# Ein mathematisches Zauberkunststück: Karte 22 bleibt übrig

Ehrhard Behrends

## Das Problem

Vor einiger Zeit wurde in einer Zeitschrift für Zauberer ein Kunststück des deutschen Zauberers Horst Pfaffen beschrieben. Da merkt sich ein Zuschauer heimlich eine Karte aus einem Kartenstapel mit 33 Karten. Der Stapel wird durcheinandergebracht, und dann wird er zu zwei neuen Stapeln ausgegeben: links-rechts usw., bis alle Karten ausgeteilt sind. Der linke Teilstapel kommt weg, mit dem rechten wird das gleiche noch einmal gemacht: links-rechts-Ausgeben, linker Teilstapel weg. Das geht so lange weiter, bis nur noch eine einzige Karte übrig ist: Es ist die vom Zuschauer frei gewählte.

Diese Karte hatte der Zauberer unauffällig an die 22-ste Stelle des Spiels gebracht. Hier wollen wir untersuchen, warum bei 33 Karten ausgerechnet diejenige an der 22-sten Stelle überlebte.

Das Problem wird ein bisschen allgemeiner gefasst, dann im nächsten Abschnitt analysiert, und abschließend gibt es noch Anregungen für Zauberkunststücke, die Sie beim nächsten Familienfest vorführen können. (Das meiste kann man auch verstehen und nachmachen, wenn man die Details aus dem zweiten Abschnitt nicht verinnerlicht hat.)

Es wird nützlich sein, zwei Begriffe einzuführen. Gegeben sei ein Stapel von $n$ Karten. Wenn dann immer wieder „links-rechts-Ausgeben zu zwei neuen Stapeln, linker Stapel kommt weg“ ausgeführt wird, so wollen wir das das *rechts-überlebt-Verfahren* nennen und die ursprüngliche Position (von oben gerechnet) derjenigen Karte, die am Ende übrig bleibt, mit $R(n)$ bezeichnen. Einführend wurde also $R(33) = 22$ ausgenutzt.

Es ist auch naheliegend, das *links-überlebt-Verfahren* gleich mitzubetrachten. Da wird natürlich immer wieder „links-rechts-Ausgeben zu zwei neuen Stapeln, *rechter* Stapel kommt weg“ ausgeführt, bis nur noch eine Karte – die mit der Position $L(n)$ im ursprünglichen Stapel – übrig bleibt.

Fast erwartungsgemäß ist die Mathematik, die zum Einsatz kommt, nicht sehr tiefliegend. Es reicht zu wissen, wie man die Dualzahldarstellung einer Zahl berechnet.

## Die Analyse

Und welchen Wert haben die $R(n), L(n)$? Man könnte das natürlich leicht durch einen Computer für jedes interessierende $n$ ausrechnen lassen. Wir wollen hier zwei Ansätze präsentieren, mit denen das etwas eleganter geht. Zunächst kümmern wir uns um das rechts-überlebt-Verfahren.

Dazu kombinieren wir drei Tatsachen. Erstens ist klar, dass stets $R(2k+1) = R(2k)$ gilt, denn die Karte mit der Position $2k+1$ „überlebt“ schon den ersten Durchgang nicht. Und was passiert, zweitens, mit $2k$ Karten beim ersten links-rechts-Ausgeben? Es geht dann mit $k$ Karten weiter, die – nach ursprünglicher Nummerierung – in der Reihenfolge $2k, 2k-2, \ldots, 4, 2$ liegen. $R(2k)$ wird also die Zahl an der Position $R(k)$ in $2k, 2k-2, \ldots, 4, 2$ sein. Allgemein hat die $r$-te Karte die Nummer $2(k+1-r)$, das zeigt $R(2k) = 2(k+1-R(k))$.

Kombiniert man das, drittens, mit dem offensichtlichen $R(2) = 2$, so gelangt man zusammenfassend zu

**Beobachtung 1.** Es ist $R(2) = 2$, und stets gilt $R(2k+1) = R(2k)$ sowie $R(2k) = 2(k+1-R(k))$.

So lassen sich die $R(n)$ schnell rekursiv berechnen, die ersten Werte findet man in Tabelle 1.

