_i) \quad [L_i, R_i] \in M} RUE$$

wobei σ bel. und M bel. Differenzmenge von $\sigma(A)$ und $\sigma(B)$

NRF-Regel: (Negative Reflexive Function)

$$\frac{\neg S = T \vee C}{\sigma(C) \vee \neg(L_i = R_i) \quad [L_i, R_i] \in M} RUE$$

wobei σ bel. und M bel. Differenzmenge von $\sigma(S)$ und $\sigma(T)$

Bsp. für Differenzmenge:

$$A := P(g(f(x), b), f(a)),\ B := P(g(h(a), b), f(b))$$

$$\blacktriangleright\ M := \{[f(x), h(a)], [a, b]\}$$

RUE-Resolution höherer Stufe

Beobachtung: Resolutionsregel höherer Stufe erinnert sehr stark der RUE-Resolution auf erster Stufe

Resolutionsregel = RUE-Regel:

$$\frac{N^\alpha \vee C \quad M^\beta \vee D \quad \alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in \{T, F\}}{C \vee D \vee (N = M)^F}\ RES$$

NRF-Regel: durch Unifikation

Problem: Differenzmengenbestimmung

$$\frac{(f\overline{L_n} = g\overline{R_n})^F \vee C}{C \vee (f = g)^F \vee (L_1 = R_1)^F \vee \ldots \vee (L_n = R_n)^F}\ D_1$$

$$\frac{((A_\alpha = B_\alpha) = (C_\alpha = D_\alpha))^F \vee C}{(A_\alpha = D_\alpha)^F \vee (B_\alpha = C_\alpha)^F \vee C}\ D_2$$

$$\frac{(A_{\alpha\to\beta} = B_{\alpha\to\beta})^T \vee C}{(A_{\alpha\to\beta} Z_\alpha = B_{\alpha\to\beta} Z_\alpha)^T \vee C}\ Ext$$

RUE-Resolution und verallgemeinerte Rippling-Technik

Ziel: Eliminieren von negierten Gleichheitsliteralen $(S = T)^F$

- Ermitteln der syntaktischen Differenz zwischen S und T
- Auswahl (Heuristiken) von Gleichungen $(L_i = R_i)^T$ zur Reduzierung dieser Differenz
- Anwendung von Gleichungen mithilfe der Rippling-Technik
  (Gefärbte Unifikation höherer Stufe bereits definiert durch Dieter Hutter und Michael Kohlhase)

Beispiel

Für jede Funktion F, die Komposition zweier Funktionen G und H ist, gilt: Falls G und H einen gemeinsamen Fixpunkt besitzen, dann hat auch F einen Fixpunkt.

$$
\begin{aligned}
&\forall F_{\alpha\to\alpha}. \\
&\quad [\exists G_{\alpha\to\alpha}.\exists H_{\alpha\to\alpha}.\{F = (\lambda X_\alpha.G(HX))\} \wedge \\
&\qquad \{\exists Y_\alpha.GY = Y \wedge Y = HY\}] \\
&\Rightarrow \{\exists X_\alpha.FX = X\}
\end{aligned}
$$

CNF mit primitiven $=^\alpha$:

$\boxed{1}$ $(F^- X = X)^F$ $\boxed{2}$ $(F^- = (\lambda X.G^-(H^- X)))^T$
$\boxed{3}$ $(Y^- = H^- Y^-)^T$ $\boxed{4}$ $(H^- Y^- = Y^-)^T$

CNF mit Leibnizgleichheit:

$\boxed{1a}$ $(P_1^-(F^- X))^T$ $\boxed{1b}$ $(P_1^- X)^F$
$\boxed{2}$ $(P_2 F^-)^F \vee (P_2(\lambda X.G^-(H^- X)))^T$
$\boxed{3}$ $(P_3(G^- Y^-))^F \vee (P_3 Y^-)^T$
$\boxed{4}$ $(P_4 Y^-)^F \vee (P_4(H^- Y^-))^T$

