

Ist Mathematik die Sprache der Natur?

Ehrhard Behrends

Sonderdruck aus:

MITTEILUNGEN
DER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
IN HAMBURG

BAND XXIX
2010



IM AUFTRAG DER GESELLSCHAFT HERAUSGEGEBEN VON
T. ANDREAE · W. BENZ · H. KARZEL · A. KREUZER
G. OPFER · G. TISCHEL · H. WEFELSCHEID

SCHRIFTLEITUNG

H. KIECHLE — G. TISCHEL

Ist Mathematik die Sprache der Natur? *

Von EHRHARD BEHREND

Ziel des Vortrags sind Informationen und Kommentare rund um das folgende berühmte Galilei-Zitat aus dem Buch „Il Saggiatore“:

Die Philosophie steht in diesem großen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt. Aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Bild davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

1 Beschreibung der Welt in der Antike

1.1 Pythagoras

Pythagoras, geboren um 570 v. Chr. auf der Insel Samos, verließ wegen politischer Schwierigkeiten seine Heimat und wanderte nach Unteritalien aus. In Kroton (heute Croton, vgl. Bild 2) gründete er eine philosophische Schule und lebte mit seinen Anhängern dort zusammen.

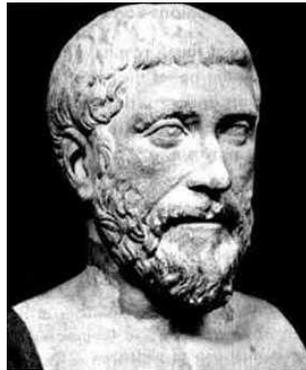


Bild 1 Büste des Pythagoras.



Bild 2 Crotone (roter Pfeil).

Die Pythagoreer stellten die Mathematik in den Mittelpunkt ihrer Philosophie. Die auf mathematische Experimente mit schwingenden Saiten unterschiedlicher

*Von G. Tischel bearbeitete Fassung des Vortrages auf der Herbsttagung der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 6. November 2009.

Länge gestützte Entdeckung, dass sich die Intervalle innerhalb der Tonleiter als Verhältnis ganzer Zahlen ausdrücken lassen, machte großen Eindruck auf die Pythagoreer und veranlasste sie zu kühnen Verallgemeinerungen. Nach der pythagoreischen Lehre ist die mathematische Ordnung der Urgrund aller Dinge. Alles Seiende ist Zahl. Die ganze Welt ist geordnet und regelhaft, und der Mensch kann durch mathematisches Denken diese Ordnung verstehen. Zusammengefasst in einem Motto lautet die pythagoreische Lehre: *Alles ist Zahl*.

Für die Mathematik der Pythagoreer ist es charakteristisch, dass sie rein theoretischen Charakter hat. Ihre zahlentheoretischen Überlegungen liefern keine Rechenanweisungen oder technische Anwendungen.

Für die Pythagoreer war jede Zahl ein Vielfaches der Eins. Wenn die Dinge Zahlen sind, dann bestehen die Dinge letzten Endes aus Vielfachen von Einheiten. Die Entdeckung von Hippasos von Metapont in der Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr., dass die Diagonale und die Seite eines regelmäßigen 5-Ecks kein gemeinsames Maß haben, erschütterte das spekulative Weltbild der Pythagoreer erheblich.

Die Weltbeschreibung der Pythagoreer kann als erster Versuch angesehen werden, die Welt mathematisch zu beschreiben. Vieles war allerdings Spekulation, die Jahre überdauert haben nur die *Zahlenmystik* und die *pythagoräische Tonleiter*.

1.2 Platon

Platon wurde 427 oder 428 v. Chr. geboren, lebte also rund 100 Jahre später als Pythagoras. Auch seine Weltbeschreibung ist rein spekulativ und stützt sich auf die Mathematik, aber nicht auf Zahlentheorie, sondern auf Geometrie. Seine Kosmologie legte er in dem Dialog *Timaios* dar. Nach Platon bestehen die Dinge aus den Elementen Feuer, Wasser, Erde und Luft und aus einem fünften Element, aus dem der Himmel gebildet ist. Die Teilchen dieser Elemente entsprechen den Formen der sogenannten Platonischen Körper (Bild 3).

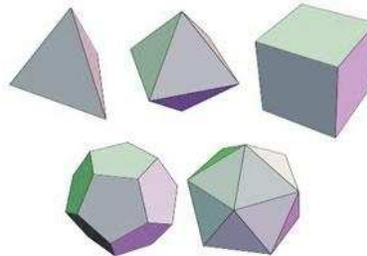


Bild 3 Die 5 platonischen Körper.

Die einzelnen Zuordnungen bei Platon sind:

Erde \leftrightarrow Würfel, Wasser \leftrightarrow Ikosaeder, Luft \leftrightarrow Oktaeder, Feuer \leftrightarrow Tetraeder.

Ist Mathematik die Sprache der Natur?

Das Dodekaeder bleibt dem Weltganzen vorbehalten. Die Gesamtheit der Körper bilden die Kugel des Kosmos, der um seine Achse rotiert.

