

Numerische Modellierung von Grundwasserströmungen

Heiko Berninger

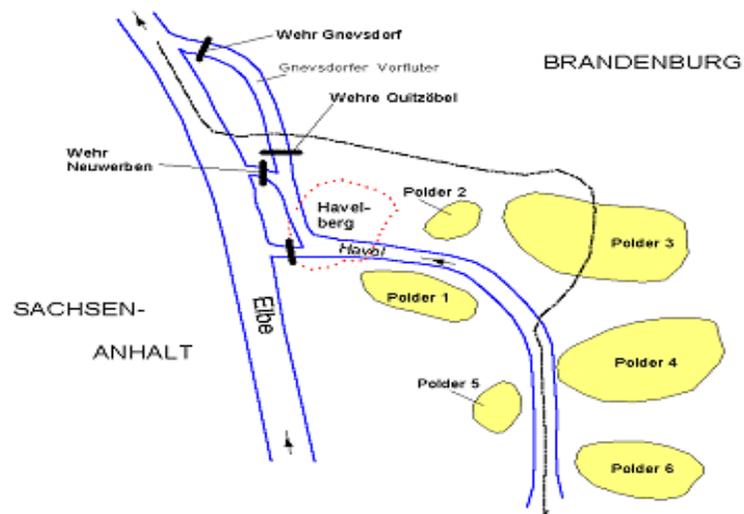
Berlin, 23. Juni 2004

Elbe-Hochwasser August 2002



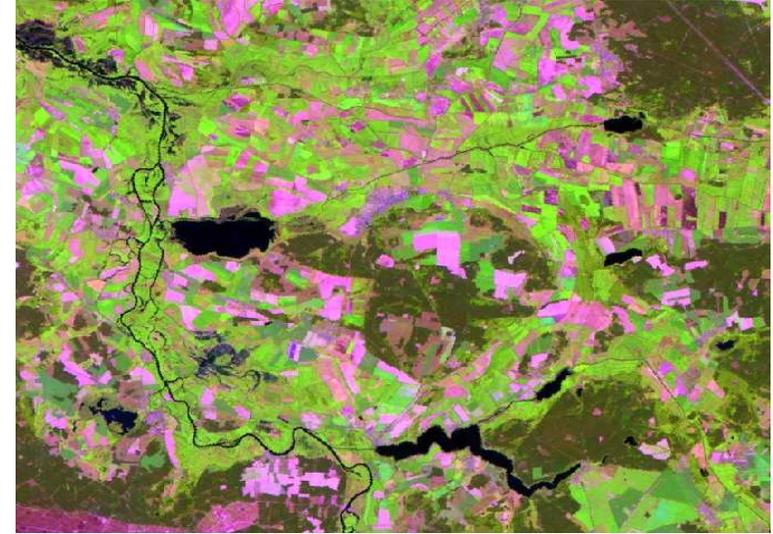
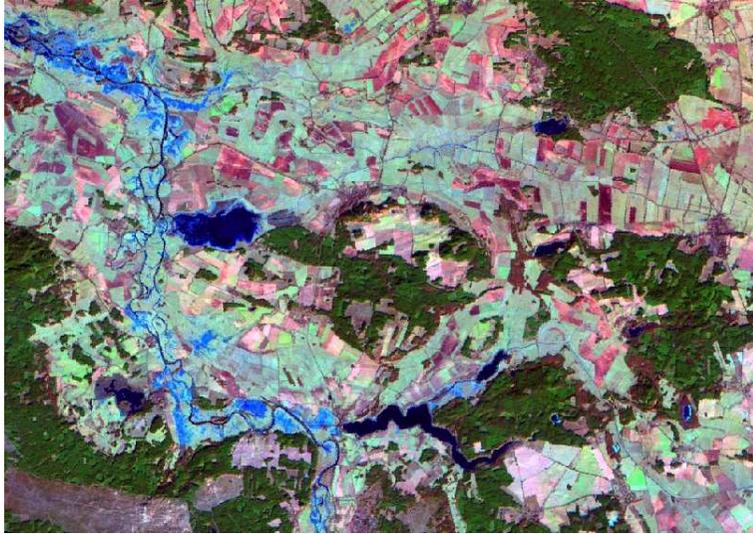
© 2002 M. Zebisch TUB/PIK