Beweis mit Leibnizgleichheit

$\boxed{\text{1a}}\ (P_1^-(F^-X))^T \qquad \boxed{\text{1b}}\ (P_1^-X)^F$

$\boxed{2}\ (P_2F^-)^F \vee (P_2(\lambda X.G^-(H^-X)))^T$

$\boxed{3}\ (P_3(G^-Y^-))^F \vee (P_3Y^-)^T$

$\boxed{4}\ (P_4Y^-)^F \vee (P_4(H^-Y^-))^T$

Res $\boxed{\text{1a}}$ $\boxed{2}$:

$\boxed{5}\ (P_2(\lambda X.G^-(H^-X)))^T \vee (P_1^-(F^-X) = P_2F^-)^F$

Uni*($[(\lambda Y.P_1^-(YX)) \ / \ P_2]$) $\boxed{5}$, RP:

$\boxed{5'}\ (P_1^-(G^-(H^-X)))^T$

Prim($[(\lambda X.\neg(P_5X)) \ / \ P_4]$), RP(mit CNF):

$\boxed{4'}\ (P_5(H^-Y^-))^F \vee (P_5Y^-)^T$

Res $\boxed{5'}$ $\boxed{4'}$:

$\boxed{6}\ (P_5Y^-)^T \vee (P_1^-(G^-(H^-X)) = (P_5(H^-Y^-)))^F$

Uni*($[(\lambda Y.P_1^-(G^-Y)) \ / \ P_5], [Y^- \ / \ X]$) $\boxed{6}$, RP:

$\boxed{6'}\ (P_1^-(G^-Y^-))^T$

Res $\boxed{6'}$ $\boxed{3}$:

$\boxed{7}\ (P_3Y^-)^T \vee (P_1^-(G^-Y^-) = P_3(G^-Y^-))^F$

Uni*($[(\lambda Y.P_1^-Y) \ / \ P_3]$) $\boxed{7}$, RP:

$\boxed{7'}\ (P_1^-Y^-)^T$

Res $\boxed{7'}$ $\boxed{\text{1b}}$, Uni*($[Y^- \ / \ X]$):

$\boxed{7}\ \blacksquare$

Beweis mit Paramodulation

$\boxed{1}\ (F^- X = X)^F$ $\boxed{2}\ (F^- = (\lambda X.G^-(H^- X)))^T$
$\boxed{3}\ (G^- Y^- = Y^-)^T$ $\boxed{4}\ (Y^- = H^- Y^-)^T$

$$\frac{\text{Para } \boxed{2} \text{ in } \boxed{1}\text{, Uni}^*([])\text{:}}{\boxed{5}\ (G^-(H^- X) = X)^F}$$

$$\frac{\text{Para } \boxed{4} \text{ in } \boxed{5}\text{, Uni}^*([Y^- \ / \ X])\text{, RP:}}{\boxed{6}\ (G^- Y^- = Y^-)^F}$$

$$\frac{\text{Res } \boxed{3}\ \boxed{6}\text{, Uni}^*([])\text{:}}{\boxed{7}\ \blacksquare}$$

Beweis mit RUE-Resolution

$\boxed{1}\ (F^{-}X = X)^{F}$ $\boxed{2}\ (F^{-} = (\lambda X.G^{-}(H^{-}X)))^{T}$

$\boxed{3}\ (G^{-}Y^{-} = Y^{-})^{T}$ $\boxed{4}\ (Y^{-} = H^{-}Y^{-})^{T}$

Res $\boxed{3}$ $\boxed{1}$:

$\boxed{5}\ ((G^{-}Y^{-} = Y^{-}) = (F^{-}X = X))^{F}$

Uni*([Y^{-} / X]) $\boxed{5}$:

$\boxed{5'}\ (G^{-}Y^{-} = F^{-}Y^{-})^{F}$

Ext $\boxed{2}$:

$\boxed{6}\ (F^{-}Z = G^{-}(H^{-}Z))^{T}$

Res $\boxed{6}$ $\boxed{5'}$:

$\boxed{7}\ ((F^{-}Z = G^{-}(H^{-}Z)) = (G^{-}Y^{-} = F^{-}Y^{-}))^{F}$

D_2 $\boxed{7}$:

$\boxed{7'}\ ((F^{-}Z = F^{-}Y^{-}) = (G^{-}(H^{-}Z) = G^{-}Y^{-}))^{F}$

Uni*([Y^{-} / X]) $\boxed{7'}$:

$\boxed{7''}\ (H^{-}Y^{-} = Y^{-})^{F}$

Res $\boxed{7''}$ $\boxed{4}$, D_2, Uni*:

$\boxed{8}\ \blacksquare$

Zusammenfassung

- keine Leibnizgleichheit verwenden
- spezielle Verfahren entwickeln
- erste Ideen zu Paramodulation und RUE-Resolution

Aufgaben

- Paramodulation weiter untersuchen
- RUE-Resolution weiter untersuchen
- verallg. Rippling-Technik / Heuristiken
- Kombination mit RUE-Resolution
- ...

Beispiel Paramodulation

We proof $\lambda X_\alpha . f_{\alpha\to\alpha} X a = \lambda X_\alpha . g_{\alpha\to\alpha} X b \Rightarrow (p_{\alpha\to o}(faa) \Rightarrow (\exists X_\alpha . p(gXb)))$ The CNF of the negated theorem is:

$\boxed{1}$ $(\lambda X.fXa = \lambda X.gXb)^T$
$\boxed{2}$ $(p(faa))^T$
$\boxed{3}$ $(p(gX^+b))^F$

Para($\boxed{1}$ in $\boxed{2}$) : $\boxed{4}$ $(p((\lambda X.gXb)a))^T \vee (fa = \lambda X.fXa)^F$
β-Red($\boxed{4}$) : $\boxed{5}$ $(p(gab))^T \vee (fa = \lambda X.fXa)^F$
Res($\boxed{5}$,$\boxed{3}$) : $\boxed{6}$ $(fa = \lambda X.fXa)^F \vee (p(gab) = p(gX^+b))^F$
Sim($\boxed{6}$) : $\boxed{7}$ $(faZ = (\lambda X.fXa)Z)^F \vee (p(gab) = p(gX^+b))^F$
β-Red($\boxed{7}$) : $\boxed{9}$ $(faZ = fZa)^F \vee (p(gab) = p(gX^+b))^F$
Sim($\boxed{9}$) : $\boxed{10}$ $(a = Z)^F \vee (Z = a)^F \vee (p(gab) = p(gX^+b))^F$
Sim($\boxed{10}$) : $\boxed{11}$ $(a = Z)^F \vee (Z = a)^F \vee (p(gab) = p(gX^+b))^F$
Uni*($\boxed{11}$ mit $[a/Z]$) : $\boxed{12}$ $(p(gab) = p(gX^+b))^F$
Sim($\boxed{12}$) : $\boxed{13}$ $(gab = gX^+b)^F$
Sim($\boxed{13}$) : $\boxed{14}$ $(a = X^+)^F \vee (b = b)^F$
Uni*($\boxed{14}$ mit $[a/X]$) : $\boxed{15}$ $\Box$

chris@cs.uni-sb.de

Beispiel RUE-Resolution

We again proof $\lambda X_\alpha . f_{\alpha\to\alpha} X a = \lambda X_\alpha . g_{\alpha\to\alpha} X b \Rightarrow (p_{\alpha\to o}(faa) \Rightarrow (\exists X_\alpha . p(gXb)))$ The CNF of the negated theorem is:

$\boxed{1}$ $(\lambda X.fXa = \lambda X.gXb)^T$
$\boxed{2}$ $(p(faa))^T$
$\boxed{3}$ $(p(gX^+b))^F$