Die Platonischen Körper sind aber noch nicht die letzten Strukturelemente, da sie von Flächen begrenzt sind, die ihrerseits wieder in Dreiecke zerlegt werden können. Diese Dreiecke gelten als die elementaren Formen. Es handelt sich um zwei Arten von Dreiecken, nämlich das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck mit den Seitenverhältnissen $1:1:\sqrt{2}$ und das Dreieck mit den Winkeln $30^\circ, 30^\circ, 90^\circ$, das die Seitenverhältnisse $1:2:\sqrt{3}$ hat. Diese Dreiecke ergeben sich, wenn man eine Würfel­fläche durch ihre Diagonale teilt bzw. eine Fläche des Tetraeders oder Oktaeders oder Ikosaeders durch die Höhe teilt (Bild 4).

Das Besondere dieser beiden Arten von Dreiecken ist, dass ihre weitere Teilung durch die Höhe immer wieder ähnliche Dreiecke ergibt. Platon nennt diese Dreiecke daher die *schönsten Dreiecke*.

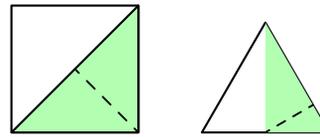


Bild 4

Platons Spekulationen über den Aufbau der materiellen Dinge können heute nicht mehr ernst genommen werden. Doch immerhin verdient der Gedanke auch heute noch Beachtung, dass sich die Dinge nur durch formale Strukturen erklären lassen.

2 Die kopernikanische Revolution

Schon im 3. Jahrhundert v. Chr. hatte Aristarch von Samos die Vermutung, dass die Erde sich mit den anderen Planeten um ein Zentralfeuer als Mittelpunkt des Alls bewegt. Doch seine Auffassung konnte sich nicht durchsetzen. Das geozentrische Weltbild wurde durch Claudius Ptolemäus im 2. Jahrhundert n. Chr. gefestigt. In seinem *Großen astronomischen System* hat er die in der Antike herrschenden Lehren zusammengefasst. Seine Lehren entsprachen dem von der Kirche gelehrteten Weltbild.

Die Abkehr vom geozentrischen Weltbild begann in der frühen Neuzeit mit den Anfängen der Naturwissenschaft.

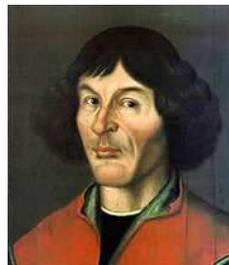


Bild 5 Kopernikus.

Den entscheidenden Schritt zum heliozentrischen System vollzog Nikolaus Kopernikus (geb. 1473 in Thorn, gest. 1543 in Frauenburg). Kopernikus hatte sich intensiv mit astronomischen Fragen beschäftigt. Dabei wurde ihm klar, dass sich die Planetenbewegungen viel einfacher vom heliozentrischen Standpunkt aus beschreiben ließen. Vermutlich war er bereits 1510 überzeugt vom heliozentrischen Weltbild und versuchte es möglichst gut zu begründen. Er hatte aber nur sehr ungenaue Meßergebnisse, denn es gab noch kein Fernrohr. Er zögerte die Veröffentlichung seiner Theorie fast bis zu seinem Tode hinaus. Erst auf dem Sterbebett erreichte ihn das erste Exemplar seines Buches mit dem Titel *De revolutionibus orbium coelestium*.

Das von Kopernikus vertretene heliozentrische Weltbild war im Rahmen der damals bekannten Physik, in der es noch keine Gravitationskräfte gab, sehr widersprüchlich. Einwände waren u. a. die nicht sichtbare Sternenparallaxe, der fehlende Gegenwind und die nicht vorhandenen Rotationskräfte. Kopernikus übernahm noch Teile des alten Weltbildes, indem er annahm, dass das All eine begrenzte Kugel sei, an dessen Sphäre die Fixsterne befestigt seien.

Diese Vorstellung eines begrenzten kugelförmig abgeschlossenen Universums wurde von Giordano Bruno (1548-1600) abgelehnt. Er folgte damit der Auffassung, die Nikolaus von Cusanus (1401-1464) schon früher vertreten hatte. Bruno war wie Nikolaus von Cusanus davon überzeugt, dass die Welt grenzenlos ist und dass die Fixsterne Gestirne von der Art der Sonne sind, deren Bewegung wir nicht wahrnehmen können, da sie sehr weit weg von der Erde sind. Bruno versuchte die Lehre von der Unendlichkeit der Welt durch philosophische und metaphysische Überlegungen zu begründen. Doch seine Auffassungen blieben im Wesentlichen spekulativ, da er die Bedeutung der Mathematik als Sprache, in der die Naturgesetze zu formulieren sind, nicht erkannte. Sein Schicksal ist bekannt: die Verbrennung als Ketzer in Rom.

2.1 Tycho Brahe und Johannes Kepler

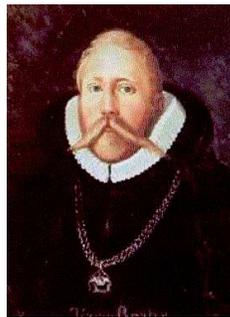


Bild 6 Tycho Brahe.



Bild 7 Johannes Kepler.