Ökosystem Untere Havel



Unteres Havelland als natürliches Überschwemmungsgebiet

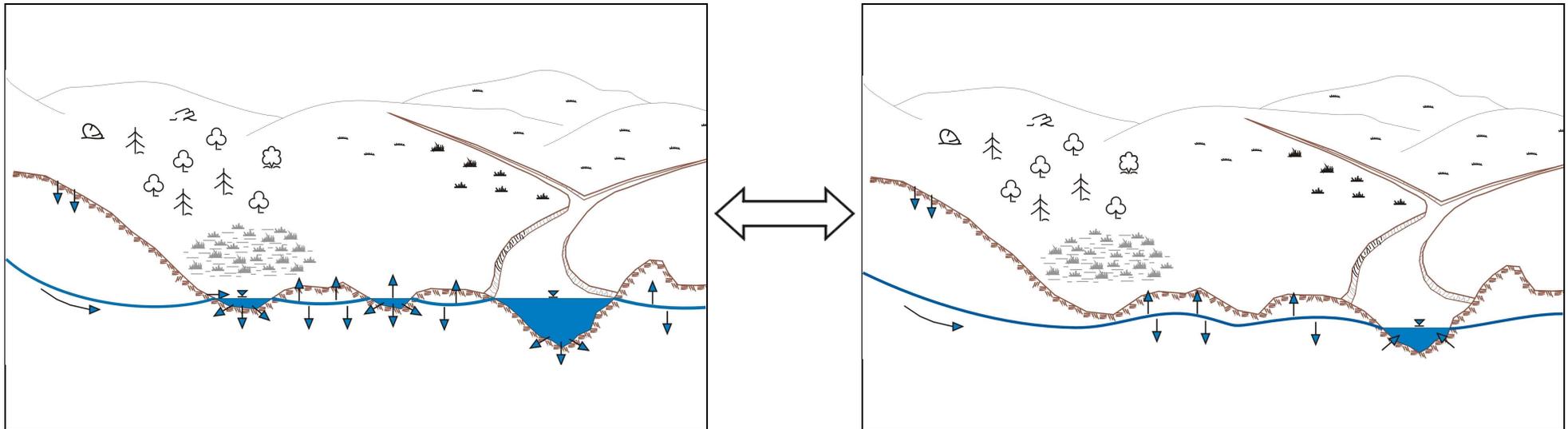
Hydrologische Prozesse an Flüssen in Flachlandgebieten



- Bildung und Raum-Zeit-Variabilität voll-gesättigter Gebiete
- Austausch zwischen Grund- und Oberflächenwasser

System zahlreicher heterogener Prozesse

Beispiel: Abflußbildung



Kopplung von Grund- und Oberflächenwasser

- zunächst mit Compartment-Modell
- später zum Beispiel mit Flachwasser-Gleichungen

Motivation für die hydrologische Forschung

Quantifikation der Wasserressourcen und

Bestimmung der dominierenden hydrologischen Prozesse hinsichtlich:



- nachhaltiger landwirtschaftlicher Nutzung
- Bewahrung des Ökosystems
- Auswirkungen wasserwirtschaftlicher Maßnahmen

Grundsätzliches zu den Numerischen Simulationen

Mathematisches Modell:

Netzwerk von Hierarchien verschiedener Modelle für die Teilprozesse

Grenzen für das “Rechnen in der Wissenschaft”:

Numerische Komplexität und Verfügbarkeit verlässlicher Daten



Das Ziel:

Entwicklung effizienter und robuster numerischer Algorithmen für die Teilprozesse

Robustheit:

Keine Anfälligkeit der Performance selbst bei starker Variation der relevanten physikalischen Parameter!