Ext($\boxed{1}$) : $\boxed{4}$ $((\lambda X.fXa)Z = (\lambda X.gXb)Z)^T$
β-Red($\boxed{4}$) : $\boxed{5}$ $(fZa = gZb)^T$
Res($\boxed{2}$,$\boxed{3}$) : $\boxed{6}$ $(p(faa) = p(gX^+b))^F$
Sim($\boxed{6}$) : $\boxed{7}$ $(faa = gXb)^F$
Res($\boxed{5}$,$\boxed{7}$) : $\boxed{8}$ $((fZa = gZb) = (faa = gXb))^F$
Sim($\boxed{8}$) : $\boxed{9}$ $(fZa = faa)^F \vee (gZb = gXb)^F$
Sim*($\boxed{9}$) : $\boxed{10}$ $(f = f)^F \vee (Z = a)^F \vee (a = a)^F \vee (g = g)^F \vee (Z = X)^F \vee (b = b)^F$
Sim*($\boxed{10}$) : $\boxed{11}$ $(Z = a)^F \vee (Z = X)^F$
Uni*($\boxed{11}$) : $\boxed{12}$ $\Box$

Klauseltransformation

$$\frac{\mathcal{R}.C \vee (A \wedge B)^{\mathtt{T}}}{\mathcal{R}.C \vee A^{\mathtt{T}}}\, RC(\wedge_l) \qquad \frac{\mathcal{R}.C \vee (A \wedge B)^{\mathtt{T}}}{\mathcal{R}.\langle \Gamma \colon \mathcal{R}\rangle ..C \vee B^{\mathtt{T}}}\, RC(\wedge_r)$$

$$\frac{\mathcal{R}.C \vee (A \wedge B)^{\mathtt{F}}}{\mathcal{R}.C \vee A^{\mathtt{F}} \vee B^{\mathtt{F}}}\, RC(\vee)$$

$$\frac{\mathcal{R}.C \vee (\neg A)^{\mathtt{T}}}{\mathcal{R}.C \vee A^{\mathtt{F}}}\, RC(\neg^{T}) \qquad \frac{\mathcal{R}.C \vee (\neg A)^{\mathtt{F}}}{\mathcal{R}.C \vee A^{\mathtt{T}}}\, RC(\neg^{F})$$

$$\frac{\mathcal{R}.C \vee (\Pi^{\alpha} A)^{\mathtt{T}}}{\mathcal{R}.C \vee AX^{\mathtt{T}}}\, RC(\forall)$$

$$\frac{\mathcal{R}.C \vee (\Pi^{\alpha} A)^{\mathtt{F}}}{\mathcal{R} \cup (Free(A) \times \{X^{-}\}).C \vee (AX^{-})^{\mathtt{F}}}\, RC(\exists)$$

Simplifikation

$$\frac{(\lambda X_\alpha . A) =^? (\lambda Y_\alpha . B) \wedge \mathcal{E} \quad Z_\alpha \; neue \; Variable}{[Z/X]A =^? [Z/Y]B \wedge \mathcal{E}} \; Sim(\alpha)$$

$$\frac{(\lambda X_\alpha . A) =^? B \wedge \mathcal{E} \quad Z \notin Dom(\Gamma)}{[Z/X]A =^? (BZ) \wedge \mathcal{E}} \; Sim(eta)$$

$$\frac{\mathcal{E} \wedge \top_o}{\mathcal{E}} \; Sim(T_o) \qquad\qquad \frac{A =^? A \wedge \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \; Sim(triv)$$

$$\frac{h\overline{U^n} =^? h\overline{V^n} \wedge \mathcal{E}}{U^1 =^? V^1 \wedge \ldots \wedge U^n =^? V^n \wedge \mathcal{E}} \; Sim(dec)$$

h Konstante, negative oder lokal gebundene Variable

- terminierend und konfluent
- Sim-Normalformen: $h\overline{U^n} =^? k\overline{V^n}$, wobei h und k Konstanten oder Variablen

