Math Semesterber (2018) 65:91–106
https://doi.org/10.1007/s00591-017-0212-5

Ein Kartenkunststück und ein neues Paradoxon der Wahrscheinlichkeitstheorie

Ehrhard Behrends

Eingegangen: 1. September 2017 / Angenommen: 14. November 2017 / Online publiziert: 18. Dezember 2017

Zusammenfassung Ein Zuschauer und der Zauberer spielen ein Spiel mit $2n$ Karten, das offensichtlich fair ist. Überraschender Weise sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten aber für nicht zu große n recht weit von 0,5 entfernt, und sie hängen von n modulo 4 ab. Die Chancen sind für den Zauberer am besten, wenn n modulo 4 gleich 1 ist. Für die – teilweise recht technischen – Berechnungen der Gewinnwahrscheinlichkeiten wird nur elementare Stochastik benötigt.

Schlüsselwörter Unterhaltungsmathematik · Zaubern · Hypergeometrische Verteilung

Unter Zauberern ist der Spezialist für Kartentricks Roberto Giobbi hochangesehen. In seinem Buch „Hidden Agenda“ [3], in dem für jeden Tag des Jahres ein Tipp zum Thema „Zaubern“ angeboten wird, schlägt er für den 15. November das folgende – Lennart Green zugeschriebene – Kunststück vor:

> Der Zauberer präsentiert einen gut gemischten Stapel aus 6 roten und 6 schwarzen Karten. Die Zuschauer werden davon überzeugt, dass beim Ziehen von zwei Karten die gleiche Wahrscheinlichkeit für „die Farben sind verschieden“ und „die Farben sind gleich“ vorliegt. Der Stapel wird noch einmal gemischt und in zwei Teilstapel von je 6 Karten aufgeteilt: einer für den Zauberer, einer für den Zuschauer. Die jeweils obersten Karten werden gleichzeitig aufgedeckt. Sind die Farben gleich, bekommt der Zuschauer einen Punkt, sonst der Zauberer. Das wird noch fünf Mal wiederholt. Wer am Ende die meisten Punkte hat, gewinnt.

E. Behrends (✉)
Mathematisches Institut, Freie Universität Berlin, Arnimallee 6, 14195 Berlin, Deutschland
E-Mail: behrends@math.fu-berlin.de

Abb. 1 Ein Beispiel für $n = 5$: A bekommt 2 und B bekommt 3 Punkte.

Es ist „plausibel", dass die Gewinnwahrscheinlichkeit für beide gleich ist. Das stimmt aber nicht: Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist für den Zauberer viel höher als 50 Prozent. Giobbi schlägt vor, diese Tatsache als eine Wette zu verpacken, bei der der Zauberer die wesentlich besseren Chancen hat.

Eine naheliegende Verallgemeinerung besteht darin, statt mit einem Stapel mit 6 rot-schwarz-Pärchen mit einem mit n solchen Pärchen zu beginnen, wobei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ beliebig ist. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Analyse der dann auftretenden Gewinnwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von n. Überraschender Weise können sie für nicht zu große n sehr weit von 0,5 entfernt sein, und das Verhalten (größer/kleiner 0,5) hängt von der Zahl n modulo 4 ab. Das ist kontraintuitiv, und deswegen wird im Titel der Arbeit von einem Paradoxon gesprochen.

Wir beginnen mit einigen Definitionen. n sei fixiert, und es sind n rote und n schwarze Karten vorgelegt. Sie werden gemischt, und Spieler A und Spieler B erhalten bildunten jeweils einen Stapel aus n Karten. Die obersten Karten werden aufgedeckt. Sind sie beide rot oder beide schwarz, erhält A einen Punkt, andernfalls B. Das passiert mit den zweiten Karten von oben genauso, dann mit den ursprünglich dritten von oben usw. Wer die meisten Punkte erzielt hat, gewinnt, es kann aber auch ein Unentschieden geben[1].

[1] Wer es abstrakter verpackt haben möchte, kann von einer Zufallspermutation $(\pi_1, ... \pi_{2n})$ von $0, ..., 0, 1, ..., 1$ (einer Folge aus n Nullen und n Einsen) ausgehen und zählen, wie oft $\pi_i = \pi_{i+n}$ ist.