Ein Teilprozeß: Wasserfluß durch poröses Medium

Massenerhaltung:

$$nS_t + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$S(x, t)$ Anteil des Wassers am Porenraum (Sättigung, dimensionslos)

$n(x)$ Anteil des Porenraums am Gesamtvolumen (Porosität, dimensionslos)

$\mathbf{v}(x, t)$ Wasserfluß (Filtergeschwindigkeit, in m/s)

Ein Teilprozeß: Wasserfluß durch poröses Medium

Massenerhaltung:

$$nS_t + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$S(x, t)$ Anteil des Wassers am Porenraum (Sättigung, dimensionslos)

$n(x)$ Anteil des Porenraums am Gesamtvolumen (Porosität, dimensionslos)

$\mathbf{v}(x, t)$ Wasserfluß (Filtergeschwindigkeit, in m/s)

Darcysches Gesetz:

$$\mathbf{v} = -K_c \nabla h$$

$K_c(x, p)$ hydraulische Leitfähigkeit (in m/s)

$h(x, t)$ Standrohrspiegelhöhe (in m)

Die Richards–Gleichung

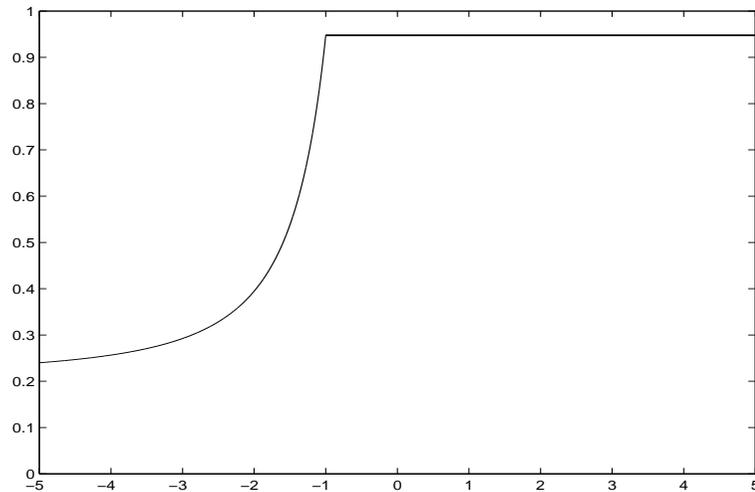
$$S(p)_t - \operatorname{div}(K(x)\kappa(S(p))\nabla(p - \rho g z)) = 0$$

$K(x)$ (normierte) Permeabilität des Bodens (in m/s)

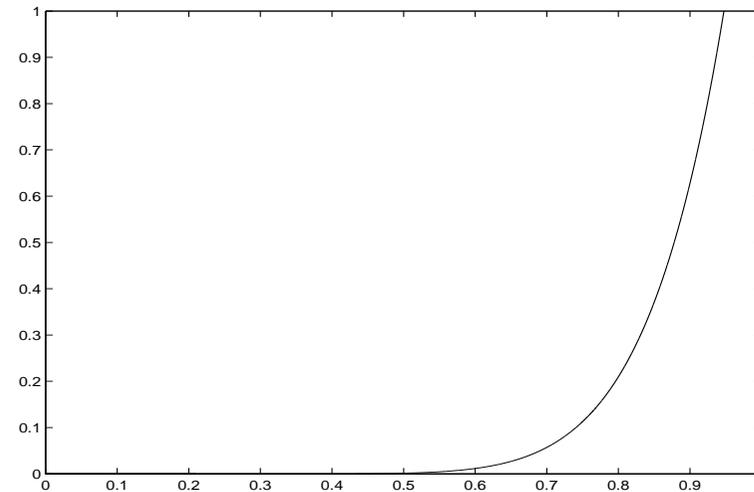
$p(x, t)$ Druckdifferenz zwischen Wasser– und Luftphase (Kapillardruck)

$\kappa(\cdot)$ relative Permeabilität (dimensionslos)

Zustandsgleichungen: (Brooks & Corey, van Genuchten)