Unifikation/Prä-Unifikation

Sim-Regeln werden um folgende Regeln ergänzt:

$$\frac{R.F\overline{U^n} =^? F\overline{V^n} \land \mathcal{E}}{R.U^1 =^? V^1 \land \ldots \land U^n =^? V^n \land \mathcal{E}}\, dec$$

$$\frac{R.F\overline{U^n} =^? h\overline{V} \land \mathcal{E} \quad G \ subst.\ für\ F^+\ in\ R}{R'.F =^? G \land [G/F](F\overline{U} =^? h\overline{V} \land \mathcal{E})}\, flex/rig$$

- Flex-Flex Paare werden als prä-gelöst angesehen

- Regeln nicht anwenden auf prä-gelöste Paare
- Regeln nur auf Sim-Normalformen anwenden
- Sim-Normalisierung nach jeder Regelanwendung

Beispiel

Für alle Funktionen G, die Iterierte einer Funktion F sind, gilt: Falls F einen Fixpunkt hat, dann hat auch G einen Fixpunkt.

$$\forall G_{\alpha\to\alpha}.[\exists\ F_{\alpha\to\alpha}.$$
$$\{\forall P_{(\alpha\to\alpha)\to o}.PF \wedge \forall J_{\alpha\to\alpha}.[PJ \Rightarrow P(\lambda X_\alpha.F(JX))]$$
$$\Rightarrow PG\} \wedge \{\exists X_\alpha.FX = X\}]$$
$$\Rightarrow \exists Y_\alpha.GY = Y$$

CNF (mit primitiven $=_\alpha$)

$\boxed{1}$ $[(P, J^-)] : (PF^-)^F \vee (PG^-)^T \vee (PJ^-)T$

$\boxed{2}$ $[(P, J^-)] : (PF^-)^F \vee (PG^-)^T \vee$
$(P(\lambda X_\alpha.F^-(J^-X)))^F$

$\boxed{3}$ $(F^-X^- = X^-)^T$ $\boxed{4}$ $(G^-Y = Y)^F$

CNF (mit Leibnizgleichheit)

$$=^\alpha := (\lambda X_\alpha.\lambda Y_\alpha.(\forall L_{\alpha\to o}.LX \Rightarrow LY))$$

$\boxed{3}$ $(E(F^-X^-))^F \vee (EX^-)^T$

$\boxed{4a}$ $[(Y, L^-)] : (L^-(G^-Y))^T$

$\boxed{4b}$ $[(Y, L^-)] : (L^-Y)^F$

Beweis mit Paramodulation

$\boxed{1}$ $[(P, J^-)]:(PF^-)^F \vee (PG^-)^T \vee (PJ^-)^T$
$\boxed{2}$ $[(P, J^-)]:(PF^-)^F \vee (PG^-)^T \vee (P(\lambda X_\alpha.F^-(J^-X)))^F$
$\boxed{3}$ $(F^-X^- = X^-)^T$ $\boxed{4}$ $(G^-Y = Y)^F$

Res $\boxed{1}$ $\boxed{3}$:

$\boxed{5}$ $(PG^-)^T \vee (PJ^-)^T \vee ((PF^-) = (F^-X^- = X^-))^F$

Uni*($[(\lambda Y_{\alpha\to\alpha}.YX^- = X^-) \ / \ P]$) $\boxed{5}$, RP:

$\boxed{5'}$ $(G^-X^- = X^-)^T \vee (J^-X^- = X^-)^T$

Res $\boxed{5'}$ $\boxed{4}$, Uni*($[X^- \ / \ Y]$), RP:

$\boxed{6}$ $(J^-X^- = X^-)^T$

.... analoge Ableitung anwenden auf $\boxed{2}$ ..... :

$\boxed{8}$ $(F^-(J^-X^-) = X^-)^F$

Para $\boxed{6}$ in $\boxed{8}$, Uni*([]), RP:

$\boxed{9}$ $(F^-X^- = X^-)^F$

Res $\boxed{9}$ $\boxed{3}$, Uni*([]):

$\boxed{10}$ $\blacksquare$

Beweis mit RUE-Resolution

$\boxed{1}$ $[(P, J^-)] : (PF^-)^F \vee (PG^-)^T \vee (PJ^-)^T$

$\boxed{2}$ $[(P, J^-)] : (PF^-)^F \vee (PG^-)^T \vee (P(\lambda X_\alpha . F^-(J^- X)))^F$