Hier sehen wir ein Beispiel für den Fall $n = 5$, die Karten sind von unten zu sehen. Zwei Mal wird es beim Aufdecken die gleiche Farbe geben, dreimal werden sie verschiedenfarbig sein (Abb. 1).

Wir bezeichnen mit $p_n^=$ bzw. $p_n^{\neq}$ die Wahrscheinlichkeit, dass A bzw. B gewinnt, und $p_n^u := 1 - p_n^= - p_n^{\neq}$ steht für die Wahrscheinlichkeit eines Unentschiedens. Unsere Arbeit enthält die folgenden Abschnitte:

- Eine Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A genau $2l$ Punkte erzielt.
- Vermutungen.
- $p_n^{\neq}$ und $p_n^=$ in Abhängigkeit von $n \bmod 4$.
- Approximationen der auftretenden Wahrscheinlichkeiten.
- Die zentralen Wahrscheinlichkeiten gehen gegen Null.
- $p_n^{\neq}, p_n^= \to 0{,}5$ mit $n \to \infty$.
- Monotonie der $p_n^{\neq}, p_n^=$.
- $n = 5$ ist die optimale Wahl für Spieler B.

Die verwendeten Methoden sind elementar.

1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt A genau $2l$ Punkte?

Wie kann man diese Wahrscheinlichkeiten berechnen? Bekanntlich ist die Zahl $h(k, m; r, n) := \binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k} / \binom{n}{m}$ die Wahrscheinlichkeit, bei m-maligem Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit r roten und $n - r$ weißen Kugeln genau k rote Kugeln zu ziehen. (Die *hypergeometrische Verteilung*, siehe z.B. [1]).

Damit kann man die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass Spieler A genau k rote Karten erhält, sie ist gleich $h(k, n; n, 2n)$. Angenommen, Spieler A hat k rote Karten, sie werden an irgendwelchen Positionen in seinem Stapel liegen. Für $0 \leq l \leq k$ können an den entsprechenden Positionen auch l rote Karten im anderen Stapel liegen. Da A k rote und $n-k$ schwarze Karten hat, hat B $n-k$ rote und k schwarze Karten. Dass von B's roten Karten genau l Karten an den Positionen der roten Karten von A liegen, hat folglich eine Wahrscheinlichkeit von $h(l, k; n - k, n)$. Zusammen heißt das: So eine Konstellation ist mit Wahrscheinlichkeit $h(k, n; n, 2n)h(l, k; n - k, n)$ zu erwarten. In diesem Fall ist klar, was passieren wird: A erhält l Mal einen Punkt, weil zwei rote Karten aufgedeckt werden, und es gibt l weitere Punkte beim Aufdecken von zwei schwarzen Karten. Begründung: An den k Positionen der roten Karten von A liegen im anderen Stapel l rote und $k - l$ schwarze; B hat aber k schwarze Karten, deswegen werden noch $k - (k - l) = l$ schwarz-schwarz-Pärchen aufgedeckt werden[2].

[2] Diese Analyse zeigt übrigens, dass A immer eine gerade Anzahl von Punkten haben wird und dass die Anzahl der schwarz-schwarz-Pärchen gleich der Anzahl der rot-rot-Pärchen sein muss. Das ist aber auch von vornherein klar: Hat B r Punkte, also r schwarz-rot-Pärchen, so bleiben für A $n - r$ rote und $n - r$ schwarze Karten übrig.

So folgt:

$$p_n^{=} = \sum_{k=0,\dots,n;\ 2l>n/2} h(k,n;n,2n)h(l,k;n-k,n),$$
$$p_n^{\neq} = \sum_{k=0,\dots,n;\ 2l<n/2} h(k,n;n,2n)h(l,k;n-k,n),$$
$$p_n^{u} = \sum_{k=0,\dots,n;\ 2l=n/2} h(k,n;n,2n)h(l,k;n-k,n).$$

