Zweiwertige Zustände, Matrizen und ein Zauberkunststück

Ehrhard Behrends

Ausgangspunkt der Untersuchungen dieses Artikels ist ein Zauberkunststück, das Helmut Lohan, ein Zauberfreund des Autors, im Januar 2025 im Zauberverein vorgeführt hat.[1]

Es beginnt damit, dass fünf Karten präsentiert werden, die bildoben nebeneinander auf dem Tisch liegen (Abbildung 1).[2]

Alle Karten werden mit der Bildseite nach unten gedreht, und dann führt Helmut vor, was eine Zuschauerin gleich nachmachen soll: Man nimmt zwei benachbarte Karten, dreht sie um (bildoben wird bildunten und umgekehrt), ihre Reihenfolge wird vertauscht und dann werden sie wieder hingelegt. Diese Vertauschungsaktion wollen wir die **A**-Aktion nennen. Das führt er mehrfach vor, wobei hin und wieder auch bildoben liegende Karten umgedreht werden.

Er wendet sich ab und fordert eine Zuschauerin auf, jetzt selbst **A**-Aktionen durchzuführen. Das macht sie so lange, bis sie meint, dass die Karten nun genügend durcheinander gebracht worden sind. Es könnte dann so aussehen wie in Abbildung 2.

Nun das Finale. Helmut – immer noch abgewendet – bittet die Zuschauerin, die an geraden Positionen liegenden Karten umzudrehen (bildoben wird bildunten und umgekehrt; Abbildung 3). Und dann soll sie noch die bildunten liegenden Karten aussortieren.