Tycho Brahe (1546-1601), ein dänischer Adliger, interessierte sich schon in sei-

Ist Mathematik die Sprache der Natur?

ner Jugend für die Astronomie und wurde einer der bedeutendsten Astronomen seiner Zeit. Er befasste sich insbesondere mit der Beobachtung und Messung der Positionen der Himmelskörper. Hierzu baute er eigene Messinstrumente, zum Beispiel einen großen Mauerquadranten mit einem Radius von 2 Metern. Er erreichte damit bei den Höhenmessungen eine Genauigkeit von wenigen Bogenminuten, und das ohne Fernrohr! Brahe wirkte zuerst in seiner dänischen Heimat, gefördert von dem dänischen König Friedrich II. Nach dessen Tode zog er für kurze Zeit nach Wandsbek bei Hamburg. 1559 wechselte er nach Prag, wo man ihm die Stelle als Hofmathematiker am Kaiserhof angeboten hatte.

Brahe entwickelte sein eigenes Weltsystem, das heliozentrische und geozentrische Aspekte vereint: Im Zentrum steht die Erde und um sie kreisen der Mond und die Sonne. Die Sphäre mit den Fixsternen bewegt sich in 24 Stunden einmal um die Erde. Alle anderen Himmelskörper bewegen sich um die Sonne (Bild 8).

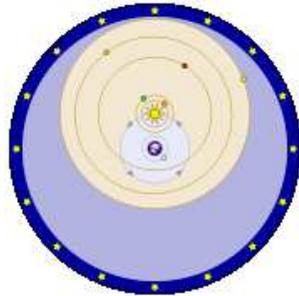


Bild 8 Brahes Weltsystem.

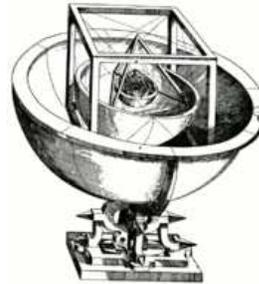


Bild 9 Keplers Planetenmodell.

Brahe war vor allem ein beobachtender Astronom, seine mathematischen Fähigkeiten waren eher gering. Er war beeindruckt von Keplers 1596 erschienenen Erstlingswerk *Mysterium Cosmographicum* und lud Kepler 1600 nach Prag ein, obwohl Kepler das heliozentrische Weltbild vertrat.

Kepler war überzeugt von der Harmonie des Weltalls. Die Existenz von fünf Planeten und fünf platonischen Körpern konnte kein Zufall sein. In seinem Werk *Mysterium Cosmographicum* versuchte er daher, die Bahnen der Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn auf ein- und umbeschriebenen Kugeln der platonischen Körper anzuordnen (Bild 9).

Brahe hoffte, von Keplers Gedankenreichtum und mathematischen Fähigkeiten profitieren zu können. Kepler wurde Brahes Assistent, doch die Zusammenarbeit gestaltete sich schwierig und war nur kurz, da Brahe 1601 verstarb. Nach Brahes Tod wurde Kepler sein Nachfolger als Hofmathematiker am Kaiserhof in Prag. Er erbt damit auch das sehr umfangreiche und genaue Beobachtungsmaterial, das Brahe angehäuft hatte. Dieser Beobachtungsschatz ermöglichte Kepler das Auffinden mathematisch einfacher Zusammenhänge bei der Beschreibung der Planetenbahnen. Kepler verwarf auf Grund der genauen Daten

Brahes seine früheren Theorien. Er entwickelte ein System, das Ellipsenbahnen benutzte. 1609 veröffentlichte er die *Astronomia nova*, die das erste und zweite Keplersche Gesetz enthielt. Nach weiteren intensiven Studien der Daten zur Umlaufbahn des Mars fand er 1618 das dritte Keplersche Gesetz, nach dem d^3/T^3 für alle Planeten konstant ist. Hierbei bezeichnen d die Länge der großen Halbachse der Bahnellipse und T die Umlaufzeit des Planeten. Er veröffentlichte dieses Gesetz 1619 in dem Werk *Harmonices Mundi libri V* und nannte es ein *harmonisches Gesetz*.

Kepler gilt als einer der Begründer der modernen Naturwissenschaften. Sein Leben war aber auch von tiefem Gottesglauben geprägt. Er glaubte, dass sich in den Gesetzen zur Planetenbewegung eine himmlische Harmonie entülle, die der Schöpfer im Sonnensystem verewige.

2.2 Von Galilei zu Newton

Galileo Galilei (1564-1642) war Physiker, Mathematiker und Astronom. Er wurde 1589 Lektor für Mathematik an der Universität in Pisa und wurde 1592 auf den Lehrstuhl für Mathematik in Padua berufen. Der Großherzog der Toskana ernannte ihn 1610 zum Hofmathematiker in Florenz.



Bild 10 Galilei Galileo.

Galilei arbeitete auf mehreren Gebieten der Naturwissenschaften und machte bedeutende Entdeckungen. Es war im Wesentlichen Galilei, der den Weg zu einer physikalischen Umwälzung der Natuwissenschaften ebnete. Einige Leistungen in der Astronomie seien hier kurz erwähnt: Er baute das 1609 in Holland von Jan Lippershey erfundene Fernrohr nach und nutzte es für Himmelsbeobachtungen. Dabei bemerkte er u. a.:

Die Oberfläche des Mondes ist nicht glatt, sondern rau.

Der Jupiter hat vier Monde.

Die Milchstraße ist kein Nebel, sondern besteht aus unzähligen Sternen.