Die bisherige Analyse zeigt, dass die Zahlen

$$q_l^n := \sum_{k=0,\dots,n} h(k,n;n,2n)h(l,k;n-k,n)$$

eine besondere Rolle spielen werden. (Es sind Summen, in der einige Summanden gleich Null sind: Im Fall $l > k$ oder $l > n-k$ verschwindet die zugehörige Wahrscheinlichkeit.) q_l^n ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A am Ende $2l$ Punkte haben wird. Dafür kann man eine geschlossene Formel herleiten:

Satz 1 *Für* $0 \le 2l \le n$ *ist*

$$q_l^n = \frac{(n!)^3\ 2^{n-2l}}{(2n)!\ (l!)^2\ (n-2l)!}.$$

Beweis Drückt man zunächst die auftretenden hypergeometrischen Verteilungen durch Binomialkoeffizienten und diese dann durch Fakultäten aus, so gelangt man nach Kürzen zu

$$h(k,n;n,2n)h(l,k;n-k,n) = \frac{(n!)^3}{(2n)!(l!)^2(n-k-l)!(k-l)!},$$

d.h.

$$q_l^n = \frac{(n!)^3}{(2l)!\ (l!)^2} \sum_{k=l,\dots,n-k} \frac{1}{(k-l)!\ (n-k-l)!}.$$

Danach muss man nur den Summationsindex modifizieren und erkennen, dass es im Wesentlichen um die Summe $(1+1)^{n-2l}$ geht:

$$\begin{aligned}\sum_{k=l,\dots,n-k} \frac{1}{(k-l)!\ (n-k-l)!} &= \sum_{j=0,\dots,n-2l} \frac{1}{j!\ (n-2l-j)!} \\ &= \frac{1}{(n-2l)!} \sum_{j=0,\dots,n-2l} \binom{n-2l}{j}\end{aligned}$$

$$= \frac{2^{n-2l}}{(n-2l)!}. \qquad \square$$

2 Vermutungen

Leider ist es nicht gelungen, auch für $p_n^=$, $p_n^{\neq}$ und p_n^u „einfache“ Ausdrücke herzuleiten. Es konnten jedoch konkrete Rechnungen für bis zu dreistelligen n durchgeführt werden. Hier sieht man einen winzigen Ausschnitt der zugehörigen Tabelle:

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_n^=$	0,3333	0,6000	0,0857	0,2381	0,4133	0,5711	0,1795	0,3023
$p_n^{\neq}$	0,6666	0,4000	0,2286	0,7619	0,5887	0,4289	0,2984	0,6977
p_n^u	0,0000	0,0000	0,6857	0,0000	0,0000	0,0000	0,5221	0,0000

n	10	11	12	13	14	15	16	17
$p_n^=$	0,4333	0,5580	0,2300	0,3349	0,4444	0,5502	0,2624	0,3554
$p_n^{\neq}$	0,5667	0,4420	0,3327	0,6651	0,5556	0,4498	0,3539	0,6446
p_n^u	0,0000	0,0000	0,4374	0,0000	0,0000	0,0000	0,3837	0,0000

Diese Rechnungen legen einige *Vermutungen* nahe:

- Ist $n \bmod 4 \in \{0, 1, 2\}$, so ist das für Spieler B günstig. Nur der Fall $n \bmod 4 = 3$ favorisiert Spieler A.
- Für $n \to \infty$ gilt $p_n^= \to 0{,}5$, $p_n^{\neq} \to 0{,}5$, $p_n^u \to 0$.

Auch weitere Ungleichungen fallen ins Auge. So scheint unter den für B günstigen Fällen $n = 4r$, $4r + 1$, $4r + 2$ der Wert $n = 4r + 1$ der beste zu sein. Aber im nächsten Viererblock ist es schon etwas schlechter: $p^{\neq}_{4r+1} > p^{\neq}_{4(r+1)+1}$.

Es ist auch klar, dass $n = 6$ für Spieler B nicht die optimale Wahl ist[3]: $n = 5$ ist definitiv günstiger. (Das habe ich in einem kleinen Artikel für die Zeitschrift „Magie“ den im Magischen Zirkel von Deutschland organisierten Zauberern in [2] auch mitgeteilt.)

Nachstehend werden die meisten der aus der Tabelle abgelesenen Vermutungen bewiesen werden.

