Heterogene und nichtkonforme Gebietszerlegungsmethoden
Seminar, WS 2/3

Gebietszerlegung für ein Signorini–Problem im porösen Medium

Heiko Berninger

11. Dezember 2002

INHALT:

1. Modellproblem

2. Mehrgebietsformulierung

3. Interface–Bedingungen

4. Steklov–Poincaré–Operatoren

1. Modellproblem

Richardsgleichung

$$b(x)S(p)_t + \nabla \cdot q(x,p) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit Wasserfluß

$$q(x,p) = -M(x)kr(S(p))\nabla(p_r p - z)$$

und Signorini–Randbedingungen

$$p \leq 0, \;\; q \cdot n \geq 0, \;\; p \cdot (q \cdot n) = 0 \quad \text{auf } \gamma_S.$$

Variationsformulierung (VP):

$$p \in \mathcal{K} := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\gamma_D} = \tilde{p},\; v|_{\gamma_S} \leq 0\} :$$

$$\int_\Omega bS(p)_t(v-p) - q\nabla(v-p)\,dx \geq 0 \;\; \forall v \in \mathcal{K}.$$

Hierzu beachte für $v \in \mathcal{K}$:

$$\int_{\partial\Omega} q \cdot n\,(v-p)\,d\sigma = \int_{\gamma_S} q \cdot n\,(v-p)\,d\sigma \leq 0.$$

Definition 1

$$\ell_p(v-p) :=$$
$$\int_\Omega bS(p)_t(v-p) - M\,kr(S(p))\nabla z\nabla(v-p)\,dx$$
$$a_p(p, v-p) := \int_\Omega M\,kr(S(p))p_r\nabla p\nabla(v-p)\,dx$$

Damit lautet (VP):

$$p \in \mathcal{K}: \quad a_p(p, v-p) + \ell_p(v-p) \geq 0 \;\; \forall v \in \mathcal{K}.$$

Definition 2 *Sei $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit Interface $\Gamma := \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ nicht–überlappende Gebietszerlegung. Für Ω_1, Ω_2 definiere wie für Ω*

$$\mathcal{K}_i := \{v_i \in H^1(\Omega_i) : v_i|_{\gamma_{D_i}} = \tilde{p}_i,\; v_i|_{\gamma_{S_i}} \leq 0\},$$
$$\mathcal{K}_i^g := \{v_i \in \mathcal{K}_i : v_i|_\Gamma = g\},$$
$$\mathcal{K}_{i,S_0} := \{v_i \in \mathcal{K}_i : v_i|_{\gamma_{S_i}} = 0\},$$
$$H^1_{\gamma_{D_i}}(\Omega_i) := \{v \in H^1(\Omega_i) : v|_{\gamma_{D_i}} = 0\}$$

sowie $\ell^i_{p_i}(v_i - p_i)$ und $a^i_{p_i}(p_i, v_i - p_i)$ analog zu Definition 1. Weiter sei

$$\Lambda := \{\mu \in H^{1/2}(\Gamma) : \mu = v|_\Gamma \;\; \text{für ein} \;\; v \in \mathcal{K}\}.$$

2. Mehrgebietsformulierung

Ziel:
Finde Variationsprobleme für die Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 zusammen mit Bedingungen auf dem Interface Γ, so daß deren Lösung äquivalent ist zur Lösung von (VP) auf ganz Ω.

Versuch:
Suche $p_1 \in \mathcal{K}_1$ und $p_2 \in \mathcal{K}_2$ mit

(G1) $a^1_{p_1}(p_1, v_1 - p_1) + \ell^1_{p_1}(v_1 - p_1) \geq 0 \quad \forall v_1 \in \mathcal{K}_1^{p_2}$

(G2) $p_1 = p_2$ auf Γ

(G3) $a^2_{p_2}(p_2, v_2 - p_2) + \ell^2_{p_2}(v_2 - p_2) \geq 0 \quad \forall v_2 \in \mathcal{K}_2^{p_1}$

(G4) $\sum_{i=1}^2 a^i_{p_i}(p_i, R_i(\mu) - p_i) + \ell^i_{p_i}(R_i(\mu) - p_i) \geq 0 \quad \forall \mu \in \Lambda,$

wobei $R_i : \Lambda \to \mathcal{K}_i$, $i = 1, 2$, irgendein Fortsetzungsoperator ist.