Mit entsprechenden Überlegungen ergibt sich für das links-überlebt-Verfahren die

**Beobachtung 2.** Es ist $L(3) = 3$, und stets gilt $L(2k+2) = L(2k+1)$ sowie $L(2k+1) = 2k+3-2L(k+1)$.

(Man beachte nur: Nach dem ersten Ausgeben bleiben die $k+1$ Karten $2k+1, 2k-1, \ldots, 3, 1$ übrig, die $r$-te Karte ist also

*Tabelle 1*

| n | R(n) | n | R(n) | n | R(n) | n | R(n) | n | R(n) | n | R(n) | n | R(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2, 3 | 2 | 4, 5 | 2 | 6, 7 | 4 | 8, 9 | 6 | 10, 11 | 8 | 12, 13 | 6 | 14, 15 | 8 |
| 16, 17 | 6 | 18, 19 | 8 | 20, 21 | 6 | 22, 23 | 8 | 24, 25 | 14 | 26, 27 | 16 | 28, 29 | 14 |
| 30, 31 | 16 | 32, 33 | 22 | 34, 35 | 24 | 36, 37 | 22 | 38, 39 | 24 | 40, 41 | 30 | 42, 43 | 32 |
| 44, 45 | 30 | 46, 47 | 32 | 48, 49 | 22 | 50, 51 | 24 | 52, 53 | 22 | 54, 55 | 24 | 56, 57 | 30 |
| 58, 59 | 32 | 60, 61 | 30 | 62, 63 | 32 | 64, 65 | 22 | 66, 67 | 24 | 68, 69 | 22 | 70, 71 | 24 |
| 72, 73 | 30 | 74, 75 | 32 | 76, 77 | 30 | 78, 79 | 32 | 80, 81 | 22 | 82, 83 | 24 | 84, 85 | 22 |
| 86, 87 | 24 | 88, 89 | 30 | 90, 91 | 32 | 92, 93 | 30 | 94, 95 | 32 | 96, 97 | 54 | 98, 99 | 56 |


DOI 10.1515/dmvm-2024-0029

*Tabelle 2*

| n | L(n) | n | L(n) | n | L(n) | n | L(n) | n | L(n) | n | L(n) | n | L(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3, 4 | 3 | 5, 6 | 1 | 7, 8 | 3 | 9, 10 | 9 | 11, 12 | 11 | 13, 14 | 9 | 15, 16 | 11 |
| 17, 18 | 1 | 19, 20 | 3 | 21, 22 | 1 | 23, 24 | 3 | 25, 26 | 9 | 27, 28 | 11 | 29, 30 | 9 |
| 31, 32 | 11 | 33, 34 | 33 | 35, 36 | 35 | 37, 38 | 33 | 39, 40 | 35 | 41, 42 | 41 | 43, 44 | 43 |
| 45, 46 | 41 | 47, 48 | 43 | 49, 50 | 33 | 51, 52 | 35 | 53, 54 | 33 | 55, 56 | 35 | 57, 58 | 41 |
| 59, 60 | 43 | 61, 62 | 41 | 63, 64 | 43 | 65, 66 | 1 | 67, 68 | 3 | 69, 70 | 1 | 71, 72 | 3 |
| 73, 74 | 9 | 75, 76 | 11 | 77, 78 | 9 | 79, 80 | 11 | 81, 82 | 1 | 83, 84 | 3 | 85, 86 | 1 |

die mit der Nummer $2(k-r+1)+1 = 2(k-r)+3$; so folgt $L(2k+1) = 2k+3-2L(k+1)$.)

Die ersten mit dieser Rekursionsformel berechneten $L(n)$ findet man in Tabelle 2. Das sieht in beiden Tabellen recht irregulär aus. Um besser zu verstehen, wie die $R(n), L(n)$ entstehen, gibt es nun nun einen *zweiten Ansatz*.