Die Venus hat Phasen wie der Mond .

Es gibt dunkle Flecken auf der Sonne.

Ist Mathematik die Sprache der Natur?

Gestützt auf seine Beobachtungen, vertrat Galilei das heliozentrische Weltbild des Kopernikus mit Kreisbahnen. Keplers Ellipsenbahnen lehnte er ab. Papst Urban erlaubte Galilei, über das kopernikanische System zu publizieren, machte aber zur Auflage, dies als Hypothese zu behandeln. 1632 erschien Galileis „Dialog über die zwei wichtigsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische“. Durch den *Dialogo* geriet Galilei in Konflikt mit der Kirche, und es kam zu einem Inquisitionsprozeß. Galilei entging der Hinrichtung auf dem Scheiterhaufen nur durch den Widerruf seiner Ansichten, von denen er überzeugt war. (Die Widerstände, gegen die Galilei zu kämpfen hatte, sind im Theaterstück „Das Leben des Galilei“ von Bertolt Brecht sehr gut dargestellt.)

Das 17. Jahrhundert war von kaum zu überschätzender Bedeutung für die Entwicklung der modernen Wissenschaft. Ausgehend von Erkenntnissen von Galilei und Kepler bemühten sich die fähigsten Köpfe dieser Zeit um das Herausarbeiten der wichtigsten Grundbegriffe und Zusammenhänge: Was ist Geschwindigkeit, was Beschleunigung, was Kraft, was Impuls, . . . ? Beteiligt an der weiteren Entwicklung der mathematischen Sprache waren unter anderem Huygens, Leibniz, Newton, Hooke, Halley. Zu nennen ist auch Descartes (1596-1650), der ein eher qualitatives Weltsystem in „Le Monde“ entwickelte. Descartes beeinflusste die wissenschaftliche Methodik wesentlich durch sein 1637 veröffentlichtes Werk *Abhandlung über die Methode, seine Vernunft zu gebrauchen und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen*. Er fordert hierin, nur das als richtig zu akzeptieren, was durch eigene schrittweise Analyse und logische Reflexion als plausibel verifiziert wird.



Bild 11 Isaac Newton.



Bild 12 René Descartes.

Isaac Newton (1643-1727) war Physiker, Mathematiker, Astronom und Philosoph. Er gilt als einer der größten Wissenschaftler aller Zeiten. In seinem Werk *Philosophiae Naturalis Principia* betont Newton, dass sich Naturgesetze nur auf Grund von Erfahrungen erkennen ließen. Sie sind nicht evidente Gesetze,

sondern Hypothesen, die ausgehend von Beobachtungen durch Verallgemeinerung zustande kommen.

Newton war der Erste, der Bewegungsgesetze formulierte, die sowohl auf der Erde als auch am Himmel gültig sind. Er führte die drei Keplerschen Gesetze auf die allgemeine Gravitation und die Trägheit zurück. Er zeigte, dass nicht nur Ellipsen, sondern sämtliche Kegelschnitte als Bahnen von Himmelskörpern möglich sind. Newton hat damit die Arbeiten von Kopernikus, Kepler und Galilei bestätigt und vollendet.

2.3 Die Welt als Uhrwerk

Die moderne Wissenschaft machte auf allen Gebieten unbeschreibliche Fortschritte. Die Erkenntnisse nahmen im 18. Jahrhundert explosionsartig zu. Es kristallisierte sich ein rein mechanisches Bild der Welt heraus: Die Welt wurde wie ein großes, überaus präzises Uhrwerk betrachtet. Bei genauer Kenntnis des jetzigen Zustands der Welt sollten genaue Aussagen über vergangene und zukünftige Ereignisse möglich sein.

Es reicht, die entsprechenden mathematischen Gleichungen zu lösen.

3 Die weitere Mathematisierung der Welt

Im 19. und 20. Jahrhundert stellte sich allerdings heraus, dass die Beschränkung auf eine Beschreibung durch Funktionen zu kurz griff. Das mechanische Uhrwerk-Modell konnte spätestens im 19. Jahrhundert nicht mehr aufrecht erhalten werden. Aber nur deswegen, weil es durch kompliziertere mathematische Konzepte ergänzt werden musste.

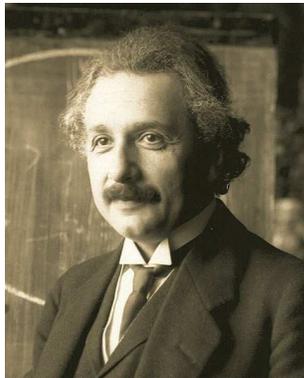


Bild 13 Albert Einstein.



Bild 14 Werner Heisenberg.

Newtons Auffassung vom absoluten Raum und absoluter Zeit beherrschte lange Zeit das philosophische und naturwissenschaftliche Denken. Einsteins Relati-

Ist Mathematik die Sprache der Natur?

vitätstheorie und die Heisenbergsche Unschärferelation beendeten diese Auffassung Newtons und das Uhrwerk-Modell der Welt. Heute haben mathematische Modelle die ganze Welt erobert, vom Mikrokosmos – hier regiert der Zufall – bis zum Makrokosmos, in dem man zur genauen Beschreibung nichteuklidische Geometrien braucht. Heute sind ein Fülle mathematischer Begriffe und Methoden im Einsatz, um das Wissen angemessen in Theorien ausdrücken zu können:

Wahrscheinlichkeitstheorie, hochdimensionale Räume, unendlich Kleines und unendlich Großes, gekrümmte Räume, ...

