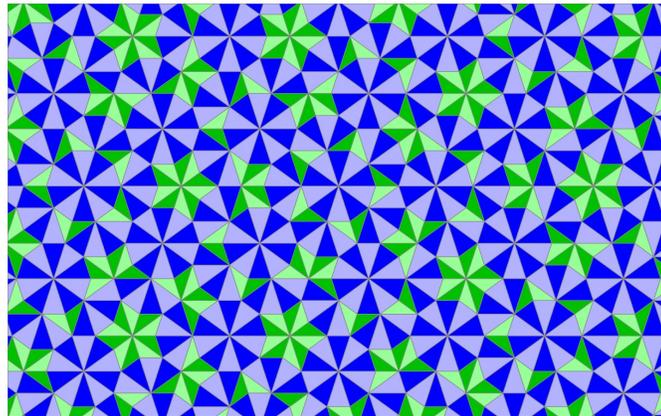


Penrose-Parkettierungen mit „goldenen“ Dreiecken

Von EHRHARD BEHREND

Wenn man die Ebene unter Verwendung gegebener Grundformen lückenlos und ohne Überlappungen auslegen kann, spricht man von einer *Parkettierung*. Es war lange offen, ob in diesem Fall auch eine *periodische Parkettierung* existieren muss, also eine, die bei einer geeigneten Verschiebung in sich übergeht. Gegenbeispiele dazu gibt es seit den siebziger Jahren. Am bekanntesten sind die Penrose-Parkettierungen geworden, bei denen ganz einfache Grundformen verwendet werden und für die sich viele interessante Eigenschaften nachweisen lassen.

Vollständige und übersichtliche Darstellungen sind in der Literatur allerdings nur schwer zu finden. In der vorliegenden Arbeit wird das Thema systematisch und auf elementare Weise entwickelt. Die interessantesten Tatsachen über Penrose-Dreiecks-Parkettierungen werden vollständig bewiesen.

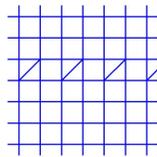


1 Einleitung

Wir stellen uns einen Fliesenleger vor, dem eine Fliesenform oder eine gewisse Anzahl von verschiedenen Fliesenformen zur Verfügung stehen. Es könnten zum Beispiel quadratische Fliesen sein, die alle die gleiche Kantenlänge haben (ein einziger Typ), oder quadratische und dreieckige Fliesen, wobei sich zwei Dreiecke zu einem Quadrat zusammensetzen lassen (zwei Typen), oder ...

Von jeder der Fliesenformen sollen beliebig viele Exemplare zur Verfügung stehen, und es stellt sich die Frage, ob damit die ganze Ebene lückenlos und überlappungsfrei ausgelegt werden kann. Zwei Besonderheiten sind allerdings zu beachten. Erstens ist es – anders als bei Fliesen aus dem Baumarkt – erlaubt,

die Fliesen auch umzudrehen. Und zweitens wird gefordert, dass zwei Fliesen an einer Kante zusammenstoßen, die bei beiden die gleiche Länge hat. Wenn man das schafft, so soll das eine *zulässige* (F_1, \dots, F_n) -Parkettierung heißen, wobei die F_1, \dots, F_n die verwendbaren Fliesenformen sind.

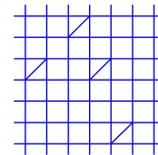


Es ist offensichtlich, dass es im Fall „ F_1 =Quadrat“ eine zulässige (F_1) -Parkettierung gibt, man braucht ja nur an ein Schachbrettmuster zu denken, bei dem alle Felder die gleiche Farbe haben. Und auch bei der Wahl „ F_1 = Quadrat, F_2 =halbes Quadrat“ gibt es zulässige (F_1, F_2) -Parkettierungen.

Nebenstehend sieht man ein Beispiel¹.

Mal angenommen, wir haben eine zulässige (F_1, \dots, F_n) -Parkettierung gefunden; wir wollen sie P nennen. Manchmal ist es dann so, dass man sie durch Verschieben mit sich zur Deckung bringen kann. Das ist bei unserem Schachbrettmuster dann der Fall, wenn man horizontal und vertikal um eine ganzzahlige Quadratlänge verschiebt, im vorstehenden Beispiel der (F_1, F_2) -Parkettierung sind Verschiebungen um plus oder minus 2, plus oder minus 4, ... Einheiten in horizontaler Richtung zulässig.

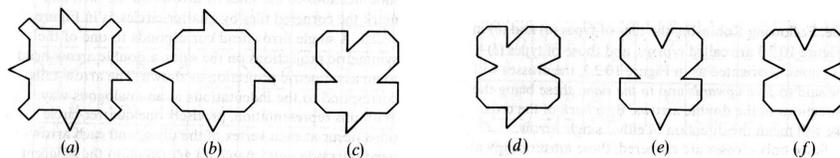
Wenn es so eine Verschiebung gibt, heißt P *periodisch*. Es kann nun sein, dass es für die Fliesen F_1, \dots, F_n auch nichtperiodische Parkettierungen gibt. Das ist schon bei unserem zweiten Beispiel der Fall. Die aus zwei Dreiecken zusammengesetzten Quadrate sind im „Schachbrett“ nur so zu verteilen, dass das Gesamtmuster durch keine Verschiebung in sich übergehen kann.



Anders ausgedrückt heißt das, dass es manchmal sowohl periodische als auch nichtperiodische Parkettierungen geben kann. Es war aber lange offen, ob das immer so sein muss, wenn es überhaupt zulässige Parkettierungen gibt. Wir formulieren die Frage als

Klassisches Parkettierungsproblem (Hao Wang): Angenommen, es gibt eine zulässige (F_1, \dots, F_n) -Parkettierung. Muss es dann notwendig auch eine derartige periodische Parkettierung geben?

1966 gab Robert Berger ein aus 20.526 Fliesen bestehendes Gegenbeispiel an. Ein deutlich einfacheres Beispiel wurde 1971 von Raphael Robinson gefunden:



¹Genau genommen könnte man auch wieder das Schachbrett auslegen, denn es ist ja nicht verlangt, dass alle Fliesenformen verwendet werden müssen.

Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken

Darauf wollen wir in dieser Arbeit nicht weiter eingehen. Vielmehr werden wir eine Variante analysieren, die *Penrose-Dreiecks-Parkettierungen*, die von Roger Penrose in den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts vorgeschlagen wurden. Auch da geht es um spezielle Fliesenformen, die Regeln für das Anlegen sind aber modifiziert. Und da wird sich ergeben:

Es gibt zulässige Parkettierungen, und alle diese Parkettierungen sind aperiodisch.

Penrose hat sich mehrfach mit dem Problem der aperiodischen Parkettierungen beschäftigt. Seine Forschungen waren auch physikalisch motiviert, denn gewisse kristallartige Strukturen (Quasi-Kristalle) sind aperiodisch aufgebaut.

In dieser Arbeit wollen wir uns nur um die Dreiecksparkettierungen kümmern. (Einige Literaturangaben, in denen man die anderen Ansätze und weitere Informationen zu aperiodischen Parkettierungen findet, sind am Ende der Arbeit zusammengestellt.)

Hier die Übersicht über die folgenden Abschnitte:

2. Die Penrose-Bausteine
3. Falls es Penrose-Parkettierungen gibt ...
4. Indexfolgen erzeugen Parkettierungen
5. Isomorphien von Penrose-Parkettierungen
6. Charakterisierung von Penroseparkettierungen
7. Einige Ergänzungen

Es sollte betont werden, dass hier kaum neue Ergebnisse zu finden sind. Das Ziel besteht darin, die Resultate vollständig und möglichst verständlich darzustellen. (Dem Autor sind keine vergleichbar ausführlichen Literaturstellen bekannt.)

2 Die Penrose-Bausteine

Als Fliesenformen treten im Folgenden nur zwei Typen von Dreiecken auf, die beide mit dem *goldenen Schnitt* zu tun haben. Zur Erinnerung: Zwei positive Zahlen a, b mit $a < b$ stehen im Verhältnis des goldenen Schnitts, wenn gilt:

$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}.$$

Setzt man $\tau := \frac{b}{a}$, so folgt aus dieser Gleichung $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$, also ist $\tau^2 = 1 + \tau$ und folglich $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ Es gibt einen interessanten Zusammenhang zur Folge der Fibonaccizahlen usw.

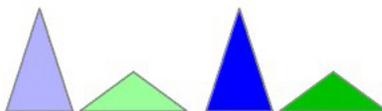
2.1 Penrose-Dreiecke vom Typ 1: Formen und Farben

Wir beginnen mit den nebenstehenden Bausteinen. Das sind zwei Dreiecke, deren Größen wie folgt aufeinander abgestimmt sind:



- Das linke ist gleichseitig und hat nur spitze Winkel. Die kleinste Seite hat die Länge a , und die zwei anderen Seiten die Länge τa . Wir wollen es $D_g^1(a)$ nennen. (Die „1“ erinnert daran, dass wir Dreiecke vom Typ 1 beschreiben, und das „g“ ist die Abkürzung von „groß“.)
- Das rechte Dreieck ist ebenfalls gleichseitig, hat aber einen stumpfen Winkel. Die lange Seite hat die Länge $a\tau$, die kurzen die Länge a . Der Name: $D_k^1(a)$. (Dabei steht „k“ – natürlich – für „klein“.)

Es wird wichtig sein, bei diesen Dreiecken Vorder- und Rückseite unterscheiden zu können. Dazu könnte man Markierungen anbringen, wir wollen die Unterscheidung aber durch Farben vornehmen: $D_g^1(a)$ ist auf der einen Seite hell- und auf der anderen dunkelblau, bei $D_k^1(a)$ verwenden wir die Farben hell- und dunkelgrün. Es wird vereinbart, die jeweils hellere Seite die „Vorderseite“ und die dunklere die „Rückseite“ zu nennen. So sehen die Dreiecke also jetzt von vorn (links) und von hinten (rechts) aus:

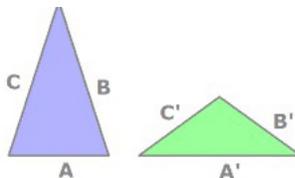


2.2 Penrose-Dreiecke vom Typ 1: Anlegeregeln und Markierungen

Nun sollen die erlaubten Anlegeregeln formuliert werden. Wir nennen die Seiten von $D_g^1(a)$ (von vorn gesehen) im Anti-Uhrzeigersinn A , B und C ; dabei ist A die kurze Seite.