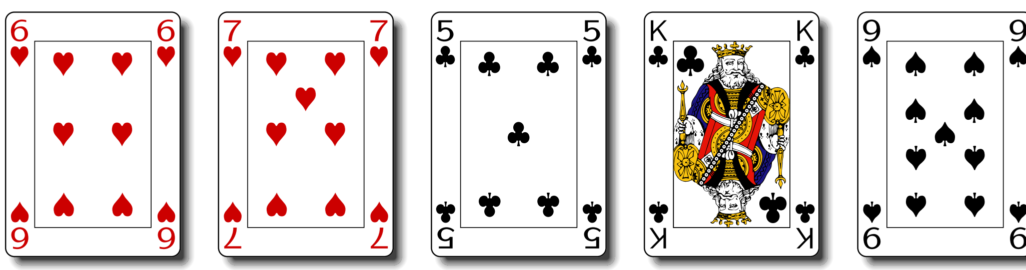

Abbildung 1. Fünf Karten

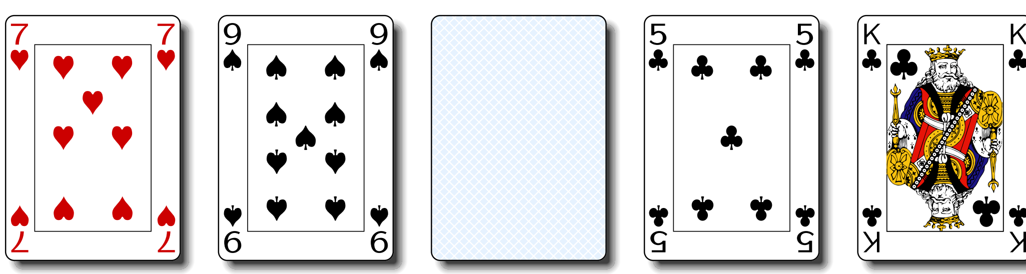

Abbildung 2. Das Ergebnis nach Umdrehen aller Karten und einigen **A**-Aktionen

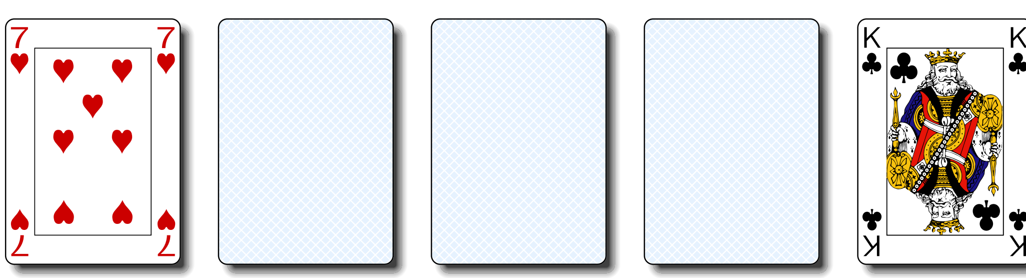

Abbildung 3. Das Ergebnis nach Umdrehen der Karten an zweiter und vierter Stelle

DOI 10.1515/dmvm-2025-0057

Entgegen aller Erwartungen weiß er trotz der vielen ihm unbekannten **A**-Aktionen genau, welche Karten nun noch auf dem Tisch liegen: Es sind die, die am Anfang an zweiter und vierter Stelle gelegen haben. Und dieses Wissen spielt er effektvoll aus. (Etwa so: „Ich sehe eine rote und eine schwarze Karte!“ „Konzentrieren Sie sich so intensiv, wie Sie es können, auf die!“ „Die Gedankenübertragung hat geklappt, es sind die Herz Sieben und der Kreuz König!“).

Und woher wusste er das? Wir werden zeigen, dass das Verständnis des subtilen Zusammenwirkens zweier ja-nein-Zustände der Karten den Schlüssel zum Verständnis liefert. Eben waren es die Möglichkeiten „Liegt an gerader/ungerader Position“ und „Liegt bildoben/bildunten“, es könnten aber auch zwei beliebige andere sein.

Wir präzisieren diese Ideen in Abschnitt 1 unter Verwendung der Sprache der Matrixtheorie. Der Abschnitt 2 enthält dann unser Hauptergebnis, in Abschnitt 3 gibt es Vorschläge, es für Zauberkunststücke anzuwenden, und in Abschnitt 4 schließlich findet man noch einige Ergänzungen.

1 Vorbereitungen

Wir nehmen noch einmal das einleitende Beispiel auf. Wir wollen die dort beschriebene Situation wie folgt verallgemeinern:

- Ein $n \in \mathbb{N}$ ist fixiert, und n unterscheidbare Gegenstände sind vorgelegt. Im Beispiel war $n = 5$ und es ging um Spielkarten.
- Dann war noch wichtig, ob sie im Augenblick an gerader oder ungerader Position liegen (und auch, ob man die Vorderseite oder die Rückseite sieht). So etwas wollen wir einen *Zustand* (genauer: einen zweiwertigen Zustand) nennen. Der wird dadurch codiert, dass wir jedem der n Elemente die Zahl 0 oder 1 zuordnen, wobei natürlich festzulegen ist, welche Bedeutung 0 und 1 haben. Etwa: Die 0 steht für „liegt an ungerader Position“ und die 1 für „gerade Position“.

Für die hier wichtigen zweiwertigen Zustände soll noch eine *Zusatzbedingung* erfüllt sein: Sie sollen *veränderbar* sein. Das ist in den Beispielen „gerade/ungerade Position“ und „bildoben/bildunten“ sicher erfüllt (denn man kann Karten ja leicht umlegen), nicht aber etwa bei „rote Karte/schwarze Karte“.

Zwei solche Zustände, wir nennen sie Z_1, Z_2, seien gegeben. Wenn für jeden der n Gegenstände beschrieben ist, welche Werte Z_1, Z_2 gerade annehmen, so nennen wir das eine *Konstellation*. Ist vorher festgelegt worden, wie die Zustände durch 0 und 1 codiert sind, so kann man das übersichtlich in einer $2 \times n$-Matrix, der *Konstellationsmatrix* zusammenfassen.

Zur Illustration folgt ein konkretes Beispiel. Wir haben acht kleine Kärtchen vorbereitet: Auf der einen Seite steht die zugehörige Zahl in blau, auf der anderen in rot. Und wir betrachten:

- Zustand Z_1: Die Karte liegt auf der linken ($Z_1 = 0$) oder rechten ($Z_1 = 1$) Hälfte des Tisches.
- Zustand Z_2: Man sieht die rote ($Z_2 = 0$) oder die blaue ($Z_2 = 1$) Seite der Karte.

In Abbildung 4 findet man ein Beispiel für eine Konstellation dieser Kärtchen.

Einige Kärtchen liegen links, einige rechts, bei allen sieht man die blaue Seite. Die Konstellationsmatrix ist hier

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist eine 2×8-Matrix, und in der j-ten Spalte sieht man die konkreten Werte von Z_1, Z_2 für Karte Nummer j.

Zum Beispiel ist die erste Spalte von K deswegen $(0,1)^{\perp}$, weil Karte 1 links liegt und von der blauen Seite aus zu sehen ist.