3 $p_n^{\neq}$ ist größer bzw. kleiner als $p_n^=$ in Abhängigkeit von $n \bmod 4$

Die $p_n^=$, $p_n^{\neq}$, p_n^u sind doch Summen gewisser q_l^n, und angesichts der recht komplizierten Struktur dieser Summanden wird ein Vergleich schwierig. Man hat wohl nur eine Chance, wenn der Vergleich einzelner q_l^n zum Ziel führen könnte. Das sieht etwas aussichtsreicher aus, denn bei der Berechnung von Quotienten sol-

[3] Das ist der Giobbi-Vorschlag für den Zauberer, s. o.

cher Zahlen werden sich viele Faktoren aus den Fakultäten und den Zweierpotenzen wegheben.

Um einen erfolgreichen Ansatz zu finden, muss man sich die q_l^n mit $2l \leq n$ für festes n in Abhängigkeit von $n \bmod 4$ genauer ansehen. Exemplarisch sind hier diese Werte für $n = 8, 9, 10, 11$ aufgeführt:

n	q_0^n	q_1^n	q_2^n	q_3^n	q_4^n	q_5^n
8	0,0199	0,2785	0,5221	0,1740	0,0054	
9	0,0105	0,1896	0,4976	0,2764	0,0259	
10	0,0055	0,1247	0,4365	0,3637	0,0682	0,0014
11	0,0029	0,0798	0,3593	0,4191	0,1310	0,0079

Immer wieder treten bei den konkret berechneten Werten gewisse Ungeichungen auf, und man darf hoffen, aus diesen Beobachtungen erfolgreiche Strategien ableiten zu können. Genauer:

1. Im Fall $n \bmod 4 = 0$ vermuten wir doch $p_n^{\neq} > p_n^{=}$. Ist $n = 8$, so heißt das $q_0^8 + q_1^8 > q_3^8 + q_4^8$. Es gilt aber sogar $q_0^8 > q_4^8$ und $q_1^8 > q_3^8$. Wenn man also im Fall $n = 4r$ zeigen könnte, dass $q_{r-j}^n > q_{r+j}^n$ für $j = 1, ..., r$, so wäre $p_n^{\neq} > p_n^{=}$ für durch 4 teilbare n bewiesen.
2. Auch im Fall $n \bmod 4 = 1$ vermuten wir $p_n^{\neq} > p_n^{=}$. Für $n = 9$ würde das $q_0^9 + q_1^9 + q_2^9 > q_3^9 + q_4^9$ bedeuten. Es gilt aber sogar $q_1^9 > q_4^9$ und $q_2^9 > q_3^9$. Wenn also für $n = 4r + 1$ immer $q_{r-j}^n > q_{r+1+j}^n$ für $j = 0, ..., r - 1$ sein würde, so wäre $p_n^{\neq} > p_n^{=}$ für diese n gezeigt.
3. Ist $n \bmod 4 = 2$, also $n = 4r + 2$, so würde $q_{r-j}^{10} > q_{r+1+j}$ für $j = 0, ..., r$ das vermutete Ergebnis $p_n^{\neq} > p_n^{=}$ implizieren. Das gilt für $n = 10$ und alle anderen entsprechenden n unserer Tabelle.
4. Es bleibt der Fall $n = 4r + 3$, der einzige, der für A günstig ist. Hier vermuten wir $p_n^{\neq} < p_n^{=}$. Im Fall $n = 11$ stimmt das, und es gilt sogar $q_{2-j}^{11} < q_{2+j+1}^{11}$ für $j = 0, 1, 2$. Wenn man allgemein $q_{r-j}^{4r+3} < q_{r+j+1}^{4r+3}$ für $j = 0, ..., r$ zeigen könnte, so wäre wirklich $p_n^{\neq} < p_n^{=}$ für solche n gezeigt.