Und die Seiten von $D_k^1(a)$ werden mit A' , B' und C' bezeichnet; wieder ist das Dreieck von vorn zu sehen, wieder ist die Reihenfolge im Anti-Uhrzeigersinn, und wieder beginnen wir „unten“, also diesmal mit der langen Seite.

Das sieht dann so aus:



Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken

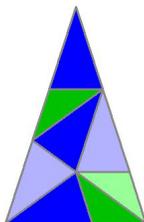
Nun stellen wir uns vor, dass beide Dreieckstypen in beliebiger Anzahl zur Verfügung stehen, wir wollen die Ebene damit lückenlos und überlappungsfrei bedecken. Wie bisher wird verlangt, dass immer zwei Kanten gleicher Länge zusammenstoßen².

Zusätzlich gibt es die **Anlegeregeln für Dreiecke vom Typ 1**: Man darf

- bei beiden Dreiecken und an irgendeiner Seite ein Dreieck des gleichen Typs anlegen, wenn man es vorher umgeklappt hat (also hellgrün an dunkelgrün oder hellblau an dunkelblau);
- die Seite A an die Seite C' legen, wenn beide Dreiecke von vorn oder beide von hinten zu sehen sind;
- die Seite B an die Seite A' legen, wenn beide Dreiecke von vorn oder beide von hinten zu sehen sind.

Und weitere Anlegemöglichkeiten sind *ausdrücklich verboten*.

Hier sehen wir ein Beispiel, bei dem diese Regeln beachtet wurden:



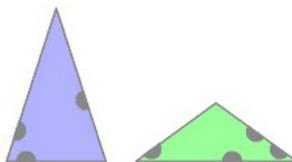
In manchen Fällen gibt es nur eine einzige Wahl. Man kann zum Beispiel an B nur durch Umklappen fortsetzen. Später werden wir sehen, dass noch weitere „Zwänge“ eingebaut sind, die man beachten muss, wenn man die Ebene parkettieren möchte.

Es ist allerdings ziemlich mühsam, wollte man nun wirklich anfangen zu parkettieren und dabei alle Regeln beachten. Eine Hilfe könnten *Markierungen* an den Dreiecksseiten sein³. Zum Beispiel könnte man an den Seiten kleine graue Halbkreise wie im nächsten Bild anbringen (auf der Rückseite sollen die Halbkreise an den gleichen Stellen zu finden sein) und dann verlangen, dass beim Anlegen stets Halbkreise zu Vollkreisen ergänzt werden müssen.

²Wenn wir an das Zusammenlegen keine weiteren Bedingungen stellen, ist das Parkettieren kein Problem. Man könnte zum Beispiel je zwei $D_k^1(a)$ -Dreiecke zu einem Parallelogramm aneinanderlegen und dann damit ganz einfach eine Parkettierung herstellen.

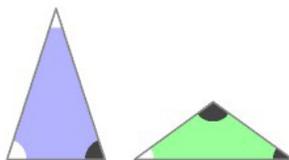
³Die Möglichkeit, die Bedingungen so wie bei den obigen Robinsonkacheln durch geeignet gezackte Dreiecksseiten zu erzwingen, scheidet aus. Denn nur bei einer gezackten Kante wird das Anlegen einer umgeklappten Fliese des gleichen Typs nie möglich sein.

Ehrhard Behrends



Es ist nicht schwer zu sehen, dass Anlegen genau dann erlaubt ist, wenn die Seitenmarkierungen zusammenpassen.

Penrose löst das Problem etwas anders. Bei dieser Variante werden an den Ecken der Dreiecke Markierungen in Form von kleinen weißen und schwarzen Kreissegmenten angebracht⁴. Von vorne sieht das so aus (bei den Rückseiten werden an entsprechenden Ecken die gleichen Farben verwendet):



Die Anlegeregeln kann man sich auch damit einfacher merken, man muss nur das *Farbgebot* beachten: Es dürfen Dreiecke nur dann zusammengelegt werden, wenn die Farben an den Enden der gemeinsamen Seite übereinstimmen. Damit ist wirklich alles, was in den oben formulierten Anlegeregeln steht, erlaubt. Leider gibt es einen kleinen *Schönheitsfehler*, denn es ist *zu viel erlaubt!* Die folgenden Muster wären auch zulässig, sollten es aber nach den Regeln nicht sein:



Um das zu verhindern, wird das Farbgebot um das *Parallelogrammverbot* ergänzt: Dreiecke des Typs $D_g^1(a)$, die beide von vorn oder beide von hinten zu sehen sind, dürfen *nie* an der weiß-weißen-Kante zu einem Parallelogramm zusammengelegt werden. Und gleiches gilt für die schwarz-schwarze Kante von $D_k^1(a)$. (Parallelogramme, die durch Umklappen entstehen, sind aber erlaubt.)

In dieser Arbeit werden wir auf die Markierungen verzichten. Es ist aus verschiedenen Gründen sinnvoller, direkt mit Anlegever- und geboten zu arbeiten.

Unser *Ziel* wird sein zu zeigen, dass man die Ebene mit den Penrose-Dreiecken auf zulässige Weise parkettieren kann und dass alle diese Parkettierungen aperiodisch sind. Der Nachweis dieser Aussagen ist überraschend schwierig. Schon

⁴Siehe dazu auch das Bild am Ende dieser Arbeit.

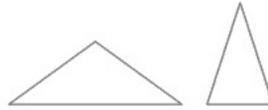
Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken

für den ersten Teil braucht man eine durchdachte Strategie, einfaches Drauflos-Parkettieren dürfte regelmäßig schnell zu einer Situation führen, in der es auf zulässige Weise nicht weitergeht.

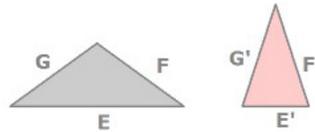
Im *Beweis* werden wir noch eine Variante der Fliesenformen benötigen, die Hauptidee wird darin bestehen, zwischen den schon definierten und den neuen Formen Beziehungen herzustellen.

2.3 Penrose-Dreiecke vom Typ 2

Das ist eine etwas andere Situation. Es gibt zwar auch zwei Dreiecke, die sehen aber diesmal so aus:



Wir wollen sie $D_g^2(a)$ und $D_k^2(a)$ nennen. Das erste hat einen stumpfen Winkel, zwei Seiten der Länge τa und eine Seite der Länge $\tau^2 a$, es ist damit als Dreieck identisch mit $D_k^1(\tau a)$. Das zweite ist das gleiche wie $D_g^1(a)$. Es gibt eine Vorder- und eine Rückseite, die unterscheidbar sind; hier haben wir sie hell- und dunkelgrau (für $D_g^2(a)$) bzw. hell- und dunkelrot (für $D_k^2(a)$) eingefärbt. Die Kanten von $D_g^2(a)$ sollen wie im nachstehenden Bild mit E, F, G bezeichnet sein, die von $D_k^2(a)$ mit E', F', G' . Achtung: Im Bild sind die Dreiecke von vorn zu sehen, von hinten – dann sind sie dunkelgrau und dunkelrot – müssten die Bezeichnungen von F und G sowie von F' und G' vertauscht werden.



Und wieder gibt es Anlegeregeln, diesmal die **Anlegeregeln für Dreiecke vom Typ 2**. Man darf:

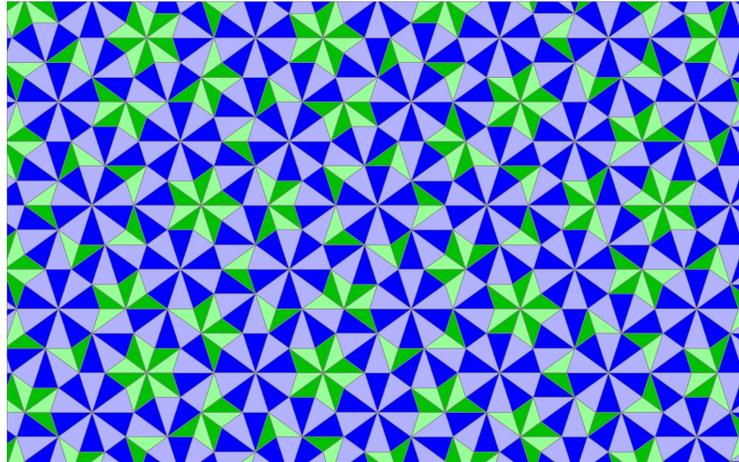
- Dreiecke nur an gleich langen Seiten zusammenlegen;
- bei beiden Dreiecken und an irgendeiner Seite ein Dreieck des gleichen Typs anlegen, wenn man es vorher umgeklappt hat⁵;
- die Seite F an die Seite G' legen, wenn eines der Dreiecke von vorn und das andere von hinten zu sehen ist;
- die Seite G an die Seite F' legen, wenn beide Dreiecke von vorn oder beide von hinten zu sehen sind.

Und weitere Anlegemöglichkeiten sind wieder *ausdrücklich verboten*.

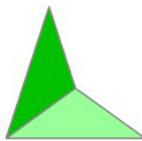
⁵Das ist also genau so wie bei Typ 1. Hier darf man hellgrau an dunkelgrau und hellrot an dunkelrot anlegen.