Wenn $n$ vorgelegt ist, so ist doch die Kenntnis von $R(n)$ (bzw. $L(n)$) gleichwertig zu der Information, wie viele Karten vor dem ersten links-rechts-Ausgeben *über* (oder *unter*) der am Ende übrig bleibenden Karte – wir wollen sie die *Zielkarte* nennen und mit Z bezeichnen – gelegen haben. Einen Stapel, bei dem $a$ Karten über und $b$ Karten unter Z liegen, kürzen wir durch $(a\ Z\ b)$ ab. Offensichtlich ist dann $n = a+b+1$.

Wieder analysieren wir zunächst das *rechts-überlebt-Verfahren*. Wie kann bei einer Aktion „links-rechts-Ausgeben, linker Stapel weg" ein $(a\ Z\ b)$-Stapel entstehen? Das wird doch genau dann passieren, wenn es vorher ein $(2b+1\ Z\ 2a+\alpha)$-Stapel mit einem beliebigen $\alpha \in \{0,1\}$ war. Damit lässt sich rekursiv ermitteln, was bei mehreren Durchgängen passiert:

*Angenommen, die letzte Karte erscheint im zweiten Durchgang*. Dann war es ein $(1+2\alpha_0\ Z\ 2+\alpha_1)$-Stapel mit $\alpha_0, \alpha_1 \in \{0,1\}$. Das wird genau dann passieren, wenn die Kartenanzahl in $\{4,5,6,7\}$ liegt. (Der Zusatz folgt daraus, dass es auf jeden Fall mindestens $2+1+1$ Karten sind und je nach Wahl der $\alpha$ noch $0,1,2,3$ Karten dazukommen.)

*Angenommen, die letzte Karte erscheint im dritten Durchgang*. Dann war es ein $(5+2\alpha_1\ Z\ 2+4\alpha_0+\alpha_2)$-Stapel mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \{0,1\}$. Das wird genau dann passieren, wenn die Kartenanzahl in $\{8, 9, \ldots, 15\}$ liegt.

*Angenommen, die letzte Karte erscheint im vierten Durchgang*. Dann war es ein $(5+8\alpha_0+2\alpha_2\ Z\ 10+4\alpha_1+\alpha_3)$-Stapel mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_3 \in \{0,1\}$. Das wird genau dann passieren, wenn die Kartenanzahl in $\{16, \ldots, 31\}$ liegt.

Setzt man diese Überlegungen fort, so steht am Ende der

**Satz 1** (rechts überlebt). *Allgemein lässt sich für den Fall sagen, dass das Ergebnis nach k Durchgängen feststeht: Die Kartenanzahl n lag in* $\{2^k, \ldots, 2^{k+1}-1\}$, *und es war ein Stapel der Form* $O_{k;R} + \sum_{i \text{ gerade}} 2^i \beta_i\ Z\ U_{k;R} + \sum_{i \text{ ungerade}} 2^i \beta_i$. *Dabei sind* $O_{k;R}, U_{k;R}$ *Zahlen (die wir gleich näher bestimmen werden) mit* $U_{k;R} + O_{k;R} = 2^k - 1$, *und die* $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ *stehen für die Dualdarstellung von* $n - 2^k \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$:

$$n - 2^k = 1 \cdot \beta_0 + 2^1 \cdot \beta_1 + \cdots + 2^{k-1} \cdot \beta_{k-1}.$$

Es bleibt noch, die $O_{k;R}, U_{k;R}$ zu bestimmen. Die ersten kennen wir ja schon. So ist $O_{2;R} = 1, O_{3;R} = O_{4;R} = 5$, und nach Konstruktion gilt im Fall $k = 2l$: $O_{2l-1;R} = O_{2l;R}$ sowie $O_{2l+2;R} = 4O_{l;R} + 1$. So folgt unter Verwendung der Formel für die geometrische Reihe: $O_{2l;R} = O_{2l-1;R} = (4^l - 1)/3$.

Ganz analog ergeben sich die $U_{k;R}$ so: $U_{2l;R} = U_{2l+1;R} = 2(4^l - 1)/3$.