Nun sollen Konstellationen verändert werden. Im einleitenden Beispiel bestand doch eine **A**-Aktion darin, benachbarte Karten zu vertauschen (da wird aus gerade ungerade und umgekehrt) und umzudrehen. Kurz: Beide Zustände wurden in ihr Gegenteil verändert.

Hier definieren wir: Eine $\mathbf{A}_j$-Aktion für eine Konstellation bedeutet, dass für das j-te Element beide Zustände negiert werden. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Fundamentalmatrix der neuen Konstellation (also nach $\mathbf{A}_j$-Aktion) dadurch gegeben ist, dass man einfach eine geeignete Matrix A_j zu K addiert. A_j enthält in der j-ten Spalte zwei Einsen, alle anderen Einträge sind Null, und Addition ist elementweise als Addition in der $\mathbb{Z}_2$ aufzufassen.

Und was passiert nach mehreren $\mathbf{A}_j$-Aktionen? Dazu muss man zu K die Summe der A_j für die auftretenden j addieren. Und diese Summe ist (wegen $1 + 1 = 0$) die Matrix A_J für eine geeignete Teilmenge $J \subset \{1, \ldots, n\}$: Die j-Spalte

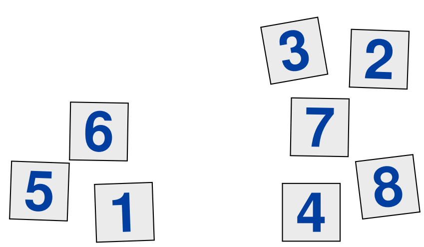

Abbildung 4. Eine Konstellation für unser illustrierendes Beispiel

von A_J ist $(1,1)^\perp$ für $j \in J$ und $(0,0)^\perp$ sonst. (Genauer besteht J aus denjenigen j, für die eine ungerade Anzahl von $\mathbf{A}_j$-Aktionen durchgeführt wurden.)

Das bedeutet, und es ist wenig überraschend: Statt einige Male beide Zustände für gewisse j zu negieren, kann man es auch auf einmal für alle j einer gewissen Teilmenge tun.

Es ist auch zu bemerken, dass die A_J mit $J \subset \{1, \ldots, n\}$ eine additive Untergruppe der $\mathbb{Z}_2$-wertigen $2 \times n$ Matrizen bilden, denn offensichtlich gilt $A_J + A_{J'} = A_{J \Delta J'}$ (Δ= symmetrische Differenz).

Im Zauberkunststück gab es aber noch zwei weitere Aktionen. Zuerst wurden doch die Karten zum Kennenlernen bildoben gezeigt, und dann wurden alle umgedreht. Das wurde vom Zauberer deswegen gemacht, weil die Zuschauer keine Gelegenheit haben sollten, sich die genaue Lage der einzelnen Karten einzuprägen. Und zweitens gab es vor dem Finale die Aufforderung: „Drehe alle Karten um, die jetzt rechts liegen!“. Mit anderen Worten: Es wird nun Zustand Z_2 genau dann negiert, wenn Z_1 gleich 1 ist. Das kann man sehr elegant mit Konstellationsmatrizen machen: Ist K die aktuelle Konstellationsmatrix, so muss man nur K von links mit der Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

multiplizieren. Wir fassen zusammen:

- In der Ausgangssituation sollen einige der n Gegenstände den Zustand $Z_1 = 1$ haben, und für andere soll $Z_1 = 0$ gelten. Für alle j ist $Z_2 = 1$ (im einleitenden Beispiel wurden am Anfang alle Karten bildoben gezeigt). In Analogie zur Abbildung 4 ist die Konstellationsmatrix nach geeigneter Nummerierung also
$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$
- Dann werden alle Z_2 negiert, die neue Konstellationsmatrix ist
$$K_1 = K_0 + \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$
- Es folgen einige $\mathbf{A}_j$-Aktionen, und wir wissen schon, dass man das durch Addition einer geeigneten Matrix D_J beschreiben kann. Wir sind also bei $K_1 + D_J$.
- Und im finalen Schritt wird alles mit F multipliziert. Es geht also um die Matrix
$$F(K_1 + D_J).$$

Unser Hauptergebnis besagt, dass man wichtige Informationen über die finale Konstellationsmatrix hat, obwohl die Teilmenge J unbekannt ist.