Diese Idee lässt sich erfolgreich umsetzen, zur Vorbereitung zeigen wir

Lemma 2 *Für $a, b, s \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $Q_{a,b,s}$ bzw. $Q^*_{a,b,s}$ die aus je $2s$ Faktoren im Zähler und im Nenner bestehenden Quotienten*

$$Q_{a,b,s} := \frac{(a+2)(a+2)(a+4)(a+4)\cdots(a+2s)(a+2s)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+2s-1)(b+2s)},$$
$$Q^*_{a,b,s} := \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+2s-1)(a+2s)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+2s-1)(b+2s)},$$

(i) $Q_{a,b,s}$ ist größer als Eins für $a \geq b$ und kleiner als Eins sonst.
(ii) $Q^*_{a,b,s} < Q_{a,b,s} < Q^*_{a+1,b,s}$.
(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i < i' \leq n/2$ ist $q_i^n / q_{i'}^n = Q_{2i,n-2i',i'-i}$.

Beweis (i) ist klar, denn man kann $Q_{a,b,s}$ als Produkt der Faktoren $(a+2)/(b+1)$, $(a+2)/(b+2)$, $(a+4)/(b+3)$,... schreiben.

(ii) ist offensichtlich, und (iii) folgt nach einer kurzen Rechnung aus Satz 1:

$$\begin{aligned}\frac{q_i^n}{q_{i'}^n} &= \frac{2^{n-2i}}{[(i)!]^2(n-2i)!} \cdot \frac{[(i')!]^2(n-2i')!}{2^{n-2i'}}\\ &= \frac{2^{2(i'-i)}[(i+1)(i+2)\cdots(i')]^2}{(n-2i'+1)(n-2i'+2)\cdots(n-2i)}.\end{aligned}$$

Wir verteilen die $2(i-i')$ Zweien im Zähler auf die $2(i-i')$ restlichen Zählerfaktoren. Dann können wir die Rechnung so fortsetzen:

$$= \frac{(2i+2)(2i+2)(2i+4)(2i+4)\cdots(2i')(2i')}{(n-2i'+1)(n-2i'+2)\cdots(n-2i)} = Q_{2i,n-2i',i'-i}. \qquad \square$$

Satz 3 *(i) Für* $n \bmod 4 \in \{0, 1, 2\}$ *ist* $p_n^{\neq} > p_n^{=}$.
(ii) Im Fall $n \bmod 4 = 3$ *gilt* $p_n^{\neq} < p_n^{=}$.

Beweis Wir unterscheiden nach $n \bmod 4$:

$\boldsymbol{n = 4r}$. Mit $i = r - j$ und $i' = r + j$ ist $2i = 2(r-j) = n - 2i'$, und deswegen gilt $q_{r-j}^n > q_{r+j}^n$. So folgt

$$p_n^{\neq} = \sum_{l=0}^{r-1} q_l^n = \sum_{j=1}^{r} q_{r-j}^n > \sum_{j=1}^{r} q_{r+j}^n = \sum_{l=r+1}^{2r} = p_n^{=}.$$

$\boldsymbol{n = 4r+1}$. Diesmal arbeiten wir mit $i = r - j$ und $i' = r + j + 1$. Es ist $2i = 2(r-j) > 2(r-j) - 1 = n - 2i'$. Es folgt $q_{r-j}^n > q_{r+j+1}^n$ und damit

$$p_n^{\neq} = \sum_{l=0}^{r} q_l^n > \sum_{l=1}^{r} q_l^n = \sum_{j=0}^{r-1} q_{r-j}^n > \sum_{j=0}^{r-1} q_{r+j+1}^n = \sum_{l=r+1}^{2r} = p_n^{=}.$$

$\boldsymbol{n = 4r+2}$. Mit $i := r - j$ und $i' := r + j + 1$ folgt jetzt $2i = n - 2i'$. Wieder ist $q_{r-j}^n > q_{r+j+1}^n$ und folglich

$$p_n^{\neq} = \sum_{l=0}^{r} q_l^n = \sum_{j=0}^{r} q_{r-j}^n > \sum_{j=0}^{r} q_{r+j+1}^n = \sum_{l=r+1}^{2r+1} = p_n^{=}.$$

$\boldsymbol{n = 4r+3}$. Setze wieder $i := r - j$ und $i' := r + j + 1$. Jetzt ist $2i = 2(r-j) < 2(r-j) + 1 = n - 2i'$, also $q_{r-j}^n < q_{r+j+1}^n$. Wir folgern, dass

$$p_n^{\neq} = \sum_{l=0}^{r} q_l^n = \sum_{j=0}^{r} q_{r-j}^n < \sum_{j=0}^{r} q_{r+j+1}^n = \sum_{l=r+1}^{2r+1} = p_n^{=}. \qquad \square$$