Druck–Sättigungsbeziehung: $p \mapsto S(p)$



relative Permeabilität vs. Sättigung: $S \mapsto \kappa(S)$

Die Richards–Gleichung

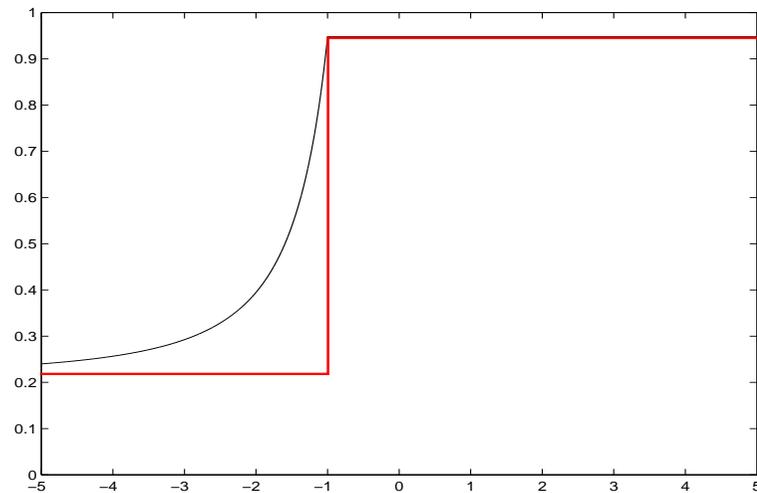
$$S(p)_t - \operatorname{div}(K(x)\kappa(S(p))\nabla(p - \rho g z)) = 0$$

$K(x)$ (normierte) Permeabilität des Bodens (in m/s)

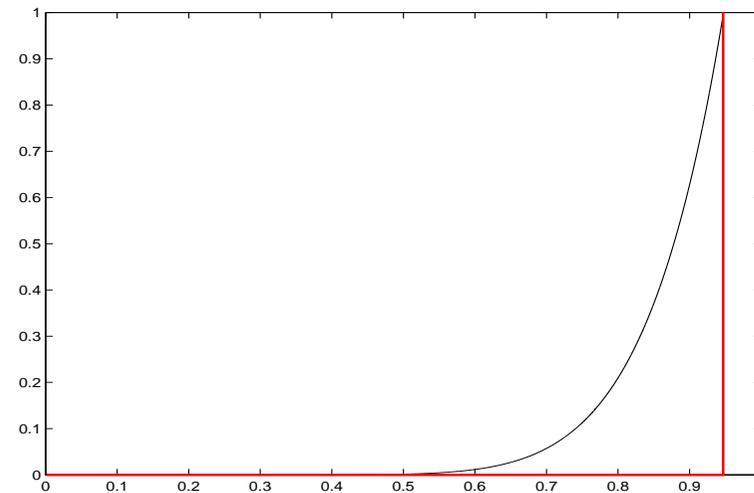
$p(x, t)$ Druckdifferenz zwischen Wasser– und Luftphase (Kapillardruck)

$\kappa(\cdot)$ relative Permeabilität (dimensionslos)

Zustandsgleichungen: (Brooks & Corey, van Genuchten)