$\boxed{3}$ $(F^- X^- = X^-)^T$ $\boxed{4}$ $(G^- Y = Y)^F$

Res $\boxed{1}$ $\boxed{3}$:

$\boxed{5}$ $(PG^-)^T \vee (PJ^-)^T \vee ((PF^-) = (F^- X^- = X^-))^F$

Uni*($[(\lambda Y_{\alpha \to \alpha} . Y X^- = X^-) \ / \ P]$) $\boxed{5}$, RP:

$\boxed{5'}$ $(G^- X^- = X^-)^T \vee (J^- X^- = X^-)^T$

Res $\boxed{5'}$ $\boxed{4}$, Uni*($[X^- \ / \ Y]$), RP:

$\boxed{6}$ $(J^- X^- = X^-)^T$

.... analoge Ableitung anwenden auf $\boxed{2}$ ..... :

$\boxed{8}$ $(F^-(J^- X^-) = X^-)^F$

Res $\boxed{8}$ $\boxed{3}$:

$\boxed{9}$ $((F^-(J^- X^-) = X^-) = (F^- X^- = X^-))^T$

Uni*([]) $\boxed{9}$:

$\boxed{9'}$ $(J^- X^- = X^-)^F$

Res $\boxed{9'}$ $\boxed{6}$, Uni*([]):

$\boxed{10}$ $\blacksquare$

Beweis mit Leibnizgleichheit

$\boxed{1}$ $[(P, J^-)] : (PF^-)^F \vee (PG^-)^T \vee (PJ^-)T$

$\boxed{2}$ $[(P, J^-)] : (PF^-)^F \vee (PG^-)^T \vee (P(\lambda X_\alpha.F^-(J^-X)))^F$

$\boxed{3}$ $(E(F^-X^-))^F \vee (EX^-)^T$

$\boxed{4a}$ $[(Y, L^-)] : (L^-(G^-Y))^T$ $\boxed{4b}$ $[(Y, L^-)] : (L^-Y)^F$

Prim($[(\lambda X_{\alpha\to\alpha}.\neg(H_{(\alpha\to\alpha)\to o}X))$ / $P]$) $\boxed{2}$, RP:

$\boxed{5}$ $(HF^-)^T \vee (HG^-)^F \vee (H(\lambda X_\alpha.F^-(J^-X)))^T$

Res $\boxed{5}$ $\boxed{3}$:

$\boxed{6}$ $(HG^-)^F \vee (H(\lambda X_\alpha.F^-(J^-X)))^T \vee (EX^-)^T \vee$
$(HF^- \neq^? E(F^-X^-))$

Res $\boxed{6}$ $\boxed{4a}$:

$\boxed{7}$ $(H(\lambda X_\alpha.F^-(J^-X)))^T \vee (EX^-)^T \vee$
$(HF^- \neq^? E(F^-X^-)) \vee (HG^- \neq^? L^-(G^-Y))$

Uni*($[(\lambda X_{\alpha\to\alpha}.L^-(XZ))$ / $H][Z$ / $Y]$) $\boxed{7}$, RP:

$\boxed{7'}$ $(L^-(F^-(J^-Z)))^T \vee (EX^-)^T \vee$
$(L^-(F^-Z) \neq^? E(F^-X^-))$

Uni*($[(\lambda X_\alpha.L^-X)$ / $E], [X^-$ / $Z]$) $\boxed{7'}$, RP:

$\boxed{7''}$ $(L^-(F^-(J^-X^-)))^T \vee (L^-X^-)^T$

Res $\boxed{7''}$ $\boxed{4b}$, Uni*($[(F^-(J^-X^-))$ / $Y]$), RP:

$\boxed{8}$ $(L^-X^-)^T$

Res $\boxed{8}$ $\boxed{4b}$, Uni*($[X^-$ / $Y]$), RP:

$\boxed{9}$ $\blacksquare$