2 Das Hauptergebnis

Satz. *In der finalen Konstellationsmatrix $F(K_1 + D_J)$ gilt für ein j genau dann $Z_2(j) = 1$, wenn für K_1 die Bedingung $Z_1(j) = 1$ erfüllt ist.*

Beweis. Wegen $(1,1)(1,1)^\perp = 0$ besteht die zweite Zeile von FD_J nur aus Nullen. Und $(1,1)(1,0)^\perp = 1$ impliziert, dass in der zweiten Zeile von FK_1 die ersten Einträge 1 sind (so viele, wie es am Anfang Einträge mit $Z_1 = 1$ gab), bevor dann nur noch Nullen kommen. Das gleiche gilt dann auch für die zweite Zeile von $FK_1 + FD_J$, und das beweist die Behauptung. □

Das wollen wir durch ein Beispiel illustrieren. Wir wählen die Situation aus Abbildung 4, da sah man die Konstellation K_0. K_1 ist in Abbildung 5 zu sehen, dann folgten einige $\mathbf{A}_j$-Aktionen (Abbildung 6). Und in Abbildung 7 ist gezeigt, was sich nach der finalen Aktion (Multiplikation mit F) ergeben hat. Erwartungsgemäß sieht man die blauen Seiten genau derjenigen Karten, die in Abbildung 4 rechts lagen.

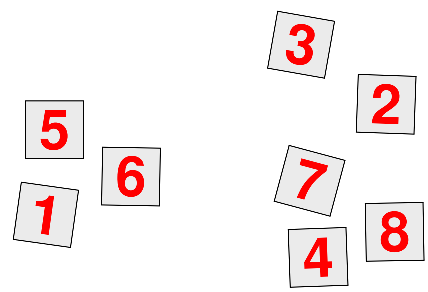

Abbildung 5. Überall wurde Z_2 negiert.

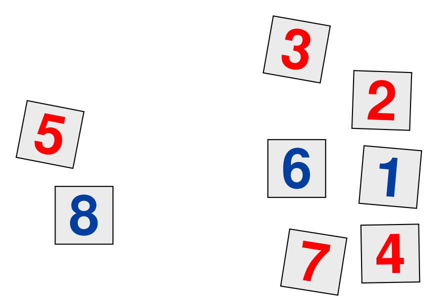

Abbildung 6. Die Konstellation nach einigen $\mathbf{A}_j$-Aktionen

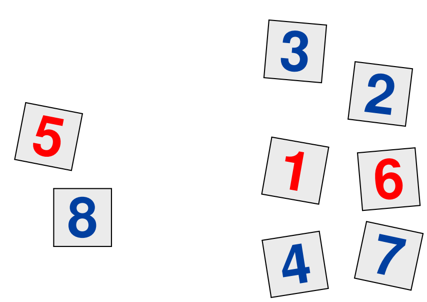

Abbildung 7. Die Konstellation nach der finalen F-Multiplikation

3 Anregungen für Zauberkunststücke

Hier gibt es einige Vorschläge, wie das Ergebnis in ein Zauberkunststück – zum Beispiel für das nächste Familientreffen – umgewandelt werden kann.

a. Gedankenübertragung!
Das ist eine Variante des einleitend präsentierten Kunststücks.

- Ein Zuschauer sucht sich einige Spielkarten aus einem Spiel und legt dann einige nach rechts, andere nach links bildoben auf den Tisch. Der Zauberer merkt sich unter den rechts liegenden Karten eine mit einer besonderen Eigenschaft (die einzige Bildkarte, die einzige Pik, die mit dem kleinsten Wert, ...). Recht bald werden dann alle bildunten gelegt.
- Dann kommen die Tausch-Dreh-Aktionen. Der Zuschauer kann beliebig oft einige von links nehmen und umgedreht nach rechts legen oder umgekehrt. Der Zauberer hat das vorgemacht, danach wendet er sich ab.
- Schließlich dreht der Zuschauer die rechts liegenden Karten um. Nun sind nur noch die bildoben, die ehemals rechts lagen.
- Die bildunten liegenden werden vom Zuschauer aussortiert, ebenso diejenigen, auf die nicht das Merkmal der gemerkten Karte passt (also etwa: „Nur die Pikkarten liegen lassen".)
- Durch „ Gedankenkraft" übermittelt der Zuschauer den genauen Wert der einzigen übrig gebliebenen Karte. Das klappt bestimmt, denn der Zauberer weiß ja, welche es ist.

b. „Links-rechts" durch „benachbart" ersetzen
Wichtig ist ja eigentlich nur, dass die verwendeten Karten in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt wurden und dass „tauschen und umdrehen" immer nur zwischen Karten stattfindet, die nicht in der gleichen Teilmenge liegen. Das kann man ein bisschen verschleiern, indem man statt links-rechts eine andere Unterteilung wählt. Hier ein Vorschlag dazu.