4 Approximationen

Die Formel für q_l^n aus Satz 1 ist für Abschätzungen recht unhandlich. Wir ersetzen die auftretenden Fakultäten durch die Stirlingapproximation. Beachtet man, dass

$$1 < n! \big/ [\sqrt{2\pi n}(n/e)^n] < e^{n/12},$$

so folgt

$$q_l^n \approx d_l^n := \frac{(n/2)^{n+1}}{\sqrt{\pi}\, l \sqrt{n-2l}\,(2l)^{2l}\,(n-2l)^{n-2l}},$$

wobei für den Quotienten die Ungleichung

$$e^{-1/(24n)-1/(6l)-1/(12n-24l)} < \frac{q_l^n}{d_l^n} < e^{1/(4n)}$$

gilt. Die l liegen zwischen 0 und $n/2$, die größten Werte sind also in der Nähe von $n/4$ zu erwarten. Für die „mittleren" l erhalten wir die folgende Approximation:

Satz 4 *Für die l mit $n/8 \le l \le 3n/8$ gilt $e^{-2/n} < q_l^n/d_l^n < e^{1/(4n)}$.*

Diese Approximation ist überraschend gut, nachstehend sind die Werte für den noch recht kleinen Wert $n = 17$ aufgeführt[4]:

l	1	2	3	4	5	6	7
q_l^{17}	0,0038	0,0501	0,2172	0,3734	0,2688	0,0784	0,0080
d_l^{17}	0,0045	0,0541	0,2285	0,3880	0,2778	0,0810	0,0083

5 Die zentralen Wahrscheinlichkeiten gehen gegen Null

Als Anwendung von Satz 4 schätzen wir die q_l^n für die zentralen l ab:

Satz 5 *(i) Der Fall $n \bmod 4 = 0$: Die q_r^{4r} fallen monoton gegen Null.*
(ii) Der Fall $n \bmod 4 = 1$: Die q_r^{4r+1} fallen monoton gegen Null.
(iii) Der Fall $n \bmod 4 = 2$: Die q_r^{4r+2} fallen monoton gegen Null.
(iv) Der Fall $n \bmod 4 = 3$: Die q_{r+1}^{4r+3} fallen monoton gegen Null.

[4] $q_0^{17}, q_8^{17}, d_0^{17}, d_8^{17}$ sind im Rahmen der Rechengenauigkeit Null.

Beweis (i) Es ist

$$d_r^{4r} = \frac{(2r)^{4r+1}}{\sqrt{\pi}\, r \sqrt{2r}\, (2r)^{2r}\, (2r)^{2r}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi r}}\,,$$

und es folgt $q_r^{4r} < e^{1/(16r)} d_r^{4r} \to 0$.

Zum Nachweis der Monotonie werten wir den Qotienten zweier aufeinanderfolgender q_r^{4r} unter Verwendung von Satz 1 aus:

$$\frac{q_r^{4r}}{q_{r+1}^{4(r+1)}} = \frac{(r+1)^3 (r+1/2)\ (r+1/8)(r+2/8)\cdots(r+8/8)}{[(r+1/4)(r+2/4)(r+3/4)(r+4/4)]^3}\,,$$

im Zähler und im Nenner gibt es also jeweils 12 Faktoren. Wenn man alles, was möglich ist, kürzt, bleibt

$$\frac{(r+1)\ (r+1/8)(r+3/8)(r+5/8)(r+7/8)}{(r+1/4)(r+1/4)(r+2/4)(r+3/4)(r+3/4)}\,.$$

Um einzusehen, dass das größer als 1 ist, könnte man die Polynome im Zähler und im Nenner auswerten und feststellen, dass alle Zählerkoeffizienten größer als alle Nennerkoeffizienten sind. MAPLE liefert nämlich

$$\frac{r^5 + 3r^4 + 3{,}3437r^3 + 1{,}6875r^2 + 0{,}6938r + 0{,}0563}{r^5 + 2{,}5r^4 + 2{,}3750^3 + 1{,}0625r^2 + 0{,}2226r + 0{,}01757}\,.$$

Es ist aber auch möglich, den Ausdruck etwas schwerfällig als Produkt von

$$(r+3/8)/(r+1/4),\ (r+5/8)/(r+1/2),\ (r+7/8)/(r+3/4)$$

und $(r+1)(r+1/8)/[(r+1/4)(r+3/4)]$ zu schreiben. Jeder dieser Faktoren ist, wie schnell zu sehen, größer als Eins, also auch das Produkt.