Das hört sich ein bisschen verwickelt an, für ein Beispiel betrachten wir $n = 77$. Es ist $2^6 \leq n \leq 2^7 - 1$, das Verfahren wird also nach 6 Durchgängen zu Ende sein, und wir haben es mit $k = 6 = 2 \cdot 3$ zu tun. Folglich ist $O_{6;R} = (4^3 - 1)/3 = 21$ und $U_{k;R} = 42$. Nun brauchen wir die (sechsziffrige) Dualdarstellung von $77 - 64 = 13$, es ergibt sich $13 = 001101_2$. Man muss also einen $(21+8\ Z\ 42+4+1)$-, also einen $(29\ Z\ 47)$-Stapel verwenden, damit die Zielkarte Z übrig bleibt. Und nebenbei ergibt sich, dass $R(77) = O_{6;R} + 1 = 30$ gilt in Übereinstimmung mit Tabelle 1.

Und nun zum *links-überlebt-Verfahren*. Da beginnt die Analyse mit der Beobachtung, dass es genau die $(2b\ Z\ 2a+\alpha)$-Stapel sind (mit $\alpha = 0, 1$), die zu einem $(a\ Z\ b)$-Stapel führen. So folgt leicht:

*Angenommen, die letzte Karte erscheint im zweiten Durchgang*. Dann war es ein $(2\ Z\ \alpha_0)$-Stapel mit $\alpha_0 \in \{0,1\}$. Das wird genau dann passieren, wenn die Kartenanzahl in $\{3,4\}$ liegt.

*Angenommen, die letzte Karte erscheint im dritten Durchgang*. Dann war es ein $(2\alpha_0\ Z\ 4+\alpha_1)$-Stapel mit $\alpha_0, \alpha_1 \in \{0,1\}$. Das wird genau dann passieren, wenn die Kartenanzahl in $\{5,6,7,8\}$ liegt.

*Angenommen, die letzte Karte erscheint im vierten Durchgang*. Dann war es ein $(8+2\alpha_1\ Z\ 4\alpha_0+\alpha_2)$-Stapel mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \{0,1\}$. Das wird genau dann passieren, wenn die Kartenanzahl in $\{9, \ldots, 16\}$ liegt.

Das Bildungsgesetz sollte nun klar sein:

**Satz 2** (links überlebt). *Allgemein lässt sich für den Fall sagen, dass das Ergebnis nach k Durchgängen feststeht: Die Kartenanzahl n lag in* $\{2^{k-1}+1, \ldots, 2^k\}$, *und es war ein Stapel der Form* $(O_{k;L} + \sum_{i \text{ ungerade}} 2^i \beta_i\ Z\ U_{k;L} + \sum_{i \text{ gerade}} 2^i \beta_i)$. *Dabei sind* $O_{k;L}, U_{k;L}$ *Zahlen (die wir gleich näher bestimmen werden) mit* $U_{k;L} + O_{k;L} = 2^{k-1}$, *und die* $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ *stehen für die Dualdarstellung von* $n - 1 - 2^{k-1} \in \{0, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$:

$$n - 1 - 2^{k-1} = 1 \cdot \beta_0 + 2^1 \cdot \beta_1 + \cdots + 2^{k-1} \cdot \beta_{k-1}.$$

Ergänzend sind hier noch Formeln für die $O_{k;L}, U_{k;L}$. Sie ergeben sich durch das Bildungsgesetz und die Bestimmung der Anfangswerte. Wir erhalten so: $O_{k;L}$ ist 0 für ungerade $k$ und $2^{k-1}$ für gerade $k$; und $U_{k;L}$ ist 0 für gerade $k$ und $2^{k-1}$ für ungerade $k$.

Und auch hier gibt es ein Beispiel zur Illustration, wieder betrachten wir $n = 77$. Man muss $k = 7$ wählen, damit $n$ in $\{2^{k-1}+1, \dots, 2^k\}$ liegt. Also ist $O_{k;L} = 0$ und $U_{k;L} = 64$. Dann muss noch $77 - 1 - 64 = 12$ als sechsstellige Dualzahl geschrieben werden: $12 = 001100_2$. Und das führt zu einem $(0 + 8\ Z\ 64 + 4)$-, also einem $(8\ Z\ 68)$-Stapel. Da kann man auch noch ablesen, dass – wie in Tabelle 2 – $L(77) = 9$ gilt: Die neunte Karte überlebt das Verfahren.