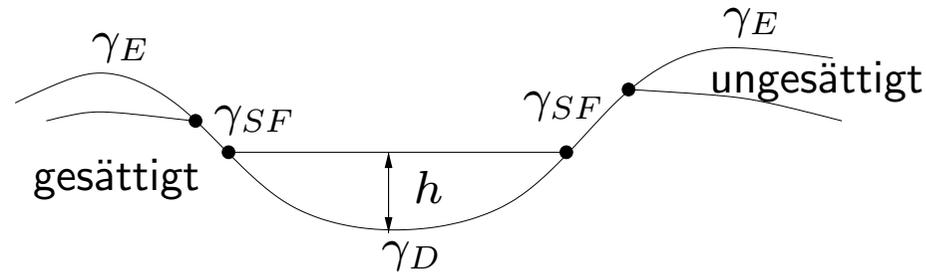


Druck–Sättigungsbeziehung: $p \mapsto S(p)$



relative Permeabilität vs. Sättigung: $S \mapsto \kappa(S)$

Signorini–Randbedingungen



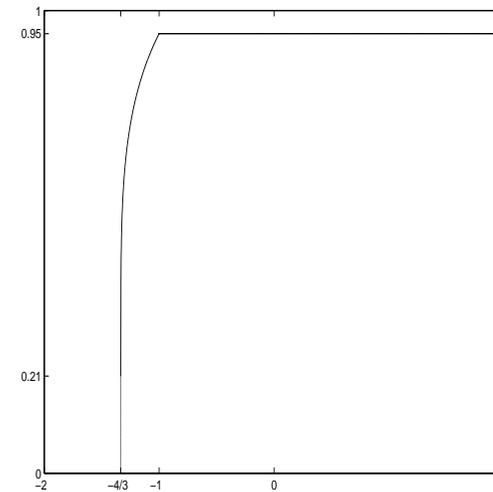
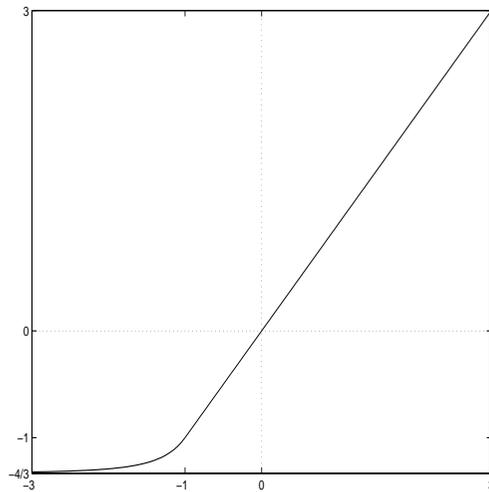
$$p \leq 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot p = 0 \quad \text{auf} \quad \gamma_S := \gamma_E \cup \gamma_{SF}$$

- vorgegebener Wasserspiegel $h(t)$: Damm–Problem (Alt, Luckhaus, Visintin 1984)
- zu bestimmender Wasserspiegel $h(m(t))$ aus Massenerhaltung:
Compartment–Modell

$$\dot{m} = \int_{(\gamma_D \cup \gamma_{SF})(t)} \rho \mathbf{v}(x, p) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Kirchhoff–Transformation

$$\beta(p) := \int_0^p \kappa(S(q)) \, dq \quad \Longrightarrow \quad \nabla \beta(p) = \kappa(S(p)) \nabla p$$



generalisierter Druck: $u := \beta(p)$

$$H(u) := S(\beta^{-1}(u))$$

\Longrightarrow semilineare elliptisch–parabolische Differentialgleichung

$$H(u)_t - \operatorname{div}(K(x)\nabla u - \kappa(H(u))\varrho g e_z) = 0$$

Herleitung einer schwachen Formulierung

Wir “testen” die Gleichung mit Differenzen $v - u$, wobei die Funktionen v aus einer konvexen Menge kommen:

$$\mathcal{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\gamma_D(t)} = \rho g h(t), v|_{\gamma_S(t)} \leq 0\}$$

$$\implies \int_{\Omega} H(u)_t (v - u) dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x)\nabla u - \kappa(H(u))\rho g e_z)(v - u) dx = 0$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H(u)_t (v - u) dx + \int_{\Omega} (K(x)\nabla u - \kappa(H(u))\rho g e_z) \nabla (v - u) dx &= 0 \\ + \int_{\partial\Omega} -(K(x)\nabla u - \kappa(H(u))\rho g e_z) \cdot \mathbf{n} (v - u) d\sigma &= 0 \end{aligned}$$

Variationsungleichung

Das Randintegral ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} (v - u) &= \int_{\gamma_D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} (v - u) + \int_{\gamma_N} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} (v - u) + \int_{\gamma_S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} (v - u) \\ &= 0 + 0 - \varepsilon \leq 0 \end{aligned}$$

\implies **schwache Formulierung** für unser Randwertproblem: Suche $u(t) \in \mathcal{K}$ mit

$$\int_{\Omega} H(u)_t (v - u) dx + \int_{\Omega} (K(x) \nabla u - \kappa(H(u)) \rho g e_z) \nabla (v - u) dx \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}$$