(ii) Satz 4 liefert

$$\begin{aligned} d_r^{4r+1} &= \frac{\big((4r+1)/2\big)^{4r+2}}{r\sqrt{\pi(2r+1)}(2r)^{2r}(2r+1)^{2r+1}} \\ &< \frac{\big((2r+1)\big)^{2r+1}}{r\sqrt{\pi(2r+1)}(2r)^{2r}} \\ &= \frac{(2r+1)\big(1+\frac{1}{2r}\big)^{2r}}{r\sqrt{\pi(2r+1)}}, \end{aligned}$$

und wir folgern unter Beachtung von $(1+1/k)^k \to e$, dass $q_r^{4r+1} < e^{1/(16r+4)} d_r^{4r+1}$ mit $r \to \infty$ gegen Null geht.

Diesmal folgt für den Quotienten

$$\frac{q_r^{4r+1}}{q_{r+1}^{4(r+1)+1}} = \frac{(4r+1{,}5)(4r+2{,}5)(4r+3{,}5)(4r+4{,}5)(4r+4)(4r+6)}{[(4r+2)(4r+3)(4r+5)]^2}.$$

Wir sortieren um und schreiben ihn als Produkt von

$$\frac{(4r+1{,}5)(4r+4)}{(4r+2)(4r+3)},\ \frac{(4r+3{,}5)(4r+4{,}5)}{(4r+3)(4r+5)},\ \frac{4r+2{,}5}{4r+2},\ \frac{4r+6}{4r+5}.$$

Alle Quotienten sind größer als Eins, es ist also $q_r^{4r} > q_{r+1}^{4(r+1)}$ wie behauptet.

(iii) Es ist

$$\begin{aligned} d_r^{4r+2} &= \frac{(2r+1)^{4r+3}}{r\sqrt{\pi(2r+2)}(2r)^{2r}(2r+2)^{2r+2}} \\ &< \frac{(2r+1)^{2r}(2r+2)(2r+2)^{2r+2}}{r\sqrt{\pi(2r+2)}(2r)^{2r}(2r+2)^{2r+2}} \\ &= \frac{(2r+1)\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{2r}}{r\sqrt{\pi(2r+2)}}, \end{aligned}$$

also gilt $q_r^{4r+2} \to 0$. Weiter ist

$$\frac{q_r^{4r+2}}{q_{r+1}^{4(r+1)+2}} = \frac{(4r+2{,}5)(4r+3{,}5)(4r+4{,}5)(4r+5{,}5)(4r+8)}{[(4r+3)(4r+5)]^2(4r+6)}.$$

Das kann mal als Produkt von $(4r+3{,}5)/(4r+3)$, $(4r+5{,}5)/(4r+5)$ und (mit $x = 4r$)

$$\frac{(x+2{,}5)(x+4{,}5)(x+8)}{(x+3)(x+5)(x+6)} = \frac{x^3+15x^2+67{,}25x+90}{x^3+14x^2+63x+90}$$

schreiben, wobei alle Faktoren größer als Eins sind.

(iv) Diesmal zeigt die Abschätzung

$$\begin{aligned} d_{r+1}^{4r+3} &= \frac{(2r+1{,}5)^{4r+4}}{(r+1)\sqrt{\pi(2r+1)}(2r+1)^{2r+1}(2r+2)^{2r+2}} \\ &< \frac{(2r+1{,}5)^{2r+1}(2r+1{,}5)}{(r+1)\sqrt{\pi(2r+1)}(2r+1)^{2r+1}} \\ &= \frac{(2r+1{,}5)\left(1+\frac{1}{2(2r+1)}\right)^{2r+1}}{(r+1)\sqrt{\pi(2r+1)}}, \end{aligned}$$