3 Falls es Penrose-Parkettierungen gibt ...

Nun kann die Analyse beginnen. Wir vergessen für den Augenblick alles, was zu Dreiecken vom Typ 2 gesagt wurde und kümmern uns um das Problem, ob man die Ebene mit Dreiecken des Typs 1 zulässig parkettieren kann. Die Antwort ist ja noch offen, wir wollen aber versuchen, durch „Rückwärtsrechnen“ zu einer Lösung zu kommen. Dazu nehmen wir einmal an, dass wir eine Parkettierung P vorgelegt bekommen; ob das wirklich realistischerweise passieren könnte, muss dabei erst einmal offen bleiben. Wir sehen also eine Menge Dreiecke vom Typ 1, von vorne und von hinten. Die Kantenlänge der kleineren Kante in $D_g^1(a)$, die Zahl a , ist eigentlich unerheblich. Es wird nichts verändern, wenn wir mit $a = 1$ arbeiten, wir also die $D_g^1(1)$ und $D_k^1(1)$ vor uns sehen. Als Beispiel könnte man an das Muster zu Beginn der Arbeit denken, das wir hier noch einmal abbilden:



Wenn man lange genug draufschaut, stellt man fest, dass nicht alle erlaubten Anlegeregeln verwendet wurden. Eigentlich wäre es nämlich zulässig gewesen, dass das Dreieck $D_k^1(1)$ (von vorn gesehen) mit der Kante C' an eine umgeklappte Version von $D_k^1(1)$ bei B' gelegt wird:

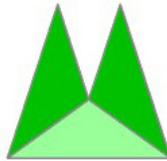


Das kommt aber in dem Bild wohl nicht vor. Wirklich gilt:

3.1 Lemma: *Ist P eine zulässige Parkettierung der Ebene mit Dreiecken vom Typ 1, so wurden niemals zwei $D_k^1(1)$ -Dreiecke verschiedener Farbe (also eins von vorn, eins von hinten zu sehen) bei einer C' -Kante zusammengelegt.*

Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken

Beweis: Angenommen, man würde irgendwo so etwas finden. Die einzige zulässige Fortsetzung an der G' -Kante des hellgrünen Dreiecks wäre so:



Doch dann geht es nicht mehr weiter, denn kein Dreieck passt in die Lücke! \square

Da es für die C' -Kante von $D_k^1(1)$ aber nur zwei erlaubte Möglichkeiten des Anlegens gab, wird es immer die andere sein. Anders ausgedrückt: Wo immer man in der Parkettierung ein $D_k^1(1)$ -Dreieck von vorn sieht, wird an der C' -Kante ein $D_g^1(1)$ -Dreieck (von vorn zu sehen) an der A -Kante angelegt sein; und entsprechend sind umgedrehte $D_k^1(1)$ -Dreiecke bei der C' -Kante immer mit umgedrehten Versionen von $D_g^1(1)$ an ihrer A -Kante zusammengelegt.

Das hat eine wichtige Konsequenz. Wenn wir uns solche „Zwangs-Ehen“ als neue Einheiten vorstellen, so sind das $D_g^2(1)$ -Dreiecke⁶. Es werden gewisse $D_g^1(1)$ -Dreiecke beim Zusammenfassen übrig bleiben. Wenn wir sie als $D_k^2(1)$ -Dreiecke auffassen, so heißt das, dass jetzt die Ebene lückenlos mit Typ-2-Dreiecken gefüllt ist. Es ist nun ganz wichtig zu bemerken, dass das auch eine zulässige Parkettierung ist, wenn wir bei einem zusammengelegten D_g^1 - D_k^1 -Paar diejenige Seite „vorn“ nennen, bei der beide Teile von vorn zu sehen sind. Und bei den neuen D_k^2 -Dreiecken ist wieder hellblau die vordere Seite. Davon kann man sich leicht überzeugen, das Ergebnis wird aber weiter unten in Satz 3.3 noch einmal in etwas größerer Allgemeinheit bewiesen werden. Das heißt:

*Wenn es eine zulässige Parkettierung durch Dreiecke vom Typ 1 gibt,
so auch eine durch Dreiecke vom Typ 2.*

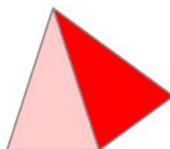
Es ist naheliegend, diese Idee fortzusetzen. Dazu schauen wir uns noch einmal die Dreiecke vom Typ 2 an und versuchen, auch hier „Zwangs-Ehen“ zu finden. Davon gibt es mehrere. Zum Beispiel ist klar, dass an die F -Kante eines von vorn zu sehenden $D_g^2(1)$ -Dreiecks nur die F -Kante eines Dreiecks des gleichen Typs – allerdings von hinten gesehen – angelegt werden kann, denn alle anderen Kanten wären zu kurz. Uns interessiert aber eine andere Zwangskombination. Wir behaupten:

3.2 Lemma: *Ist P eine zulässige Parkettierung der Ebene mit Dreiecken vom Typ 2, so wurden niemals zwei $D_k^2(1)$ -Dreiecke verschiedener Farbe (also eins von vorn, eins von hinten zu sehen) bei einer F' -Kante zusammengelegt.*

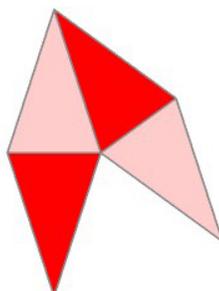
⁶Hier muss man sich daran erinnern, dass $\tau^2 = \tau + 1$ gilt.

Ehrhard Behrends

Beweis: Angenommen, man würde so eine Konstellation finden:



Da es an den E' -Kanten, nur eine einzige Anlegemöglichkeit gibt, geht es notwendig so weiter:



Und das ist wieder eine Sackgasse, denn in der unteren Lücke kann nichts angelegt werden. \square

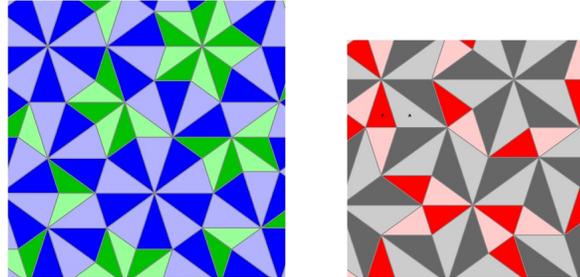
Das bedeutet, dass von den zwei Möglichkeiten, wie es mit der F' -Kante weitergehen könnte, eine ausscheidet. Man kann also sicher sein, dass an der F' -Kante eines $D_k^2(1)$ -Dreiecks stets ein $D_g^2(1)$ -Dreieck mit seiner G -Kante angelegt ist, wobei eines der Dreiecke von vorn und das andere von hinten zu sehen ist. So eine Zusammenlegung ist aber ein $D_g^1(\tau^2)$ -Dreieck, das liegt an der Gleichung $\tau^2 + \tau = \tau^3$. Außerdem können wir bemerken, dass $D_g^2(1)$ -Dreiecke auch $D_k^1(\tau^2)$ -Dreiecke sind. Wenn wir also die eben behandelten Zwangspaare ($D_k^2(1)$ umgedreht an $D_g^2(1)$, wobei F' an G) als neue Fliese betrachten, so haben wir wieder eine Parkettierung mit Penrosen-Fliesen vom Typ 1 erhalten, wobei sich die Längeneinheit um den Faktor τ^2 vergrößert hat. Auch diese Parkettierung ist – wie wir gleich sehen werden – wieder zulässig, wenn wir „vorne“ und „hinten“ richtig definieren, so dass wir die ersten beiden Schritte wiederholen können. So erhalten wir nach und nach immer größere Penrose-Parkettierungen, die abwechselnd vom Typ 1 und Typ 2 sind⁷.

Im nachstehenden Bild sieht man einen Ausschnitt aus einer Parkettierung und daneben den ersten Vergrößerungsschritt; im nächsten Schritt würden dann – unter anderem – die beiden im zweiten Bild durch Punkte markierten Dreiecke zu einem neuen großen Typ-1-Dreieck zusammengesetzt⁸.

⁷Der Fachausdruck für dieses Verfahren ist *Deflation*.

⁸Achtung: Das wäre dann die Ansicht von hinten!

Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken



Damit das Verfahren niemals abbricht, muss noch die Zulässigkeit der jeweils neuen Parkettierung gezeigt werden. Das ist der entscheidende Schritt, um Penrose-Parkettierungen vollständig analysieren zu können.

3.3 Satz:

(i) Gegeben seien Penrose-Dreiecke vom Typ 1; wir verwenden die oben eingeführten Bezeichnungen. Wir fügen ein $D_g^1(a)$ -Dreieck an der A-Seite mit einem $D_k^1(a)$ -Dreieck an der C'-Seite zusammen: Das ist ein $D_g^2(a)$ -Dreieck. Das ist - per definitionem - „von vorn“ zu sehen, wenn beide Teildreiecke von vorn zu sehen sind. Entsprechend interpretieren wir ein $D_g^1(a)$ -Dreieck als $D_k^2(a)$ -Dreieck, wobei sich die Definition von „vorn“ nicht verändert..

Hier sehen wir die Vorderseiten der so gebildeten Dreiecke vom Typ 2.



Und dann gilt: Legt man diese Dreiecke genau dann zusammen, wenn für die Typ-1-Teile die Typ-1-Anlegeregeln erfüllt sind, so entspricht das den Anlegeregeln der Dreiecke vom Typ 2 für die neu gebildeten Dreiecke.

(ii) Gegeben seien Penrose-Dreiecke vom Typ 2; wir verwenden auch hier die oben eingeführten Bezeichnungen. Wir fügen ein von hinten gesehenes $D_g^2(a)$ -Dreieck an der F-Seite mit einem von vorn gesehenen $D_k^2(a)$ -Dreieck an der G'-Seite zusammen: Das ist die Vorderseite eines $D_g^1(\tau^2 a)$ -Dreiecks. Entsprechend interpretieren wir ein $D_g^2(a)$ -Dreieck als $D_k^1(\tau^2 a)$ -Dreieck, wobei sich die Bedeutung von „vorn“ und „hinten“ nicht ändert. Hier sehen wir die Vorderseiten der so gebildeten Dreiecke vom Typ 1.