Ohne Signorini-Rand hat man eine Variationsgleichung: Suche $u(t) \in H_{\gamma_D}^1(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} H(u)_t v dx + \int_{\Omega} (K(x) \nabla u - \kappa(H(u)) \rho g e_z) \nabla v dx = 0 \quad \forall v \in H_{\gamma_D}^1(\Omega)$$

Diskretisierung

Im Ort in **Finite-Element-Raum** $\mathcal{S}_j \subset H_{\gamma_D}^1(\Omega)$ mit Testfunktionen $v \in \mathcal{S}_j$ für Approximation $u_j^n \in \mathcal{S}_j$ von $u(t_n) \in H_{\gamma_D}^1(\Omega)$.

In der Zeit mit **implizitem Euler** ($\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$) und **expliziter** Behandlung des Gravitationsterms:

$$H(u(t_{n+1}))_t \approx \frac{1}{\tau_{n+1}} (H(u_j^{n+1}) - H(u_j^n))$$

\implies Suche $u_j^{n+1} \in \mathcal{S}_j$ mit:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H(u_j^{n+1}) v \, dx + \int_{\Omega} \tau_{n+1} K(x) \nabla u_j^{n+1} \nabla v \, dx \\ - \int_{\Omega} H(u_j^n) v \, dx - \int_{\Omega} \tau_{n+1} \kappa(H(u_j^n)) \rho g e_z \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{S}_j \end{aligned}$$

Konvexe Minimierung

Mit einer (konvexen!) Stammfunktion Φ von H ist Letzteres die Bedingung für das Verschwinden der Ableitung und damit für das Minimum u_j^{n+1} des Funktionals

$$F : u_j \mapsto \int_{\Omega} \Phi(u_j) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_{n+1} K(x) \nabla u_j \nabla u_j dx - \ell_{u_j^n}(u_j)$$

auf S_j .

Konvexe Minimierung

Mit einer (konvexen!) Stammfunktion Φ von H ist Letzteres die Bedingung für das Verschwinden der Ableitung und damit für das Minimum u_j^{n+1} des Funktionals

$$F : u_j \mapsto \int_{\Omega} \Phi(u_j) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_{n+1} K(x) \nabla u_j \nabla u_j dx - \ell_{u_j^n}(u_j)$$

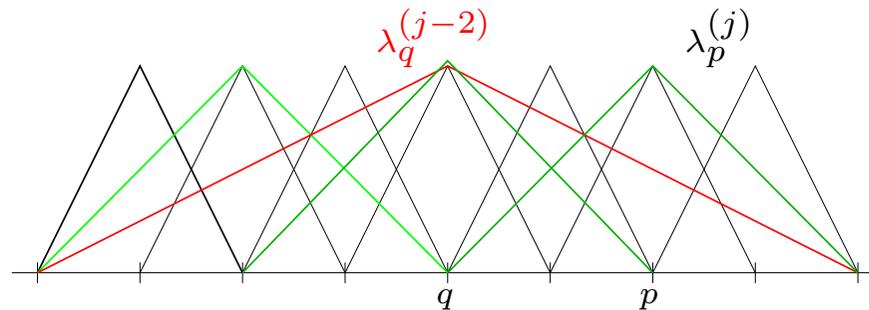
auf S_j .

Numerische Approximation von u_j^{n+1} durch sukzessives eindimensionales Minimieren von F in Richtung der Basisfunktionen von S_j :

- Finde Minimum einer reellen konvexen Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c + \Phi(x)$.
- Deutung als nichtlineares Gauss–Seidel–Verfahren (linear falls $\Phi = 0$)
- Konvergenz gegen u_j^{n+1} !

Mehrgitter-Idee

Verbesserung der Konvergenzraten durch Berücksichtigung einer **Skala von Frequenzen**



und Minimieren von F auch in Richtung von Basisfunktionen auf gröberem Gitter, d.h. mit größerem Träger bzw. “kleinerer Frequenz”.