- Man lässt acht beliebige Karten zu einem 3×3-Quadrat (ohne Mitte) zunächst bildoben auslegen (Abbildung 8) und dann umdrehen.
  Der Zauberer merkt sich eine der Eckkarten mit einer besonderen Eigenschaft. (Etwa die Kreuz Dame als einzige Bildkarte.)
- Nun lautet die Anweisung für **A**-Aktionen: „Suche zwei benachbarte Karten, vertausche sie, drehe sie um und lege sie wieder hin." Damit ist links-rechts durch Eckkarte-Mittelkarte ersetzt.
- Zum Schluss werden die Eckkarten umgedreht. Es könnte dann so aussehen wie in Abbildung 9.
  Der Zauberer weiß, dass genau die ehemaligen Eckkarten oben liegen.

c. Zielzahlen
Wenn man nur Zahlenkarten verwendet, kann man in Kunststück a. schnell und heimlich die Summe der rechts liegenden Werte berechnen. Und dann kennt der Zauberer am Ende die Summe der nach oben zeigenden Karten.

Wenn er selbst am Anfang verteilt, kann er es so einrichten, dass die Summe zum vielleicht am Vorführungstag gegebenen Anlass passt: Geburtstag, Jubiläum, Datum usw.

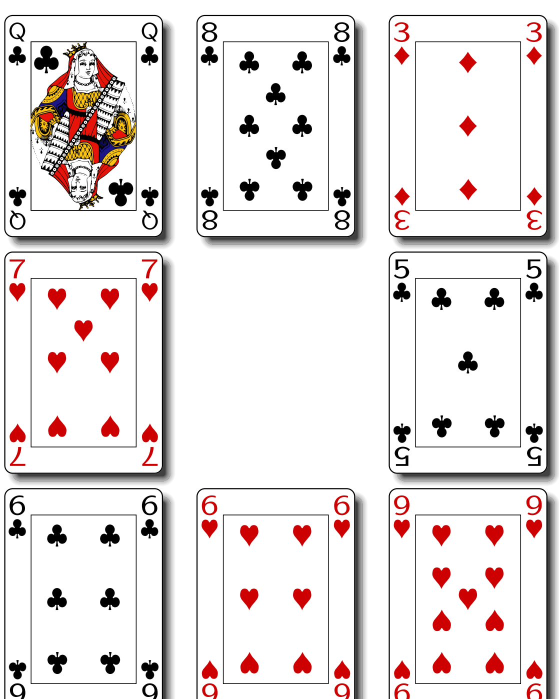

Abbildung 8. Die Start-Konstellation

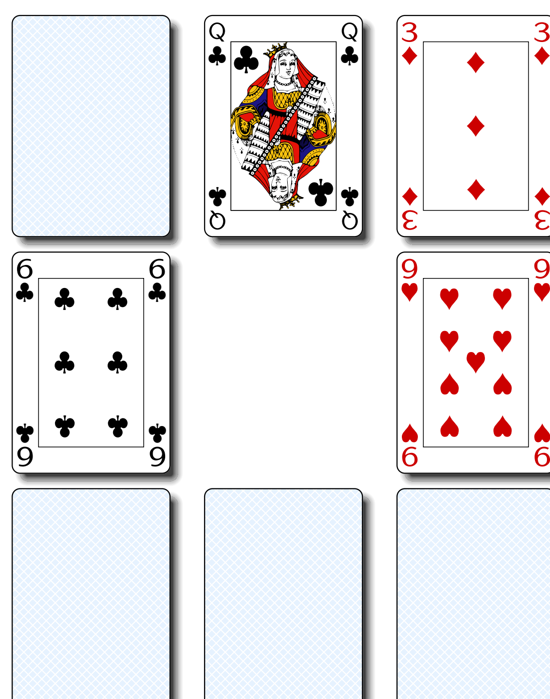

Abbildung 9. Der Zuschauer hat lange umgedreht ...

d. Keine Spielkarten!