Kurz: Am besten redet man über die Natur in der Sprache der Mathematik.

3.1 Ist das Buch der Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben?

Inwieweit hatte Galilei Recht, dass das Buch der Natur „in der Sprache der Mathematik geschrieben“ ist? Es folgt eine kleine und sicher unvollständige Sammlung von *Tatsachen* und *Meinungen*.

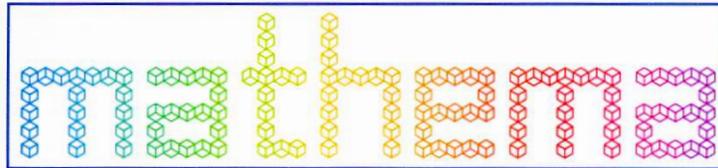
- Die mathematische Struktur der Welt ist das Werk des Schöpfers. Uns ist vergönnt, einige Aspekte dieser Schöpfung zu erkennen, und in diesem Sinn ist Naturwissenschaft eine Art Gottesdienst.
So sahen es zum Beispiel Kepler und Newton.
- Die mathematische Struktur ist eine Vereinbarung zwischen Menschen, um Ordnung in die chaotische Fülle der Erscheinungen zu bringen. Wir können uns die geeigneten Modelle in weiten Grenzen aussuchen. So können wir uns etwa darauf verständigen, dass die Sonne im Mittelpunkt steht.
Das ist der Standpunkt des *Konventionalismus*.
- Nur weil die Welt nach kausalen und nicht zu chaotischen Prinzipien aufgebaut ist, konnte sich überhaupt Leben entwickeln und intelligente Wesen hervorbringen. Also: Weil es uns gibt, ist es kein Wunder, dass die Welt nach logischen Gesetzen funktionieren muss.
Das ist der *anthropozentrische* Standpunkt.

Heute sind die Naturwissenschaftler fest davon überzeugt, dass das Buch der Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben ist. Diese Sprache ist allerdings viel komplizierter, als Galilei es sich gedacht hat.

Ehrhard Behrends

4 Die Ausstellung mathema

Im „Jahr der Mathematik 2008“ gab es im Deutschen Technikmuseum in Berlin die Ausstellung



Die Ausstellung wurde von Mitarbeitern des Technikmuseums und dem Referenten vorbereitet, wesentliche finanzielle Unterstützung kam von der Telekomstiftung.



Bild 15 Gruppenbild: Förderer und Organisatoren von mathema bei der Ausstellungseröffnung.

Das Thema dieser Ausstellung war die Frage „Ist Mathematik die Sprache der Natur?“ Die Ausstellung sollte dazu einladen, dieser Frage nachzugehen und die Bedeutung der Mathematik in Natur, Technik und Alltag zu erforschen. Doch wie kann man so ein abstraktes Thema einem allgemeinen Publikum auf 1000 Quadratmetern nahebringen?

Am Anfang – im Eingangsraum – steht natürlich das ausführliche Galileizitat. Und dann wird in fünf „Themenräumen“ Mathematik in der Lebenswirklichkeit der Besucher gesucht: Zahl – Raum – Bewegung – Zufall – Grenzen der Mathematik. Die Themenräume veranschaulichen die Entwicklung mathematischer Kenntnisse in unterschiedlichen Zeiten und Kulturen und ermöglichen es,

Ist Mathematik die Sprache der Natur?

mathematische Phänomene spielend zu verstehen. Hierzu sind interaktive Stationen aufgebaut, an denen die Besucher mathematische Erfahrungen zu den einzelnen Themen machen können. Von dem breitem Angebot der Ausstellung soll anhand einiger Beispiele berichtet werden.

4.1 Themenraum Zahl

Hier wird gezeigt, wie und warum die Zahlen in die Welt kamen. Die Besucher können die Vielfalt der Zahlensysteme und Rechenmethoden auf 5000 Jahre alten sumerischen Tontafeln, auf den Linien der mittelalterlichen Rechenmeister und im dualen Zahlensystem unserer heutigen Computer entdecken. Sie werden aufgefordert, Zahlenverhältnisse in Kunst und Natur zu erforschen.



Bild 16 Verwaltungstafel der Sumerer.



Bild 17 Sternfrucht.

Beim Schneiden der Sternfrucht in Scheiben senkrecht zur Längsachse entstehen regelmäßige fünfzackige Sterne. Bei ihnen teilt eine innere Ecke den Abstand von einer zur anderen Spitze im Goldenen Schnitt. Dieses Teilungsverhältnis gilt als besonders harmonisch und kommt oft in der Kunst vor. Die goldene Schnittzahl hat den ungefähren Wert ist 1,618.

Zahlen können Buchstaben verschlüsseln: Hieran erinnert die *Enigma*.



Bild 18 Die Chiffriermaschine Enigma (ca.1938).