Anschaulich: Nach “Glätten” auf feinem Gitter überwiegen die niederfrequenten Anteile im Fehler, die sukzessive korrigiert werden.

Durch zusätzliche Techniken auf den gröberen Gittern erreicht man für n Unbekannte mit einem (optimalen) Aufwand von $\mathcal{O}(n)$ asymptotisch Konvergenzraten, die praktisch nicht davon abhängen, wie fein das Gitter ist — **Robustheit!** (Kornhuber 2002)

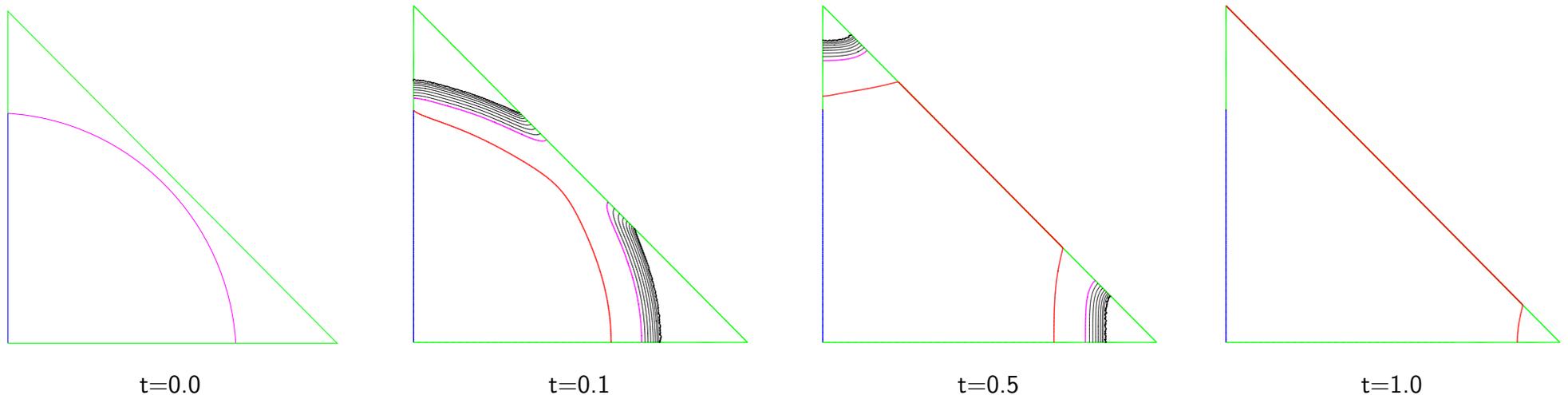
Numerische Resultate: Modell-Problem ohne Gravitation

Zustandsgleichungen: Brooks-Corey

Parameter: ($\lambda = 1$, $p_b = -0.1m$, $K = 4.8 \cdot 10^{-3} m/s$)

Zeitdiskretisierung: impliziter Euler, $\Delta t = 0.1s$

Ortsdiskretisierung: lineare finite Elemente, uniforme Verfeinerung, $h_j = 1/128$