Aus unseren Ergebnissen lassen sich einige unmittelbare Folgerungen herleiten, etwa:

- Alle $R(n)$ sind gerade, und alle $L(n)$ sind ungerade.
- Es gibt Fälle mit $L(n) = 1$ und solche mit $L(n) = n$. So etwas kommt bei den $R(n)$ aber nicht vor.
- Die $n$, bei denen nach genau $k$ Schritten noch eine einzige Karte übrig bleibt, bilden ein Intervall natürlicher Zahlen.
- Ab $n = 2^k + 1$ sind die nächsten $L(n)$ Zahlen der Form $c + 1$, wo in der Dualdarstellung von $c$ höchstens ungerade Zweierpotenzen auftreten: $0+1, 2+1, 8+1, 8+2+1, \dots$

Martin Grötschel, dem ich die erste Version dieses Artkels zeigte, regte an zu recherchieren, ob die $R(n)$ oder die $L(n)$ auf der Sloane-Seite oeis.org zu finden sind, der *Online Encyclopedia of Integer Sequences*. Und wirklich kommen sie da vor.

- Die $R(n)$ kommen danach aus einem Persistimis-Possessiamo-Kunststück, und Beobachung 1 ist auch (ohne Begründung) wiedergegeben.
- Für die $L(n)$ findet man dort (auch ohne Begründung) Satz 2.

## Anregungen für Zauberkunststücke

*Einige Begriffe aus der Welt der Magie*

Wenn man mit Karten Zauberkunststücke vorführt, sind einige grundlegende Mischtechniken wichtig. Stets geht es darum, scheinbar ein chaotisches Kartendurcheinander anzurichten, dabei aber die Kontrolle über die für das Kunststück wesentlichen Aspekte zu behalten. Ich werde hier nur so viel beschreiben, wie es für den aktuellen Anlass erforderlich ist.

Zunächst erläutere ich die *Mischmethode 1*. Da kommt der Kartenstapel in die linke Hand wie in Bild 1, die rechte Hand nähert sich, wobei die Handinnenseite dem Zauberer zugewandt ist. Der rechte Daumen zieht einige Karten von oben ab, und das immer wieder (die später abgezogenen kommen nach oben), bis alle Karten in der rechten Hand sind (Bild 2 und Bild 3).

Für uns sind *drei spezielle Varianten* wichtig. Erstens kann man erreichen, dass die unterste Karte unten bleibt: Man muss nur im ersten Schritt die unteren Finger der rechten Hand etwas fester andrücken und die unterste Karte (oder ein paar mehr) mitnehmen. Es wandern also gleichzeitig einige Karten von oben und einige von unten nach rechts. Achtung, das darf wirklich nur im ersten Schritt passieren.

Zweitens kann man die unterste Karte nach oben bringen. Da muss man es nur so einrichten, dass beim vorletzten Abziehen noch genau eine Karte übrig bleibt. Und drittens schließlich kann man die oberste Karte nach unten befördern: Da muss man nur beim ersten Abziehen eine einzige Karte von links nach rechts wandern lassen.

Wir brauchen auch noch die *Mischmethode 2*. Da ist die Handhaltung so wie in Bild 4, und der rechte Daumen schiebt immer wieder einige Karten von links nach rechts: zunächst einige in die rechte Hand, und bei den nächsten Malen abwechselnd über oder unter die schon rechts angekommenen (Bild 5 und Bild 6). Wenn man dann heimlich mitzählt, wie viele Karten man nach oben platziert hat, weiß man, an der wievielten Stelle von oben sich die ehemals oberste Karte befindet.

Man könnte auch noch auf das *falsche Abheben* hinweisen: Ein zufällig aussehendes Verfahren, bei dem der Stapel in der ursprünglichen Reihenfolge bleibt. Einzelheiten findet man im Internet.