4.2 Themenraum Geometrie

In diesem Themenraum wird die Entwicklung der Geometrie als Weltvermessung von den Anfängen bis zur Gegenwart aufgezeigt. Die Besucher können selbst Winkel, Strecken und Flächen mit modernsten Vermessungsinstrumenten bestimmen und herausfinden, wie die Navigation mit dem GPS-System funktioniert. Auch das Thema Symmetrie wird durch Exponate den Besuchern nahe gebracht.

Um ca. 200 v.Chr. hat Erathostenes den Erdumfang mit den Mitteln der Geometrie bestimmt.

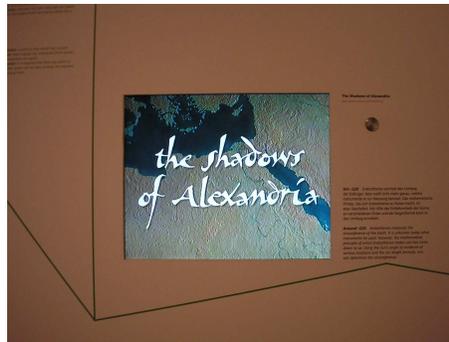


Bild 19 Bestimmung des Erdumfanges.

Er ging davon aus, dass Syene (heute Assuan) und Alexandria auf demselben Meridian liegen und wusste, dass zur Zeit der Sonnenwende die Sonne in Assuan im Zenit steht, in Alexandria aber nicht. Dort warf ein Stab einen Schatten. Er bestimmte den Winkel, unter dem in Alexandria die Sonnenstrahlen auf die Erde trafen. Aus dem gemessenen Winkel und der ihm bekannten Entfernung zwischen Syene und Alexandria berechnete er den Umfang der Erde.

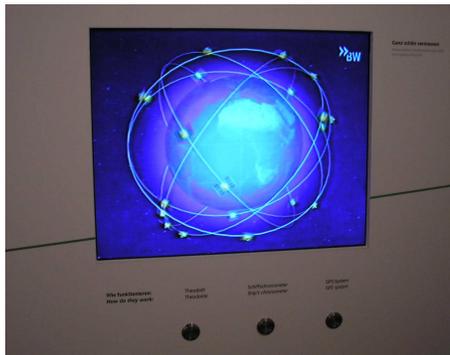


Bild 20 Navigation mit dem gps-System.



Bild 21 Theodolit um 1670.

Ist Mathematik die Sprache der Natur?

Eine perfekte Spiegelung ohne Bruchkanten gibt es nur bei Winkeln, die durch geradzahlige Teiler von 360° entstehen (Bild 22, links). Das fantastische Bild (Bild 22, rechts), das man durch ein Kaleidoskop sehen kann, entsteht durch Spiegelungen von Spiegelbildern.

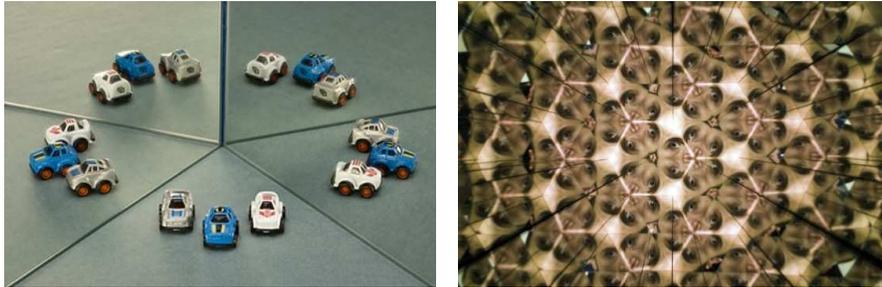


Bild 22 Spiegelungen.

4.3 Themenraum Funktionen

Die moderne Mathematik beginnt im 17. Jahrhundert mit der erfolgreichen Erfassung der Bewegung als Funktion. Heute durchdringt der Funktionsbegriff alle Teile der Mathematik. Funktionen sind der mathematische Ausdruck für dynamische Prozesse der Realität, aber auch für statische Zustände.

Beim „Funktionenlauf“ können die Besucher selbst eine Funktion laufen und nachvollziehen, welcher Zusammenhang zwischen Strecke, Geschwindigkeit und Zeit besteht und wie diese Beziehungen grafisch dargestellt werden (Bild 23).

Beim „Flug über Wien“ mit umgeschnallten Flügeln zur Steuerung können die Besucher erfahren, wie ihre Bewegungen in einen virtuellen Flug umgewandelt werden (Bild 24). (Diese Station bietet mathematisch nicht viel, war aber ein wirklicher Publikumsrenner!)

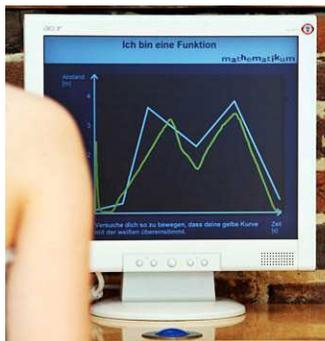


Bild 23 Funktionenlauf.



Bild 24 Flug über Wien – Simulation.

Ehrhard Behrends

Die Brachystochrone (Bild 25) ist eine bemerkenswerte Kurve: Auf ihr rollt eine Kugel schneller ans Ziel als auf einer kürzeren Geraden.



Bild 25 Brachystochrone.