Und dann gilt: Legt man diese Dreiecke genau dann zusammen, wenn für die Typ-2-Teile die Typ-2-Anlegeregeln erfüllt sind, so entspricht das den Anlegeregeln der Dreiecke vom Typ 1 für die neu gebildeten Dreiecke.

Beweis: Zur Erinnerung notieren wir noch einmal die Anlegeregeln in etwas kürzerer Schreibweise: „v“ steht für „verschieden“, also eines der Dreiecke soll von vorn, das andere von hinten zu sehen sein; entsprechend kürzen wir „gleich“ mit „g“ ab.

Die Regeln lauten dann:

- Typ 1: $A-A-v$, $B-B-v$, $C-C-v$, $A'-A'-v$, $B'-B'-v$, $C'-C'-v$, $A-C'-g$, $B-A'-g$; und alles andere ist verboten.
- Typ 2: $E-E-v$, $F-F-v$, $G-G-v$, $E'-E'-v$, $F'-F'-v$, $G'-G'-v$, $F-G'-v$, $G-F'-g$; und alles andere ist verboten.

Es wurde in Abschnitt 3 auch schon bewiesen, dass bei Parkettierungen der Ebene die eigentlich erlaubten Regeln $A'-A'-v$ und $F'-F'-v$ nicht verwendet werden dürfen, wenn man nicht in eine Sackgasse kommen möchte.

(i) Bei den neu entstandenen Dreiecken entsprechen sich A und E' , B und F' , C und G' , F und C , G und A' . Und E ist durch die Aneinanderlegung von B' und B erzeugt worden. Die „Färbung“ ist so: Für $D_k^2(a)$ wird die Färbung von $D_g^1(a)$ übernommen, und $D_g^2(a)$ ist genau dann von vorn zu sehen, wenn beide „Bausteine“ $D_k^1(a)$ und $D_g^1(a)$ von vorn zu sehen sind.

Es ist dann klar, dass die Anlegeregeln $E-E-v$, $F-F-v$, $G-G-v$, $E'-E'-v$, $F'-F'-v$, und $G'-G'-v$ erlaubt sind. Aus $C-C'-v$ folgt $F-G'-v$, und dass $G-F'-g$ legitim ist, folgt aus $B-A'-v$.

Und alles andere ist verboten! $G-G'-g$ zum Beispiel deswegen, weil $A'-A'-g$ tabu ist. Und das Verbot $F-G'-g$ entspricht dem Verbot $C-C'-g$. Und so weiter.

(ii) Dieser Beweis verlangt etwas mehr Aufmerksamkeit, weil man ganz genau auf die Färbung achten muss: „Vorn“ für das neue $D_k^1(\tau^2 a)$ ist das gleiche wie „vorn“ für das alte $D_g^2(a)$, aber „vorn“ für das neue $D_g^1(\tau^2 a)$ entsteht, wenn man ein von hinten gesehenes $D_g^2(a)$ an ein von vorn gesehenes $D_k^2(a)$ fügt. Es sind dann wieder genau die gewünschten Regeln erlaubt. Zum Beispiel $A-C'-g$ wegen $G-F'-g$ und $B-A'-g$ wegen $E-E-v$. \square

Damit sind wir einen entscheidenden Schritt weiter, denn mit den vorstehenden Überlegungen eröffnet sich die Möglichkeit, Dreiecke des Typs 1 auf zulässige Weise so zusammenzulegen, dass die überdeckte Fläche beliebig groß wird. Von diesen „beliebig großen zulässig überdeckten Flächen“ bis zu eine Parkettierung des \mathbb{R}^2 wird es dann nur noch ein kleiner Schritt sein.

4 Indexfolgen erzeugen Parkettierungen

Bis jetzt ist immer noch nicht klar, ob es überhaupt zulässige Parkettierungen der Ebene gibt. Jetzt wollen wir unsere bisherigen Überlegungen sozusagen rückwärts lesen, um durch Abwechseln zwischen immer größer werdenden Dreiecken vom Typ 1 und Typ 2 die Ebene zu überdecken.

4.1 Der erste Schritt: Die Standard-Dreiecke

Wir konstruieren eine Folge von Dreieckspaaren: ein Paar vom Typ 1, ein Paar vom Typ 2, ein (größeres) Paar vom Typ 1, ein (noch größeres) Paar vom Typ 2 usw.

Bei dieser Konstruktion erinnern wir uns an die „Zwänge“, die wir im vorigen Kapitel entdeckt haben: $D_k^1(a)$ wird *immer* auf ganz spezielle Weise mit $D_g^1(a)$ zusammengelegt, und das gleiche gilt für $D_k^2(a)$, das *immer* mit $D_g^2(a)$ auf zulässige Weise kombiniert wird.

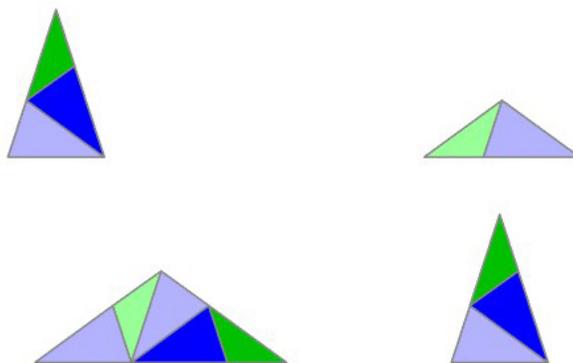
Nun geht es los. Wir starten mit zwei von vorne gesehenen Dreiecken $D_g^1(1)$ und $D_k^1(1)$; wir wollen sie $D(0,0)$ und $D(0,1)$ nennen:



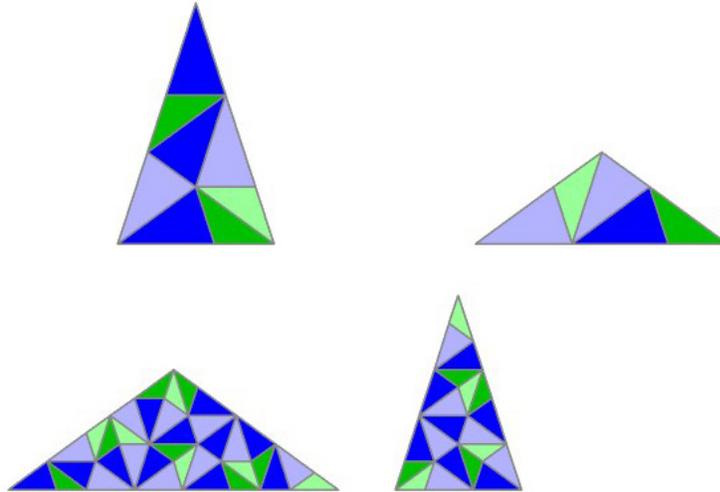
Die Dreiecke $D(1,0)$ und $D(1,1)$ entsprechen dann denjenigen, die bei unserer obigen Analyse nach der ersten „Zwangsheirat“ entstanden sind. $D(1,1)$ ist also einfach das Dreieck $D(0,0)$, und $D(1,0)$ entsteht durch spezielles Zusammenlegen der Dreiecke der vorigen Stufe:



Und so geht es weiter. $D(2,0)$ wird durch die „Zwangs-Ehe“ von $D(1,0)$ und $D(1,1)$ gebildet⁹, und $D(2,1)$ ist mit $D(1,0)$ identisch. Auf diese Weise entstehen immer größere Dreieckspaare $D(k,0)$ und $D(k,1)$, die abwechselnd vom Typ 1 (für gerades k) und vom Typ 2 (für ungerades k) sind. Hier sehen wir weitere Paare ($k = 2, 3, 4, 7$; das letzte ist verkleinert wiedergegeben):



⁹Es ist an dieser Stelle wichtig, dass wir nicht versehentlich Vorder- Rückseite vertauschen: Wir müssen $D(1,0)$ umdrehen und $D(1,1)$ dann anlegen, nicht umgekehrt!



4.2 Der zweite Schritt: Indexfolgen

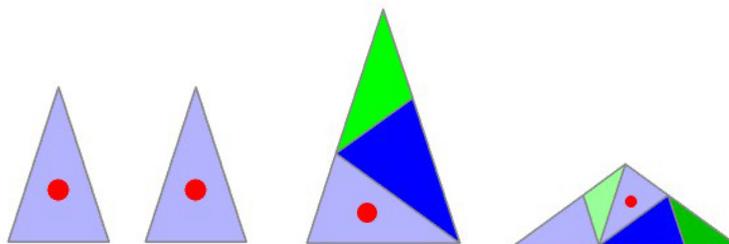
Durch die vorstehende Konstruktion können nun schon beliebig große zulässig überdeckte Bereiche erzeugt werden, und man könnte den Eindruck haben, dass man auf dem besten Wege wäre, die ganze Ebene zu überdecken. Es gibt aber leider ein Problem, denn beim Übergang von den $D(k, 0), D(k, 1)$ zu den $D(k + 1, 0), D(k + 1, 1)$ wird nicht immer nur angelegt, bei den ungeraden k werden ja auch Dreiecke gespiegelt.

Diese Schwierigkeit ist aber leicht zu beheben. Wir betrachten irgendeine Folge $(I_k)_{k=0,1,2,\dots}$, die nur aus Nullen und Einsen besteht (und für die wir gleich noch eine weitere Bedingung fordern werden). Das könnte zum Beispiel die Folge $0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots$ sein.