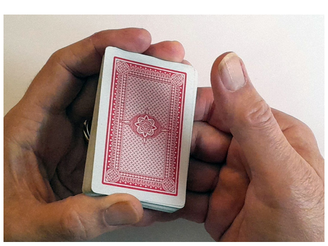

*Bild 1*

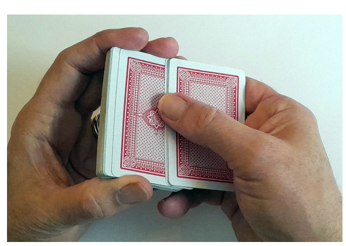

*Bild 2*

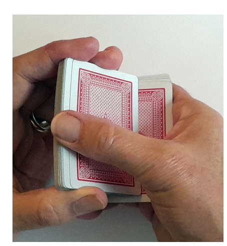

*Bild 3*

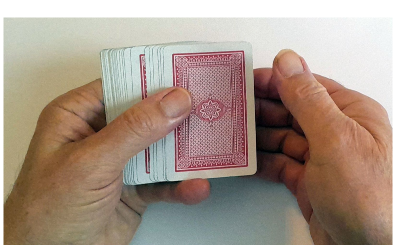

*Bild 4*

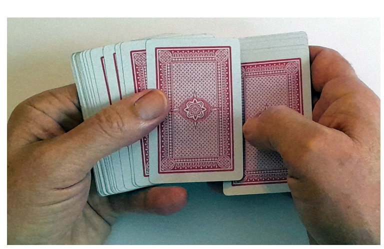

*Bild 5*

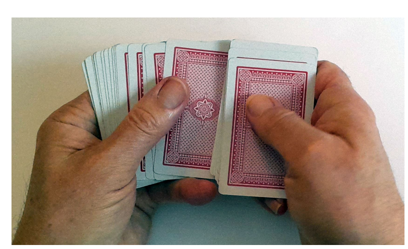

*Bild 6*

*Zauberkunststücke*
Wir wollen unsere theoretischen Ergebnisse nun für Zauberkunststücke nutzen. Ich werde mich auf die wesentlichen Punkte des Ablaufs beschränken, Präsentation und Ausschmückungen überlasse ich der Phantasie der Vorführenden.

Zwei Dinge noch. Erstens ist es unter Zauberinnen und Zauberern verpönt, den Clou der vorgeführten Kunststücke zu verraten. Und zweitens ist es dringend zu empfehlen, den Ablauf vor einer Präsentation intensiv zu üben.

*Variante 1*
Zunächst beschreiben wir ein Kunststück, bei dem nur die vorstehend beschriebene Mischmethode 1 zum Einsatz kommt. Dazu sucht man sich aus Tabelle 2 ein passendes $n$ (nicht zu groß und nicht zu klein), für das $L(n) = 1$ oder $L(n) = n$ ist (zum Beispiel $n = 21$ oder $n = 33$). So viele Karten werden gebraucht, man weiß dann, dass beim links-überlebt-Verfahren die erste oder die letzte Karte als letzte übrig bleibt. Man gibt diese $n$ Karten einer Zuschauerin: Sie soll sich heimlich eine aussuchen und sich merken, verdeckt auf den Tisch legen und die restlichen $n-1$ Karten bildunten oben drüber. Die Zielkarte liegt also unten. Nun folgt einige Male kreativ die Mischmethode 1 (evtl. ergänzt durch falsches Abheben), man richtet es so ein, dass die Zielkarte am Ende oben liegt (falls $L(n) = 1$ war) oder unten (im Fall $L(n) = n$). Das links-überlebt-Verfahren wird garantiert als letzte Karte die Zielkarte haben.

*Variante 2, etwas aufwändiger*
Diesmal kann man sich irgendein $n$ aussuchen, $n$ Karten vorbereiten und $L(n)$ oder $R(n)$ aus den Tabellen ablesen. Mal angenommen, es soll ausgenutzt werden, dass $R(16) = 6$. Es müssen also 5 Karten über der Zielkarte liegen. Dazu geht man zunächst so vor wie in der eben beschriebenen Variante: Die Zielkarte liegt ganz unten. Dann folgt einige Male Mischmethode 1, am Ende soll die Zielkarte oben liegen. Und den Abschluss bildet Mischmethode 2, durch die man erreichen kann, dass genau 5 Karten über der Zielkarte liegen. Das rechts-überlebt-Verfahren wird zum gewünschten Ergebnis führen.