Im Themenraum „Funktionen“ gibt es weiterhin „Mathematik zum Hören“ mit den Fragestellungen: Welche Funktionen treten auf, wenn man Klavier spielt oder wenn man selber spricht? Aus welchen einfachen Bausteinen sind Schwingungen zusammengesetzt?

4.4 Themenraum Zufall

Hier werden u. a. angeboten: Mathematik und Glücksspiel (insbesondere Lotto), das bekannte Geburtstagsparadoxon, das Roulette und das Galtonbrett, Zufallskompositionen.

Der populärste mathematische Zufallsgenerator ist das Roulette (Bild 26). Weniger bekannt, aber mathematisch interessanter ist das Galtonbrett (Bild 27), das von Francis Galton im 19. Jahrhundert erfunden wurde. Mit kleinen Kugeln wird eine Folge von Zufallsereignissen in Gang gesetzt, bei denen sich jeweils eines von zwei Resultaten (Weg nach links oder rechts) ergibt. Die Besucher können beide Zufallsgeräte ausprobieren.



Bild 26 Roulette.



Bild 27 Galtonbrett.

Ist Mathematik die Sprache der Natur?

Das besondere Interesse vieler Menschen gilt dem Lotto in der Hoffnung auf das große Glück. Die Gewinnchancen beim Lotto werden durch ein anschauliches Beispiel verdeutlicht: Die Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige“ entspricht der Wahrscheinlichkeit auf einer fast 140 km langen Strecke mit einem blind aus dem Autofenster geworfenen Centstück einen wahllos an der Strecke aufgestellten schmalen Stab von 1 cm Breite zu treffen. Für einen Gewinn mit Superzahl ist die Strecke sogar 1400 km lang!

Darüber hinaus geht es in diesem Themenraum auch um die Interpretation statistischer Aussagen, um den Vergleich von Versicherungspolicen und um die Beurteilung des Risikos bei Börsen-Transaktionen.

4.5 Themenraum Grenzen

Mit Hilfe der Mathematik können wir die Grenzen zu vielen Bereichen überschreiten, die unserer direkten Vorstellung nicht zugänglich sind. Deshalb wird Mathematik manchmal auch als zusätzlicher Sinn des Menschen bezeichnet.

Ein Film zur Reiskornparabel macht begreiflich, wie begrenzt unsere Vorstellungskraft vom exponentiellen Wachstum ist.



Bild 28 Berlin versinkt unter einem Reisberg.

Nach einer alten Legende soll der Erfinder des Schachspiels für seine Erfindung folgenden Lohn gefordert haben: Für das erste Feld 1 Reiskorn und für jedes weitere Feld doppelt soviel Körner wie für das vorangehende Feld.

Was zunächst ein geringe Forderung zu sein scheint, erweist sich als unerfüllbar. Für das 64. Feld wären es 9.223.372.036.854.775.808 Reiskörner und für alle Felder zusammen doppelt so viele. Nimmt man an, dass 40 Körner zusammen 1 g wiegen, so bekäme der Erfinder mehr als 460 Milliarden Tonnen Reis. Die Weltjahresproduktion beträgt aber kaum mehr als 600 Millionen Tonnen.

Exponate zu mathematischen Rekorden lassen die Besucher staunen: Das Primzahlbuch enthält nur die Ziffern einer einzigen Primzahl. Der „Schwarzsche Stiefel“, ausgedacht vom Mathematiker Hermann Schwarz, hat einen endlichen Inhalt, aber eine unendliche Oberfläche. Er entsteht dadurch, dass der Mantel des zylindrischen Körpers in immer kleinere Dreiecke aufgeteilt wird. Ihre Gesamtfläche wächst dabei über jede beliebige Schranke.

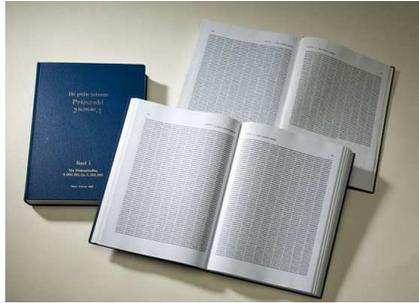


Bild 29 Das Primzahlbuch.

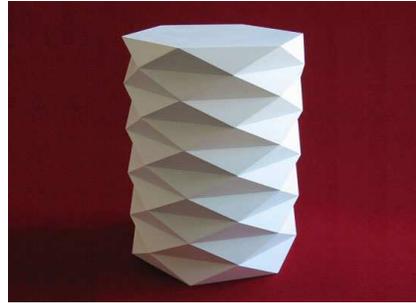


Bild 30 Modell zum Schwarzschen Stiefel.

Zwei Exponate (Bilder 31 und 32) zeigen die Gleichung $1 + e^{\pi i} = 0$, die von den Mathematikern zur „schönste Formel der Welt“ gekürt wurde. Die Collage in Bild 31 lehnt sich an ein bekanntes Bild von Rembrandt an. Sie hat die Bildlegende: Seit 1748 verblüfft die „schönste Formel“ $0 = 1 + e^{\pi i}$ Fachleute und Laien.



Bild 31 $1 + e^{i\pi} = 0$.



Bild 32 Collage.

Mathematik ist nur dann grenzenlos, wenn sie alle intelligenten Lebewesen des Universums verstehen. Wissenschaftler haben sich mehrmals mit mathematischen Botschaften an Außerirdische gewandt (Bilder 33 und 34).