Wir markieren eines der beiden Standard-Dreiecke $D(0, 0), D(0, 1)$ auf beiden Seiten mit einem roten Punkt, und zwar $D(0, 0)$, wenn $I_0 = 0$ ist und $D(0, 1)$ im Fall $I_0 = 1$. Jetzt gehen wir zu den $D(1, 0), D(1, 1)$ über. Eigentlich gäbe es jetzt in beiden Dreiecken einen roten Punkt, wir wollen aber nur einen. Ist $I_1 = 0$, so bleibt der Punkt bei $D(1, 0)$ und der andere wird gelöscht, und für $I_1 = 1$ überlebt der Punkt nur bei $D(1, 1)$. Nun sollte es weitergehen, es gibt aber eine Besonderheit: Wenn $D(1, 1)$ markiert ist (also im Fall $I_1 = 1$), so hat in der nachfolgenden Stufe nur das Dreieck $D(2, 0)$ einen Punkt. Falls dann $I_2 = 1$ erlaubt wäre, würde der auch noch gelöscht werden und es wäre gar nichts mehr markiert. Das erzwingt eine *Zusatzbedingung* an die Folge (I_k) : Auf eine 1 muss immer eine Null folgen. Dann heißt (I_k) eine *Indexfolge*. Damit können wir dann wirklich in jeder Stufe genau ein Dreieck markieren: Bei $I_{k+1} = 1$ wandert der Punkt nach $D(k + 1, 1)$, und für $I_{k+1} = 0$ nach $D(k + 1, 0)$. Und der Punkt sitzt immer bei demjenigen Dreieck, das wir am Anfang markiert

Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken

hatten. Hier ein Beispiel für Markierungen, wenn wir uns etwa für die Indexfolge $0, 1, 0, 0, \dots$ entschieden haben:



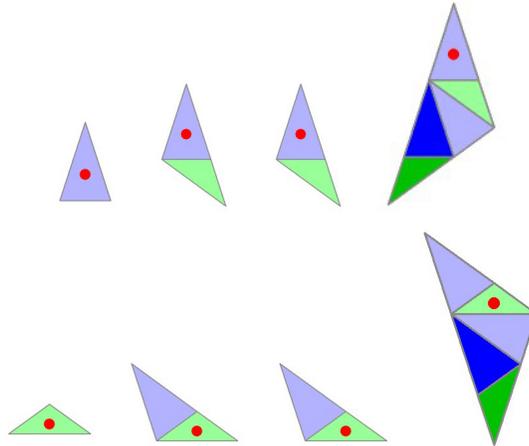
Man sieht, dass das markierte kleine Dreieck mit größer werdendem k immer wieder verschoben und gedreht – und eventuell sogar gespiegelt – werden muss, es sollen doch aber *durch zulässiges Anlegen* immer größere Bereiche der Ebene überdeckt werden, um am Ende eine Parkettierung zu erhalten. Doch das lässt sich leicht korrigieren. Wir erhalten wirklich eine *Anleitung für das zulässige Überdecken beliebig großer Bereiche*:

- Wähle eine Indexfolge $(I_k)_{k=0, \dots}$.
- Markiere $D(0, I_0)$ (wenigstens in Gedanken) mit einem roten Punkt auf beiden Seiten.
- Verfolge dann den roten Punkt in den $D(k, 0), D(k, 1)$: Der rote Punkt ist immer bei $D(k, I_k)$ im anfangs markierten Teildreieck.
- Überdecke damit immer größere Teile der Ebene. Es geht los mit $D(0, I_0)$. Und hat man sich schon bis zum k -ten Schritt vorgearbeitet, so soll man das markierte große Dreieck $D(k+1, I_{k+1})$ so drehen und evtl. umklappen, dass das markierte kleine Ausgangsdreieck an der gleichen Stelle liegt und von der gleichen Seite zu sehen ist wie unser Startdreieck $D(0, I_0)$.
- Am Ende kann der rote Punkt wieder entfernt werden. Der hatte ja nur die Funktion, uns eine Hilfestellung bei der Konstruktion zu geben.

Wenn man das wirklich ohne den Umweg über die Standard-Dreiecke und ohne rote Punkte durchführen will, braucht man eine gute geometrische Vorstellungskraft. Die Anlegeschritte, bei denen $I_{k+1} = 1$ ist, sind zwar trivial, weil nichts passiert, aber bei den $I_{k+1} = 0$ sind für große k in jedem Einzelschritt riesige Dreiecke anzulegen, die aus vielen Bausteinen $D_k^1(1)$ und $D_g^1(1)$ zusammengesetzt sind.

Hier sieht man noch zwei Beispiele. In der oberen Reihe ist der Beginn des zulässigen Musters zu sehen, das zur Indexfolge $0, 0, 1, 0, \dots$ gehört, und darunter wurde mit $1, 0, 1, 0, \dots$ gearbeitet.

Ehrhard Behrends

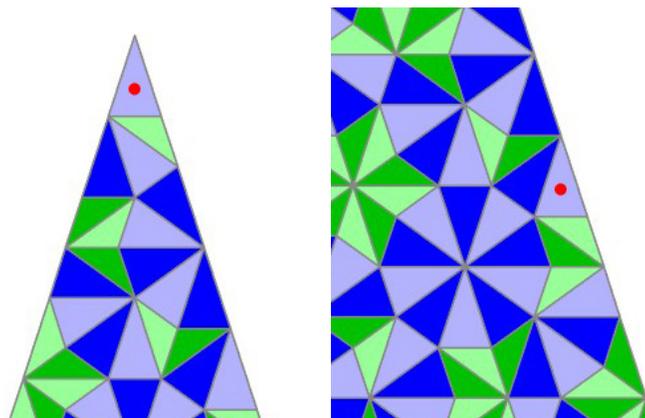


4.3 Schritt 3: Indexfolgen erzeugen stets Parkettierungen

Es ist naheliegend zu hoffen, dass man so zu einer Parkettierung der Ebene mit Penrose-Dreiecken des Typs 1 kommt:

Setze bei gegebener Indexfolge das Erzeugen der immer größeren Dreiecke ins Unendliche fort; die Vereinigung aller dieser Dreiecke soll V heißen. Falls dann $V = \mathbb{R}^2$ ist, haben wir eine Parkettierung gefunden.

Leider gibt es Fälle, bei denen V eine echte Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist! Im Fall $(I_k) = (0010001000100010\dots)$ ist V ein 36° -Segment, und bei der Wahl $(I_k) = (00000000\dots)$ ist V ein Halbraum. Hier sehen wir Ausschnitte, das linke Muster setzt sich nach unten immer weiter fort, das rechte nach links unten:



Das ist aber wirklich alles, was passieren kann:

4.1 Satz: *Für V gibt es nur drei Möglichkeiten:*

- $V = \mathbb{R}^2$, oder
- V ist ein 36° -Segment, oder
- V ist ein Halbraum.

Beweis: Mal angenommen, V wäre die ganze Ebene. Dann sind wir fertig. Wenn das nicht der Fall ist, gibt es einen Punkt x , der nicht in V liegt. Wir gehen von x aus in Richtung V , bis wir auf den Rand von V stoßen¹⁰. $y \in V$ soll der zu x nächste Punkt sein, mit D bezeichnen wir ein Dreieck des Typs 1, in dem y liegt (D ist also ein $D_g^1(a)$ oder ein $D_k^1(a)$).

Es gibt nun mehrere Möglichkeiten:

Fall 1: y ist eine Ecke von D und es gibt kein anderes Dreieck der Parkettierung, das y enthält. Das wird dann notwendig eine Ecke mit einem Winkel von 36° sein, denn bei Ecken mit 72° und 108° wird im Lauf der Konstruktion immer wieder angelegt. (Zum Beispiel ist die 108° -Ecke in einem $D(k, 1)$ im nächsten Anlegeschritt, also bei $D_{k+1,0}$, garantiert verschwunden.)

Wir verlängern nun, von y ausgehend, die an y anstoßenden Kanten so lange, wie wir in V bleiben. Behauptung: Man kann sie unbegrenzt verlängern. Würde man nämlich wieder an eine Ecke von V kommen, könnte es aufgrund der bisherigen Überlegungen nur mit einem Knick von 36° weitergehen und dann wäre V beschränkt, was ja offensichtlich nicht stimmt. Zusammen heißt das: In diesem Fall ist V ein 36° -Segment.

Fall 2: Bei y stoßen zwei Ecken verschiedener kleiner Dreiecke zusammen. Würde V bei y eine Ecke haben, so wäre das die Ecke eines $D(k, 0)$ oder eines $D(k, 1)$, und das würde mit dem gleichen Argument wie eben dazu führen, dass nur ein Winkel von 36° in Frage kommt. Dann kann y aber nicht in zwei Dreiecken liegen, und es bleibt nur die Möglichkeit, dass y keine Ecke von V sein kann. Der Rand von V geht also nach beiden Richtungen von y ausgehend noch weiter. Kommt er in einer Richtung bis zu einer Ecke von V , so setzen wir die Analyse an dieser Ecke fort und folgern, dass V ein 36° -Segment ist.

Bleibt noch der Fall, dass es in beiden Richtungen beliebig weit weitergeht, dass also y auf einer Geraden G und V auf der einen Seite dieser Geraden liegt. Würde V diese Seite nicht ausfüllen – wäre also V kein Halbraum – gäbe es dort einen Punkt x' , der nicht zu V gehört. Wir beginnen unsere Analyse von dort aus noch einmal mit der Wahl eines so nahe wie möglich bei x' liegenden Punktes y' in V . Das weitere Vorgehen kann dann sicher nicht zeigen, dass V ein 36° -Segment ist, denn so ein Segment könnte nicht G als Randgerade enthalten. Es bleibt nur, dass y' auf einer Randgeraden von V liegt. Die muss

¹⁰Wenn man es mathematisch etwas strenger machen möchte, muss man bemerken, dass V als Vereinigung von nichtüberlappenden Dreiecken, die in nur zwei Versionen zur Verfügung stehen, notwendig abgeschlossen ist. Außerdem ist V konvex, weil in jedem Schritt immer größere Dreiecke erzeugt wurden. Damit gibt es zu x einen Punkt bester Approximation in V .

notwendig parallel zu G sein, da es andernfalls einen Schnittpunkt gäbe und V müsste doch ein Segment sein. Auch das geht aber nicht: V wäre der Bereich zwischen zwei parallelen Geraden im Widerspruch zu der Tatsache, dass V Dreiecke mit beliebig großem Durchmesser enthält. \square

Nun ist es leicht, in allen Fällen Parkettierungen zu erhalten. Bedenkt man, dass man Dreiecke immer durch Umklappen aneinanderlegen kann und dass – wegen der Symmetrie der Anlegebedingungen – eine zulässig zusammengesetzte Menge von Fliesen auch dann zulässig bleibt, wenn man sie umdreht, so können wir unser Verfahren so abschließen:

- Ist V ein 36° -Segment, so spiegle es neunmal an der Spitze; das ist eine Parkettierung aus zehn 36° -Segmenten.
- Ist V ein Halbraum, so spiegle V an der begrenzenden Geraden, um eine Parkettierung des \mathbb{R}^2 zu erhalten.