Spielkarten sind ja nur ein praktischer Notbehelf in der Zauberei: preiswert, immer leicht verfügbar, viele verschiedenen Merkmale. Hier geht es aber nur um die Möglichkeit, Karten identifizieren zu können, die eine Vorder- und Rückseite haben. Da kann man alternativ Fotos, Postkarten usw. verwenden.

4 Ergänzungen

a. Mehr als zwei Zustände

Unsere Überlegungen lassen sich auf eine höhere Anzahl von zweiwertigen Zuständen und auch auf Zustände, die mehr als zwei Werte annehmen, übertragen. Das soll hier nicht weiterverfolgt werden, denn die Handlingsanweisungen würden für Zauberer und Zuschauer etwas gekünstelt wirken.

b. Invarianten

Wenn bei einem Zauberkunststück ein Zuschauer eine spezielle Handlung beliebig oft durchführen kann, ohne dass dem Zauberer die für ihn wichtigen Informationen verloren gehen, so gibt es immer eine *Invariante* im Hintergrund: Eine Eigenschaft E, die erhalten bleibt, wenn man eine gewisse Abbildung T anwendet. Das kann man dann natürlich auch beliebig oft machen. Ein oft in der Zauberei genutztes nichttriviales Beispiel ist das *Abheben* (= Teilstapel daneben legen, den anderen Teilstapel drauflegen). Da weiß man zum Beispiel: Liegt jetzt – zyklisch gesehen – die Pik 4 direkt hinter der Karo 3, so ist das auch nach beliebig vielen Abhebevorgängen der Fall.[3]

Für die vorstehenden Untersuchungen ist eine Invariante leicht zu identifizieren:

- Gegeben sei eine feste Startkonfiguration, nach Nullsetzen von S_2 ist die zugehörige Matrix K_1.
- Sei $\mathcal{K}$ die Familie der Konfigurationsmatrizen mit der folgenden Eigenschaft: Nach Multiplikation von links mit F entsteht eine Konfiguration, für die bei genau denjenigen j die Bedingung $Z_2(j) = 1$ gilt, für die in K_1 die Bedingung $Z_1(j) = 1$ erfüllt war.
- Und dann gilt: K_1 liegt in $\mathcal{K}$, und mit jedem K auch $K + D_J$ für jedes J. Kurz: $\mathcal{K}$ ist invariant unter Additionen mit Elementen der Gruppe der D_J.

c. Rechts oder links umdrehen?

In der obigen Analyse hatten wir den rechten Stapel (bzw. die j mit $Z_1(j) = 1$) umdrehen lassen. Dann lagen am Ende genau diejenigen Karten bildoben, die am Anfang im *rechten* Stapel lagen. Doch es ist klar, dass „rechts“ und „links“ symmetrische Rollen spielen. Wenn der linke Stapel umgedreht wird, sieht man die ehemals *linken* Karten bildoben.

Dank

Ich danke meinem Kollegen Martin Grötschel für interessante Diskussionen bei der Vorbereitung dieser Arbeit.

Anmerkungen

1. Leider verliert sich der Ursprung dieses Kunststücks im Dunkel der Zaubergeschichte.
2. Helmut führt es mit Karten vor, die Tiersymbole zeigen. Wir verwenden hier der Einfachheit halber Spielkarten.
3. Etwas anspruchsvoller ist das in Kapitel 2.1 von [1] und – mit ausführlicherer Analyse des mathematischen Hintergrunds – in Kapitel 1 von [2] ausgeführt. Und in [3] sind weitere Beitäge gesammelt, die sich wie das Buch [1] an interessierte, aber mathematisch nicht vorgebildete Leserinnen und Leser richten.

Literatur

[1] E. Behrends. *Der mathematische Zauberstab*. Rowohlt 2015.
[2] E. Behrends. *Mathematik und Zaubern – ein Einstieg für Mathematiker*. Springer Spektrum 2017.
[3] E. Behrends. *Der große mathematische Zauberstab*. Rowohlt 2024.

Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Freie Universität Berlin, Mathematisches Institut
Arnimallee 6, 14195 Berlin
behrends@math.fu-berlin.de

Ehrhard Behrends ist Professor für Mathematik i. R. an der Freien Universität Berlin.
Seine Fachgebiete sind Funktionalanalysis und Stochastik.
Seit Januar 2015 ist er Mitglied im Magischen Zirkel von Deutschland (MZvD).