Superpositions–Operatoren

Daß die Hintereinanderschaltung zweier differenzierbarer Funktionen wieder eine differenzierbare Funktion liefert, ist den meisten Studierenden schon vor Beginn ihres Mathematik–Studiums bekannt. Ob jedoch die Komposition zweier schwach differenzierbarer Funktionen $f \in H^1(\mathbb{R})$ und $g \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wieder eine schwach differenzierbare Funktion $f \circ g \in H^1(\Omega)$ ergibt, bleibt wohl vielen Absolventen auch nach Abschluß des Studiums verborgen. Dabei gibt es eine reichhaltige Literatur darüber, inwieweit eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften eines Raums X reellwertiger Funktionen auf Ω durch Komposition $f \circ g$, $g \in X$, beeinflußt. Eingehend studiert wurde auch die umgekehrte Fragestellung, wie die Funktion f beschaffen sein muß, damit die Bildmenge $\{f \circ g : g \in X\}$ gewisse Eigenschaften hat, zum Beispiel in einem gegebenen Raum Y liegt. Diese Fragen führen auf die Theorie der Superpositions–Operatoren $T_f : X \to Y$, $T_f(g) := f \circ g$, die auch unter dem Namen Nemytskij–Operatoren bekannt sind.

Der Vortrag möchte eine Motivation zur Betrachtung dieser Operatoren liefern sowie die Grundlagen der Theorie und wesentliche Resultate für geläufige Räume X und Y skizzieren. Auch Kuriosiäten sollen dabei nicht zu kurz kommen.

Literatur:

[1] J. Appell, P.P. Zabrejko. *Nonlinear superposition operators.* Cambridge Tracts in Mathematics, 95. Cambridge University Press, 1990.

[2] M. Marcus, V.J. Mizel. Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev spaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 251:187–218, 1979.

[3] T. Runst, W. Sickel. *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and nonlinear partial differential equations.* De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 3. De Gruyter, 1996.