Wir können nun also sicher sein, dass es zulässige Penrose-Parkettierungen gibt. Unser Konstruktionsverfahren zeigt sogar mehr: Jede Indexfolge gibt Anlass zu einer solchen Parkettierung. Die Frage, ob die alle verschieden sind, wird im nächsten Abschnitt beantwortet. Vorher gibt es noch eine Ergänzung.

4.4 Alle Parkettierungen entstehen so

Wir starten wieder mit einer zulässigen Parkettierung P der Ebene aus Typ-1-Dreiecken. Wir fixieren irgendein Dreieck D und nennen es D_0 . Nach Vergrößerung liegt D in einem Dreieck des Typs 2: Das soll D_1 heißen. Wir fahren entsprechend fort: D liegt in immer größeren Dreiecken einer Parkettierung, wobei sich Typ 1 und Typ 2 abwechseln. Die Dreiecksfolge soll D_0, D_1, D_2, \dots heißen.

Angenommen, D_0 war ein D_g^1 , das von vorn zu sehen ist¹¹. Wir schreiben $\tilde{I}_0 := 0$, im Fall $D_0 = D_k^1$ hätten wir $\tilde{I}_0 := 1$ geschrieben. Und dann schauen wir nach, in was für einem Typ Dreieck der ersten Vergrößerung unser D_0 liegt. War es ein $D_g^2(1)$, setzen wir $\tilde{I}_1 := 0$, andernfalls definieren wir $\tilde{I}_1 := 1$. So geht das immer weiter. Die (D_k) erzeugen eine Indexfolge, und aufgrund unserer Konstruktionsvorschrift, die wir in diesem Abschnitt erläutert haben, ist D_k gerade das im k -ten Schritt auftretende Dreieck.

Natürlich hängt die so entstehende Folge (\tilde{I}_k) von der Wahl von D_0 ab. Betrachten wir zum Beispiel das 36° -Segment, das vor Satz 4.1 abgebildet ist. Wählt man D_0 als das Dreieck mit dem roten Punkt, so ist $(\tilde{I}_k) = (00100010001\dots)$;

¹¹Haben wir uns für ein von hinten zu sehendes D_g^1 entschieden, so betrachten wir die Spiegelung von P : die Parkettierung wird also von hinten angesehen. Die ist „gleichwertig“ zu P , mehr dazu in Abschnitt 5.

Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken

das ist ein Spezialfall der allgemeineren Aussage, dass das Dreieck mit dem Punkt, das unter Verwendung von (I_k) zu einer Parkettierung führen soll, immer zu $(\tilde{I}_k) = (I_k)$ führt, wenn man es als Startdreieck D_0 wählt. Entscheidet man sich aber, als D_0 das hellblaue Dreieck etwas darunter zu wählen, kommt $(\tilde{I}_k) = (0100000001001\dots)$ heraus. Klar ist dann, dass die Indexfolgen von der Stelle ab übereinstimmen, wo das Dreieck mit dem Punkt und das gewählte D_0 im gleichen Dreieck der wachsenden Dreiecksfolge liegen. Diese wichtige Beobachtung notieren wir als

4.2 Satz: *Sei V der durch eine Indexfolge (I_k) überdeckte Bereich. Wählt man dann irgendein Parkettierungsdreieck D in V und konstruiert die Folge (\tilde{I}_k) wie vorstehend beschrieben, so stimmen (I_k) und (\tilde{I}_k) von einer Stelle an überein. Genauer gilt: Ist D im Dreieck des k_0 -ten Konstruktionsschritts enthalten, so stimmen (I_k) und (\tilde{I}_k) spätestens ab der Stelle k_0 überein.*

Zurück zur Parkettierung P , der Dreiecksfolge (D_k) und der Indexfolge (\tilde{I}_k) , die sich nach Wahl von D_0 ergeben haben. Wir definieren wieder V als die Vereinigung der D_k . Wir wissen dann schon wegen Satz 4.1, dass es für V drei Möglichkeiten gibt: ein 36° -Segment, ein Halbraum oder die ganze Ebene. Im letzten Fall ist nichts weiter zu tun, P ist dann wirklich durch die Indexfolge (I_k) erzeugt worden. Was aber ist, wenn V zu klein ist? Wir wissen zwar, dass wir aus V im ersten Fall durch neun sukzessive Spiegelungen und im zweiten Fall durch eine einzige Spiegelung eine Parkettierung erhalten können, doch ist zunächst nicht klar, dass die mit P übereinstimmen muss. Dass das doch der Fall ist, ist der Inhalt von

4.3 Satz: *Wir verwenden die vorstehenden Bezeichnungen und behaupten:*

(i) *Ist V ein 36° -Segment, so entsteht P durch neunfaches Spiegeln an den Kanten dieses Segments.*

(ii) *Ist V ein Halbraum, so entsteht P durch Spiegeln von V an der begrenzenden Geraden.*

Beweis: Wir beweisen zunächst (ii), die Grenzgerade soll mit G bezeichnet werden. Mal angenommen, wir könnten folgende Aussage beweisen:

Hilfssatz: Sei D ein Dreieck in V , das mit einer Kante K an G anstößt. Dann ist P so über V hinaus fortgesetzt worden, dass D bei K umgeklappt wurde¹².

Dann ist bei allen Randdreiecken von V klar, wie es dort mit P weitergeht. Das gleiche Ergebnis kann aber nach zweifacher Vergrößerung auf größere Randdreiecke angewendet werden: Auch die wurden umgeklappt, und das hat schon für viel mehr Ausgangsdreiecke von V zur Folge, dass wir sie an G gespiegelt in

¹²Anders ausgedrückt: Mindestens bei D muss umgeklappt werden, um P zu erhalten.

P wiederfinden. Wenn wir diese Überlegung mit weiteren Vergrößerungen wiederholen, haben wir schließlich ganz V ausgeschöpft. *Alles* in V findet sich also gespiegelt in P wieder. V zusammen mit der Spiegelung an G füllt aber die ganze Ebene aus.

Es fehlt noch der *Beweis des Hilfssatzes*. Der ist leider ein bisschen technisch, wir müssen sechs Fälle unterscheiden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit soll D von vorn zu sehen sein.

Fall 1: D ist ein von vorn zu sehendes D_k^1 -Dreieck und liegt mit der C' -Kante an.

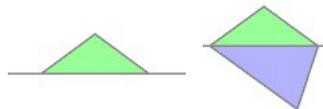
Dieser Fall ist leicht zu erledigen, denn er kommt nicht vor: In einer Parkettierung der Ebene wird so ein Dreieck immer in der ersten Vergrößerung zu einem D_g^2 -Dreieck. Das würde aber aus V hinausführen, soll aber nach Konstruktion Teilmenge sein.

Fall 2: D ist ein von vorn zu sehendes D_k^1 -Dreieck und liegt mit der B' -Kante an.

Auch das ist leicht, nämlich an dieser Kante gibt es als einzige erlaubte Anlegeregeln das Umklappen.

Fall 3: D ist ein von vorn zu sehendes D_k^1 -Dreieck und liegt mit der A' -Kante an.

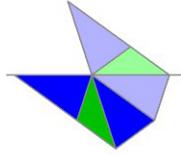
Das ist etwas schwieriger. Wir sehen hier links im Bild D und G (V ist also die obere Halbebene), und wir wollen, dass D in P umgeklappt wurde. Wir müssen folglich ausschließen, dass hier die erlaubte Regel $B-A'-g$ verwendet wurde, es also auf der anderen Seite von G so weitergeht wie im rechten Bild:



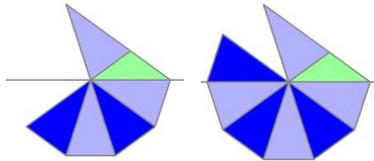
Mal angenommen, das wäre doch der Fall. Wir behaupten, dass denn recht bald G beim Parkettieren links von D überschritten werden muss. Wir verfolgen P in Richtung links unten. Da *muss* ein dunkelblaues $D_g^1(1)$ anliegen. Doch wie soll es weitergehen?

Möglichkeit 1: Es liegt ein dunkelgrünes $D_k^1(1)$ an. Das erzwingt – zusammen mit dem Anlegezwang oben links bei D – die folgende Konstellation, in der in der Lücke oben links nicht mehr angelegt werden kann.

Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken



Möglichkeit 2: Es liegt ein hellblaues $D_g^1(1)$ an. Dann muss man gleich ein weiteres (dann dunkelblaues) $D_g^1(1)$ anlegen (nächstes Bild links), und wieder haben wir zwei Wahlmöglichkeiten. Man könnte es mit einem dunkelgrünen $D_k^1(1)$ versuchen. Dann muss man aber G überschreiten, weil an der F' -Kante nur umgeklappt werden darf. Oder wir können mit zwei $D_g^1(1)$ -Dreiecken (eins hell-, eins dunkelblau) weitermachen (rechts):



Das ist auch wieder eine Sackgasse, denn nichts passt in die Lücke! Damit ist bewiesen, dass das Dreieck notwendig an der A' -Kante gespiegelt werden muss.

Fall 4: D ist ein von vorn zu sehendes D_g^1 -Dreieck und liegt mit der C -Kante an.