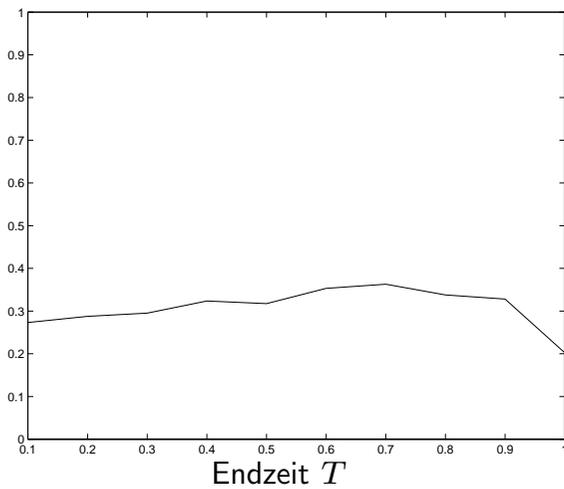
Druck-Höhenlinien

Robuste Konvergenz

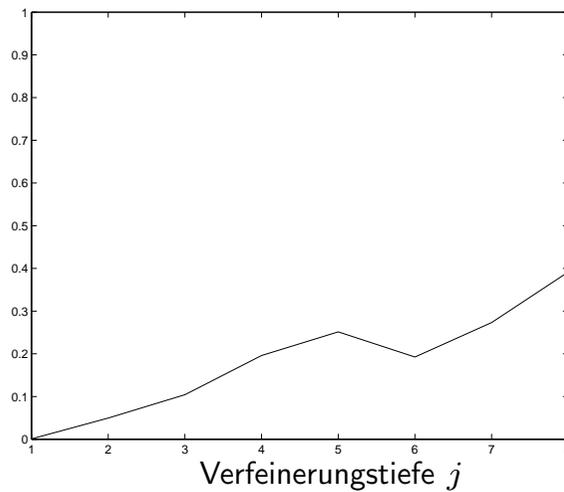
Algorithmus: Monotones Mehrgitter mit uniformer Verfeinerung

Konvergenzraten bei Variation

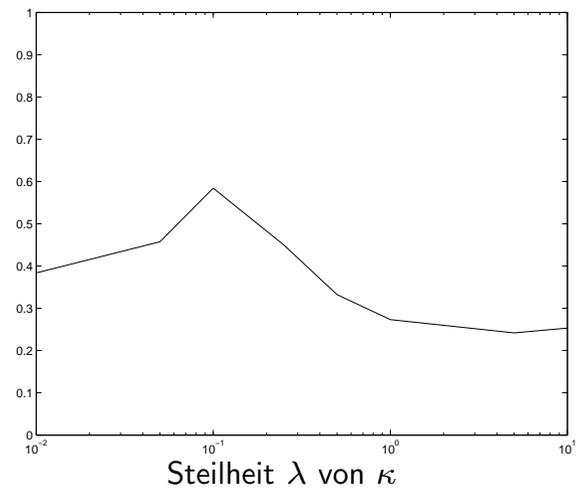
der Endzeit T



der Gitterweite $h_j \rightarrow 0$



der Steigung von κ



Rückblick:

Massenerhaltung, Darcy–Gesetz, Richardsgleichung mit Signorini–Randbedingungen, Variations(un)gleichung, [Kirchhoff–Transformation](#), implizit/explicite Diskretisierung, konvexe (sukzessive) Minimierung, monotonen Mehrgitter, **Robustheit**

Rückblick:

Massenerhaltung, Darcy–Gesetz, Richardsgleichung mit Signorini–Randbedingungen, Variations(un)gleichung, Kirchhoff–Transformation, implizit/explicite Diskretisierung, konvexe (sukzessive) Minimierung, monotonen Mehrgitter, Robustheit

Ausblick:

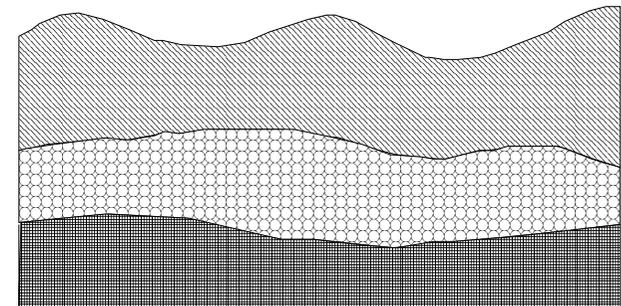
verschiedene Böden, d.h. ortsabhängige Zustandsgleichungen:

$$S = S(x, p) = S_i(p) \quad \text{und} \quad \kappa = \kappa(x, p) = \kappa_i(p) \quad \forall x \in \Omega_i, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$$

Idee:

Kirchhoff–Transformation in den Teilgebieten und Kopplung durch geeignete Randbedingungen

→ nichtlineare Gebietszerlegung,
z.B. Robin–Robin–Verfahren



verschiedene Böden

Beachte die Langzeitperspektive!