Die beiden Voyager-Raumsonden, die die NASA 1977 startete, führen Schallplatten aus vergoldetem Kupfer mit (Bild 33), die Bilder, Musik, Reden und Geräusche enthalten. Das Cover beschreibt mit Dualzahlen das Abspielen der Platte und die Position der Erde im All.

Die Arecibo-Botschaft ist eine Botschaft von der Erde an mögliche Außerirdische in Form eines Radiowellen-Signals. Sie wurde einmalig 1974 ausgehend vom Arecibo-Observatorium in Puerto Rico gesendet. Die Nachricht besteht aus insgesamt 1.679 Bit. Ein Empfänger müsste diese Zahl in ihre Primfaktoren, 23 und 73, zerlegen und die Folge von Bits anschließend in einer 23 x 73-Matrix als Schwarzweißbild anordnen. Die Botschaft (Bild 34) enthält binär codierte Informationen über die Biologie und Anatomie des Menschen, sowie über die menschliche Population und die Herkunft des Signals.

Ist Mathematik die Sprache der Natur?

Die Arecibo-Botschaft ist in Bild 34 farbig hervorgehoben. Die Besucher können die Funksignale der Botschaft hören.

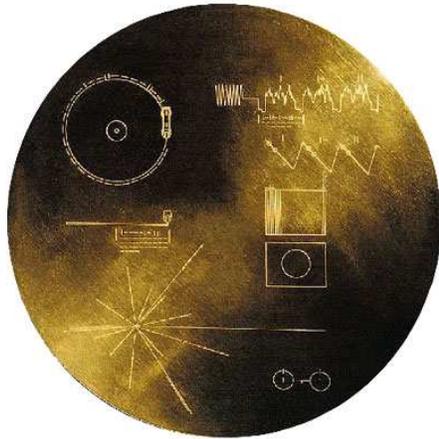


Bild 33 Schallplatte.



Bild 34 Botschaft.

4.6 Kunstaussstellung

Einen Sonderbereich der Ausstellung bildet die angegliederte Kunstaussstellung. Auch wenn dieser Bereich nicht direkt zum Thema der Ausstellung „Ist Mathematik die Sprache der Natur?“ passt, so belegt die Kunstaussstellung doch die These

Mathematik ist überall.

Wer eine Fuge hört oder ein Bild von Escher betrachtet, der erkennt den gegenseitigen Einfluss von Mathematik und Kunst.

Für die „mathema“ sind speziell solche Kunstwerke und Installationen zusammengestellt, die sich mit dem Thema Kodierung befassen. Dadurch bleibt die Kunst zunächst auch für den Betrachter verschlüsselt. Einen Zugang findet nur, wer die Erklärungen liest. Es werden Werke namhafter Künstler gezeigt, die dieses Thema aus ganz unterschiedlichen Perspektiven aufgreifen.

Ehrhard Behrends

Josef Linschinger färbt den Warencode ein, Karsten Panzer den Gencode.

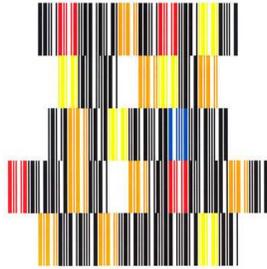


Bild 35 Joseph Linschinger.

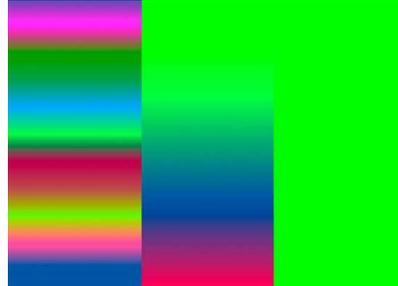


Bild 36 Karsten Panzer.

A. R. Penck erfindet und übernimmt einen persönlichen Symbolvorrat für sein Kunstwerk. Waltraut Cooper nutzt den Dualcode für eine interaktive Neoninstallation, in der Besucher das Verschlüsseln eines Datums auslösen und verfolgen können.



Bild 37 A. R. Penck.

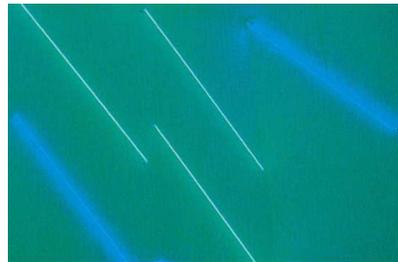


Bild 38 Waltraut Cooper.

Bildrechte der Bilder aus der mathema-Ausstellung

Inhaber der Rechte	Bildnummern
© Clemens Kirchner, Deutsches Technikmuseum Berlin:	17, 18, 21, 22, 29, 31
© Ralf K. Wegt, Mathematikum Gießen:	23, 25, 27.
© Olaf M. Teßmer, SMB-Vorderasiatisches Museum:	16.
© Elke Behrens, Berlin:	28, 32.
© Ehrhard Behrends, Berlin:	26.
© Modellbau Michael Grosch, Berlin:	30.
© NASA:	33.

Eingegangen am 9. 11. 2009

Adresse: Ehrhard Behrends, Fachbereich Mathematik und Informatik,
FU Berlin, Arnimallee 2 - 6, D 14195 Berlin