Das ist wieder leicht, denn bei einer C -Kante ist nur spiegeln erlaubt.

Fall 5: D ist ein von vorn zu sehendes D_g^1 -Dreieck und liegt mit der A -Kante an.

Theoretisch gäbe es zwei Möglichkeiten: Spiegeln oder Anlegen an ein D_k^1 bei der A' -Kante. Die zweite scheidet aus, denn dann wäre D schon im ersten Vergrößerungsschritt in einem D_g^2 -Dreieck gelandet, das D enthält und folglich nach V hineinschneidet.

Fall 6: D ist ein von vorn zu sehendes D_g^1 -Dreieck und liegt mit der B -Kante an.

Mal angenommen, es ginge auf der anderen Seite mit einem D_k^1 -Dreieck \tilde{D} weiter, das bei D mit der A' -Kante anliegt. Das kann wegen Fall 3 nicht sein, wenn wir das gleiche Argument noch einmal aus der Sicht von \tilde{D} wiederholen.

Damit ist der Beweis von (ii) abgeschlossen.

Die Aussage (i) wird nun ganz analog bewiesen: Die an die Schenkel der Sektoren angrenzenden Dreiecke müssen gespiegelt sein, und man erhält durch

Ehrhard Behrends

Übergang zu Vergrößerungen immer mehr notwendig gespiegelte Teile von V , die nach und nach V ausschöpfen. Links und rechts des 36° -Segments befinden sich also gespiegelte Versionen von V , und wenn wir das noch einige Male wiederholen, ist ganz P aus V durch Spiegelungen erzeugt¹³. \square

Damit ist gezeigt, dass man es gar nicht anders machen kann, als wir es bei der Erzeugung von Parkettierungen durch Indexfolgen gemacht haben. Oder anders ausgedrückt: Alle Penrose-Parkettierungen entstehen durch unser Verfahren.

Insbesondere kommt nachträglich heraus, dass es *drei unterschiedliche* Klassen dieser Parkettierungen gibt:

- Solche, bei denen V ein 36° -Segment ist und die Parkettierung durch neunmaliges Spiegeln von V entsteht.
- Solche, bei denen V ein Halbraum ist und nur einmal gespiegelt werden muss.
- Solche, bei denen V schon die ganze Ebene ist.

Wir wollen für den Rest der Arbeit vereinbaren, dass wir in diesen Fällen die Parkettierung *zehnteilig*, *zweiteilig* bzw. *einteilig* nennen.

5 Isomorphismen von Penroseparkettierungen

In allen Bereichen der Mathematik muss man sich Gedanken über eine passende Definition von Gleichheit machen. Eine geometrische Konstruktion zum Beispiel wird doch dadurch nicht wesentlich anderes, dass man alles um 30° dreht, und um in der Mengenlehre zu erläutern, was eine dreielementige Menge ist, sollte man $\{1, 2, 3\}$ genau so verwenden dürfen wie $\{10, 20, 30\}$.

5.1 Isomorphismen

Im Zusammenhang mit Parkettierungen ist es naheliegend, Situationen als „gleich“ anzusehen, die durch Bewegungen der Ebene auseinander hervorgegangen sind¹⁴. Zwei Parkettierungen sollen *isomorph* heißen, wenn sie sich nur durch eine Bewegung der Ebene unterscheiden.

¹³Genau genommen müsste man das Dreieck an der Spitze des Segments extra behandeln, die hier verwendeten Techniken führen aber auch hier schnell zum Ziel. Insbesondere wird hier noch einmal Fall 3 des Hilfssatzes wichtig. Dieses Ergebnis garantiert, dass es an der Spitze eines 36° -Segments garantiert durch Spiegelung weitergeht, wenn die Spitze durch ein D_k^1 -Dreieck gebildet wurde.

¹⁴Also durch Drehungen, Verschiebungen, Spiegelungen oder eine Kombination dieser Operationen

Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken

Es ist zum Beispiel klar, dass zwei Parkettierungen, die von der gleichen Indexfolge erzeugt wurden, die aber an anderen Stellen der Ebene begonnen wurden, isomorph sind: Durch die Lage des ersten Dreiecks und die Indexfolge liegt ja alles fest. Die Bewegung, die das eine Startdreieck in das andere überführt, bildet damit die ganze erste Parkettierung auf die zweite ab.

5.2 Symmetrien von Parkettierungen

In diesem Zusammenhang sind auch diejenigen Bewegungen der Ebene von Interesse, die eine vorgelegte Parkettierung P in sich überführen. Man spricht dann von *Symmetrien*. Bei den Konstruktionen des vorigen Abschnitts haben wir gesehen, dass P möglicherweise Spiegelsymmetrien haben kann (falls V ein Halbraum ist), oder dass Spiegelsymmetrien und Rotationssymmetrien um Vielfache von 72° mitunter zulässig sind (wenn V ein 36° -Segment ist). Dass man eine Parkettierung durch Verschiebung in sich überführen kann, haben wir aber noch nicht festgestellt. Dass das wirklich nie vorkommt, dass also *alle Penrose-Parkettierungen aperiodisch* sind, ist Teil des folgenden

5.1 Satz: *Sei P eine Penrose-Parkettierung und $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Bewegung der Ebene, die P in sich überführt.*

(i) *Ist P eine zehnteilige Parkettierung, so ist ϕ eine Rotation um ein Vielfaches von 72° um die gemeinsame Spitze der Teilsegmente, eventuell gefolgt von einer Spiegelung.*

(ii) *Ist P zweiteilig, so ist ϕ die Identität oder die Spiegelung an der Geraden, die den Halbraum ϕ begrenzt.*

(iii) *Für einteilige P ist ϕ notwendig die Identität.*

Es folgt, dass die Symmetriegruppe von P (das ist die Zusammenfassung aller Symmetrien von P) immer eine Untergruppe derjenigen Bewegungen der Ebene ist, die ein regelmäßiges Fünfeck in sich überführen. Und es folgt auch, dass Translationen niemals Symmetrien sein können. Oder anders ausgedrückt: Alle Penrose-Parkettierungen sind aperiodisch.

Beweis: Ist D ein $D_k^1(1)$ -Dreieck in P , so sind wir sicher, dass an seiner C' -Kante ein $D_g^1(1)$ -Dreieck mit seiner A -Kante angelegt sein wird, und beide werden von vorn oder beide von hinten zu sehen sein. An $\phi(D)$ wird damit das ϕ -Bild des entsprechenden Dreiecks angelegt, und das bedeutet, dass ϕ auch die erste Vergrößerung von P in Dreiecke vom Typ 2 in sich überführt. Gleiches gilt für die nächste Vergrößerung, in der Zwangsvereinigungen F - G' - v stattfinden und analog in allen weiteren Vergrößerungsschritten.

Wir fixieren nun irgendein Dreieck D in P , nennen es D_0 und konstruieren die D_1, D_2, \dots wie oben in Abschnitt 4. V soll wieder die Vereinigung der D_k sein. Bezeichne mit \tilde{D} das Dreieck $\phi(D)$. Ganz analog konstruieren wir, von

$\tilde{D}_0 := \tilde{D}$ ausgehend die aufsteigende Dreiecksfolge (\tilde{D}_k) . Aufgrund unserer Vorüberlegung wissen wir dann, dass $\tilde{D}_k = \phi(D_k)$ gilt.

Mal angenommen, \tilde{D} würde in V liegen. Dann würde doch \tilde{D} für genügend großes k in D_k enthalten sein. Da andererseits die \tilde{D}_k allein aus den Eigenschaften von P konstruiert wurden, wäre auch $\tilde{D}_k = D_k$. Und das bedeutet, dass $\phi(D_k) = D_k$ für genügend große k sein muss. Das geht aber nur dann, wenn ϕ die Identität oder eine Spiegelung an einer Symmetrieachse von D_k ist. Da diese Symmetrieachsen für wachsende k aber unterschiedlich sind, scheidet die zweite Möglichkeit aus: ϕ ist also die identische Abbildung. Das beweist bereits (iii), denn dann ist die Bedingung $\tilde{D} \subset V$ immer erfüllt.

Wir beweisen nun (i). Da wir die Struktur von P kennen, wissen wir, dass wir \tilde{D} durch geeignete Bewegung ψ , die eine Drehung um ein Vielfaches von 72° (eventuell gefolgt von einer Spiegelung an einer der Sektorkanten) ist, nach V abbilden können. $\psi \circ \phi$ ist also eine Bewegung, die P invariant lässt, und zusätzlich wird D nach V abgebildet. Damit wissen wir, dass $\psi \circ \phi$ die Identität sein muss, ψ selbst war also aus 72° -Drehungen und eventuell einer Spiegelung zusammengesetzt.

Der Beweis von (ii) ist ganz analog, eventuell muss man diesmal spiegeln, um die Bedingung „ $\tilde{D} \subset V$ “ zu erfüllen. \square

6 Charakterisierung von Penrose-Parkettierungen

Wir wissen inzwischen, dass zu jeder Indexfolge (I_k) eine Penrose-Parkettierung gehört. Davon gibt es eine ganze Menge, man kann die Bausteine „0“ und „10“ auf ganz beliebige Weise hintereinander anordnen. Das zeigt, dass man überabzählbar viele Möglichkeiten hat, so eine Folge zu wählen. Doch sind die so entstehenden Parkettierungen „verschieden“?