*Variante 3*
Bei den vorstehend beschriebenen Kunststücken war es sinnvoll, dass $L(n) = n$ oder $R(n)$ bzw. $L(n)$ nicht zu groß waren: Sonst wäre die Vorbereitung zu kompliziert geworden. Das ist nun anders, die jetzt zu besprechende Version erläutere ich an einem Beispiel.

Die Zauberin wählt als erstes ihren Lieblingszauberspruch. Einzige Bedingung: Die Anzahl der Buchstaben muss unter den $L(n)$ oder den $R(n)$ vorkommen. Sie schwört auf „ABRAKADABRA“, ein Wort mit 11 Buchstaben. Durch Tabelle 2 weiß sie, dass – unter anderem – für $n \in \{15, 16, 31, 32\}$ die Gleichung $L(n) = 11$ gilt. Sie entscheidet sich für $n = 32$, die Kartenanzahl in einem Skatspiel.

Bei der Vorführung darf ein Zuschauer die Karten mischen, dann werden bedeutungsschwer bei Ansage der einzelnen Buchstaben von „ABRAKADABRA“ 11 Karten bildunten heruntergezählt. Der Reststapel soll Stapel 1 heißen, er wird daneben gelegt. Der Zuschauer nimmt etwa die Hälfte dieser 11 Karten (das wird Stapel 2, die restlichen der 11 Karten bilden Stapel 3), mischt noch einmal nach Belieben und schaut sich dann heimlich die unterste Karte an, die er allen außer der Zauberin zeigt. Jetzt kommt Stapel 2 auf Stapel 1, und ganz oben wird Stapel 3 gelegt: Auf diese Weise wird erreicht, dass die Zuschauerkarte Z an Position 11 liegt.

Es folgt ein verkleidetes links-überlebt-Verfahren. Der Zuschauer gibt die Karten aus: eine für sich, eine für die Zauberin, und so weiter. Es wäre ja nun mit Wahrscheinlichkeit 50 Prozent zu erwarten, dass die Zauberin Z hat. Sie deckt ihre Karten auf, Z ist nicht dabei. Nun das Ganze noch einmal mit den 16 beim Zuschauer verbliebenen Karten. Und wieder hat die Zauberin Z nicht! Das geht so weiter, bis der Zuschauer nur noch eine Karte hat: Es ist die von ihm gewählte. Z wollte einfach nicht zur Zauberin …

Falls sich die Zauberin für ein $R(n)$ entschieden hat, muss beim Ausgeben die erste Karte natürlich an sie gehen.

Das kann man beliebig kreativ ausbauen: Wirksamkeit von Zaubersprüchen, Wahrscheinlichkeiten, Erdenken von geeigneten Zaubersprüchen usw.

(Diese Variante ist eine freie Adaption das Persistimis-Possessiamo-Kunststücks.)

Viel Spaß beim Vorführen!

Ich danke meinem – ebenfalls zauberaffinen – Kollegen Martin Grötschel für einige Kommentare, insbesondere für den Hinweis auf die Sloane-Seite.

*Ein Nachtrag:* Das oben beschriebene Verfahren ist in naheliegender Weise verallgemeinerbar: Es werden jeweils $r$ Teilstapel ausgegeben, und der $s$-te wird weiterverwendet. Erwartungsgemäß ist die zugehörige Analyse weitaus aufwändiger. Die Ergebnisse sind in einer Arbeit enthalten, die 2024 in den *Semesterberichten* erschienen ist.

*Prof. Dr. Ehrhard Behrends*
*Freie Universität Berlin, Mathematisches Institut*
*Arnimallee 6, 14195 Berlin*
*behrends@math.fu-berlin.de*

*Ehrhard Behrends ist Professor für Mathematik i. R. an der Freien Universität Berlin.*
*Seine Fachgebiete sind Funktionalanalysis und Stochastik.*
*Seit Januar 2015 ist er Mitglied im Magischen Zirkel von Deutschland (MZvD).*