3. Interface–Bedingungen

(G4)' $\sum_{i=1}^{2} a_{p_i}^i(p_i, R_i(\mu)) + \ell_{p_i}^i(R_i(\mu))$
$= 0 \;\; \forall \mu \in H^{1/2}(\Gamma),$

wobei $R_i : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1_{\gamma_D \cup \gamma_S}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, irgendein Fortsetzungsoperator ist.

Lemma 3 *Es gilt:*

$$(\mathrm{VP}) \Longrightarrow (\mathrm{G1}), (\mathrm{G2}), (\mathrm{G3}), (\mathrm{G4})$$

und mit der Zusatzvoraussetzung $\Gamma \cap \gamma_S = \emptyset$:

$$(\mathrm{G1}), (\mathrm{G2}), (\mathrm{G3}), (\mathrm{G4})' \Longrightarrow (\mathrm{VP}).$$

Lemma 4 *Es sei für* p_i, $i = 1, 2$, *die Richardsgleichung in* Ω_i *und* $q_i \cdot n|_{\gamma_{N_i}} = 0$ *erfüllt. Dann gilt:*

$$(\mathrm{G4})' \Longleftrightarrow q_1 \cdot n_1 = -q_2 \cdot n_2 \;\; \textit{auf}\ \Gamma.$$

Falls zusätzlich p_i, $i = 1, 2$, die Randbedingungen auf γ_{D_i} und γ_{S_i} sowie $p_1|_\Gamma = p_2|_\Gamma$ erfüllen, so gilt:

$$\text{(G4)} \Longleftrightarrow q_1 \cdot n_1 = -q_2 \cdot n_2 \ \textit{ auf } \Gamma.$$

3. Steklov–Poincaré–Operatoren

Löse allgemein (mit Randbedingungen φ):

$$L_i u_i = f \ \text{ auf } \Omega_i, \ \ L_i \text{ linear.}$$

Neben $u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$ Bedingung an die Stetigkeit eines "Flusses" auf Γ:

$$\Psi_1 u_1 = -\Psi_2 u_2.$$

Ziel:
Interface–Gleichung für $\lambda := u_i|_\Gamma \in \Lambda$, $i = 1, 2$, die unabhängig von (G1) und (G3) lösbar ist und danach eine unabhängige/parallele Lösung von (G1) und (G3) ermöglicht.

Allgemeine Denke im linearen Fall:

Entkopplung der Probleme auf Ω_1 und Ω_2 durch Ausnutzen der Linearität von L_i auf Ω_i und der Linearität von Ψ_i, $i = 1, 2$:

$$\text{Hom. Syst.} + \text{Inh. } \lambda \text{ auf } \Gamma \Longrightarrow u_i^0 = L_{i,hom}^{-1}(\lambda)$$

$$\underline{\text{Inh. Syst.} + \text{Hom. auf } \Gamma \Longrightarrow u_i^* = L_{i,inh}^{-1}(f, \varphi)}$$

$$\text{Gesamtlösung zu } f, \varphi, \lambda \text{ auf } \Omega_i\text{: } u_i = u_i^0 + u_i^*$$

Mit den Steklov–Poincaré–Operatoren

$$S_i := \Psi_i L_{i,hom}^{-1}, \;\; i = 1, 2, \;\; S := S_1 + S_2$$

und der rechten Seite

$$\chi := (-\Psi_1 L_{1,inh}^{-1} - \Psi_2 L_{2,inh}^{-1})(f, \varphi)$$

erhält man die Interface–Gleichung

$$S\lambda = \chi.$$

Die Zerlegung $S = S_1 + S_2$ führt über eine Dirichlet–Neumann–Iteration

(D) $u_1^{k+1} = L_1^{-1}(f, \varphi, \lambda^k)$

(N) $u_2^{k+1} = L_2^{-1}(f, \varphi, -\Psi_1 u_1^{k+1})$

mit Dämpfung, $0 < \theta < 1$,

$$\lambda^{k+1} = \theta u_2^{k+1}|_\Gamma + (1 - \theta)\lambda^k$$

auf ein Richardson–Verfahren

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta S_2^{-1}(-S\lambda^k + \chi)$$

für $S\lambda = \chi$ mit S_2 als Vorkonditionierer.