Wir wollen in diesem Zusammenhang „verschieden“ natürlich als „nicht isomorph“ interpretieren. Das wichtigste Ergebnis in diesem Zusammenhang ist dann der

6.1 Satz: *Es seien P bzw. \tilde{P} Penrose-Parkettierungen, die von Indexfolgen (I_k) bzw. (\tilde{I}_k) erzeugt wurden. Dann sind P und \tilde{P} genau dann isomorph, wenn die Indexfolgen von einem Index an übereinstimmen.*

Beweis: Mal angenommen, die Indexfolgen stimmen von der Stelle k_0 an überein, es sei etwa $I_{k_0} = \tilde{I}_{k_0} = 0$. Wir rufen uns in Erinnerung, wie wir P konstruiert hatten: Im k_0 -ten Schritt wurde $D(k_0, 0)$ so gedreht und eventuell gespiegelt, dass der rote Punkt mit dem am Anfang ausgewählten Dreieck zur Deckung kam. Gleiches passierte bei \tilde{P} . Und deswegen gibt es eine Bewegung der Ebene, die das k_0 -te Dreieck bei der Konstruktion von P mit dem zur Deckung bringt, das wir im k_0 -ten Schritt bei der Konstruktion von \tilde{P} verwendet haben. Da die folgenden Indizes übereinstimmen, wird die gleiche Bewegung

Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken

auch alle folgenden Dreiecke – und damit die Vereinigung – in sich überführen. Eventuell notwendige Drehungs- und Spiegelungsschritte (bei zehnfachen und zweifachen Parkettierungen) werden dann ebenfalls bei P und \tilde{P} gleichzeitig vorgenommen. Das bedeutet, dass beide Parkettierungen isomorph sind.

Für den zweiten Beweisteil gehen wir davon aus, dass P und \tilde{P} isomorph sind. Die „Startdreiecke“ sollen mit D und \tilde{D} bezeichnet werden, V und \tilde{V} seien die jeweilige Vereinigung der in beiden Situationen zu konstruierenden aufsteigenden Dreiecke, und es soll zunächst einmal angenommen werden, dass der Isomorphismus ϕ das Dreieck D in \tilde{V} abbildet.

Bezeichnet man die in der Konstruktion auftretenden Teildreiecke mit D_0, D_1, \dots (für P) bzw. $\tilde{D}_0, \tilde{D}_1, \dots$ (für \tilde{P}), so muss – da \tilde{V} die Vereinigung der \tilde{D}_k ist – das Dreieck $\hat{D} := \phi(D)$ in einem \tilde{D}_{k_0} liegen, wenn k_0 nur groß genug ist.

Nun haben wir in Satz 4.2 schon bemerkt, dass das eine wichtige Folgerung hat: Wir können \tilde{D}_{k_0} auch dadurch erhalten, indem wir mit $\phi(D)$ starten. Und nennen wir die sich dabei ergebende Indexfolge (\hat{I}_k) , so gilt:

- $\hat{I}_k = I_k$ für alle k (vgl. den Beweis von Satz 5.1).
- Für $k \geq k_0$ ist $\hat{I}_k = \tilde{I}_k$ (da ab k_0 die konstruierten Dreiecke übereinstimmen).

Falls also $\phi(D)$ in \tilde{V} liegt, sind wir fertig, denn dann stimmen wirklich die I_k und die \tilde{I}_k von einer Stelle an überein. Bei zehnfachen oder zweifachen Penrose-Parkettierungen führen wir bei Bedarf nach ϕ noch eine weitere Bewegung aus (Spiegelung, Drehung um ein Vielfaches von 72°). Dann wird P immer noch in \tilde{P} übergeführt, aber wir können zusätzlich erreichen, dass D nach \tilde{V} abgebildet wird. Und da die Aussage (die Indexfolgen stimmen ab einer Stelle überein) für diesen Fall schon bewiesen ist, ist die Behauptung auch für solche Situationen gezeigt. \square

Als wichtige Folgerung erhalten wir

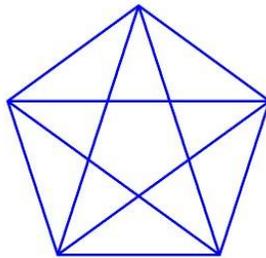
6.2 Satz: *Es gibt überabzählbar viele, paarweise nicht isomorphe Penrose-Parkettierungen.*

Beweis: Jede Indexfolge (I_k) erzeugt eine Parkettierung $P_{(I_k)}$, und Isomorphie liegt genau dann vor, wenn die Indexfolgen von einer Stelle an übereinstimmen. Identifiziert man also zwei Indexfolgen, wenn die entstehenden Parkettierungen isomorph sind, so zerfällt die überabzählbare Menge *aller* Indexfolgen in Teilbereiche, die jeweils abzählbar sind: Jeder Teilbereich wird von den Folgen gebildet, die sich von einer festen Folge an höchstens endlich vielen Stellen unterscheiden. Dann muss aber die Anzahl der Teilbereiche überabzählbar sein, denn andernfalls ergäbe sich aufgrund des Satzes „abzählbar mal abzählbar gleich abzählbar“ ein Widerspruch. \square

7 Einige Ergänzungen

Hier sammeln wir noch einige Ergebnisse und Bemerkungen, die im Zusammenhang mit Penrose-Parkettierungen von Interesse sind,

1. Die hier verwendeten „goldenen“ Dreiecke lassen sich alle am Fünfeck wiederfinden. Dem durch die Diagonalen des Fünfecks gebildete Stern („Drudenfuß“) wurde früher Zauberkraft zugeschrieben, er konnte angeblich böse Geister abwehren.



2. Wer selbst mit solchen Parkettierungen experimentieren möchte, braucht „viele“ $D_g^1(1)$ - und $D_k^1(1)$ -Dreiecke. Was „viel“ im Einzelfall bedeutet, hängt davon ab, bis zu welcher Länge der Indexfolgen man sich vorarbeiten möchte. Für den Einkaufszettel sind dann die Anzahlen wichtig. Nennen wir a_k bzw. b_k die Anzahl der großen bzw. kleinen Dreiecke, die man für das Legen des großen Standard-Dreiecks im k -ten Schritt braucht. So gilt sicher $a_0 = 1$ und $b_0 = 0$. Die Anlegevorschriften liefern die Rekursionsgleichung

$$a_{k+1} = a_k + b_k, \quad b_{k+1} = a_k,$$

und daraus folgt schnell, dass immer $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ gilt. Die Folge (a_k) beginnt also mit

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Das ist die Folge der *Fibonaccizahlen*, von der man weiß, dass die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder recht schnell gegen den goldenen Schnitt konvergieren. Für uns heißt das: Wenn man n D_k^1 -Dreiecke kaufen möchte, so sollten es etwa $1.62 \cdot n$ D_g^1 -Dreiecke sein, damit es am Ende (wenigstens so ungefähr) aufgeht.

3. Speziell für diesen Zweck hergestellte Penrose-Dreiecke wurden seit dem Jahr der Mathematik 2008 mehrfach bei Veranstaltungen für die Öffentlichkeit eingesetzt. Nach einem einleitenden Vortrag kann man sich darin versuchen, einige der immer größer werdenden Dreiecke nachzulegen, die von vorgegebenen Indexfolgen erzeugt werden. Hier ein Bild von „Tag der Mathematik 2008“ an der FU Berlin.

Penrose-Parkettierungen mit goldenen Dreiecken



4. Wir beginnen mit der Beobachtung, dass unabhängig vom Startdreieck und bei jeder Wahl der Indexfolge spätestens im vierten Konstruktionsschritt beide Seiten beider Dreiecke zu sehen sind.

Das hat eine interessante Konsequenz. Wir stellen uns irgendeine Indexfolge (I_k) vor und verfolgen die wachsenden Dreiecke bis zum k_0 -ten Konstruktionsschritt. Dann sehen wir ein Muster M . Dieses M wird dann ein Standarddreieck $D(k_0, 0)$ (falls $I_{k_0} = 0$) oder ein $D(k_0, 1)$ (falls $I_{k_0} = 1$) sein, das evtl. noch gedreht und/oder gespiegelt werden musste. Das hängt davon ab, wo der rote Punkt ist.

Nun betrachten wir eine andere Indexfolge (\tilde{I}_k) . Im k_0 -ten Schritt sieht man ebenfalls ein gedrehtes oder eventuell gespiegeltes $D(k_0, 0)$ oder $D(k_0, 1)$, aber nach spätestens vier weiteren Schritten enthält das dann entstandene Dreieck (evtl. bis auf eine Drehung) aufgrund der Vorbemerkung das Muster M . Anders ausgedrückt heißt das¹⁵:

Es sei M ein beliebig großer, aber beschränkter Teil einer Penrose-Parkettierung. Dann ist M in *jeder* Penrose-Parkettierung wiederzufinden.

Etwas „philosophischer“ formuliert könnte man also sagen, dass die interessanten Eigenschaften von Penrose-Parkettierungen erst dann auftreten, wenn wir unendlich große Bereiche kontrollieren können.

¹⁵Bei zehnen- und zweiteiligen Parkettierungen ist eigentlich noch eine kleine Zusatzüberlegung erforderlich.

Ehrhard Behrends

5. Es folgen noch einige *Literaturangaben* zu Penrose-Parkettierungen. Zur Popularisierung dieser Parkettierungen – auch unter Mathematikern – hat der Artikel von Gardner „Mathematical Games“ im Scientific American 1977/1 sehr stark beigetragen. Gardner hat das Thema später noch einmal aufgenommen, es gibt dazu zwei Artikel in seinem Buch „Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers“ (the Mathematical Association of America, 1997); dort ist auch ein sehr umfangreiches Literaturverzeichnis enthalten.

Beweise gibt es in den Gardner-Artikeln nicht. Im Buch von Branko Grünbaum „Tilings and Patterns“ (W.H. Freeman and Company, 1987) werden aperiodische Parkettierungen zwar mathematisch strenger behandelt, ich finde die Argumente dort und in den anderen verfügbaren Quellen allerdings nicht sehr durchsichtig. Das war der Anlass für die vorliegende Arbeit.

Zum Schluss der Arbeit möchte ich meinem Kollegen Elmar Vogt für viele erhellende Diskussionen zum Thema danken.

Eingegangen am 24. 04. 2012

Ehrhard Behrends
Fachbereich Mathematik und Informatik
der FU Berlin
Arnimallee 6
D14195 Berlin
e-mail: behrends@mi.fu-berlin.de