dass $q_{r+1}^{4r+3} \to 0$. Weiter ist

$$\frac{q_{r+1}^{4r+3}}{q_{r+2}^{4(r+1)+3}} = \frac{(4r+3{,}5)(4r+4{,}5)(4r+5{,}5)(4r+6{,}5)(4r+8)(4r+8)}{(4r+4)(4r+5)^2(4r+6)(4r+7)^2},$$

ein Quotient, den man als Produkt von $(4r+4{,}5)/(4r+4)$, $(4r+5{,}5)/(4r+5)$, $(4r+6{,}5)/(4r+6)$ und (wieder mit $x = 4r$)

$$\frac{(x+3{,}5)(x+8)(x+8)}{(x+5)(x+7)(x+7)} = \frac{x^3+19{,}5x^2+120x+224}{x^3+19x^2+119x+245}$$

schreiben kann. Die ersten Faktoren sind stets größer als Eins, der letzte für $r \geq 2$. Da man $q_{r+1}^{4r+3} > q_{r+2}^{4(r+1)+3}$ für $r = 1$ direkt nachrechnen kann, gilt die behauptete Ungleichung allgemein. □

6 Für große n ist $p_n^{\neq} \approx p_n^{=} \approx 0{,}5$

Erwartungsgemäß wird das Spiel mit wachsendem n immer ausgeglichener, wir behaupten:

Satz 6 $p_n^{\neq}$, $p_n^{=} \to 0{,}5$ *für* $n \to \infty$.

Beweis Das muss für die vier Fälle $n \bmod 4 \in \{0, 1, 2, 3\}$ getrennt bewiesen werden.

Fall 1: $n \bmod 4 = 0$. Wir behaupten, dass $p_{4r}^{\neq}, p_{4r}^{=} \to 0{,}5$ für $r \to \infty$. Es reicht zu zeigen, dass $p_{4r}^{\neq} - p_{4r}^{=} \to 0$, denn $p_{4r}^{\neq} + p_{4r}^{=} + p_{4r}^{u} = 1$, und (wegen Satz 5 (i)) $p_{4r}^{u} = q_r^{4r} \to 0$.

Es ist $p_{4r}^{\neq} - p_{4r}^{=} = \sum_{j=1}^{r}(q_{r-j}^{4r} - q_{r+j}^{4r})$. Das ist eine Summe, bei der aufgrund der Rechnungen aus dem Beweis von Satz 3 alle Summanden positiv sind. Zunächst drücken wir q_{r-j}^{4r} und q_{r+j}^{4r} als Vielfache von q_r^{4r} aus. Wegen Lemma 2 ist

$$\frac{q_{r-j}^{4r}}{q_r^{4r}} = Q_{2r-2j,2r,j} < Q^*_{2r-2j+1,2r,j} =: L^0_{r,j}$$

sowie

$$\frac{q_{r+j}^{4r}}{q_r^{4r}} = \frac{1}{Q_{2r,2r-2j,j}} > \frac{1}{Q^*_{2r+1,2r-2j,j}} =: R^0_{r,j}\,.$$

Es ist $L^0_{r,j+1} < R^0_{r,j}$, denn

$$\frac{L^0_{r,j+1}}{R^0_{r,j}} = Q^*_{2r-2j-1,2r,j+1}\,Q^*_{2r+1,2r-2j,j} = \frac{(2r-2j)(2r+1)}{(2r+2j+1)(2r+2j+2)} < 1\,.$$

Deswegen kann die uns interessierende Summe durch eine Teleskopsumme abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r}(q_{r-j}^{4r}-q_{r+j}^{4r}) &< q_r^{4r}\sum_{j=1}^{r}(L_{r,j}^0-R_{r,j}^0)\\ &= q_r^{4r}\big((L_{r,1}^0-R_{r,1}^0)+(L_{r,2}^0-R_{r,2}^0)+\cdots+(L_{r,r}^0-R_{r,r}^0)\big)\\ &< q_r^{4r}\big((L_{r,1}^0-R_{r,1}^0)+(R_{r,1}^0-R_{r,2}^0)+\cdots+(R_{r,r-1}^0-R_{r,r}^0)\big)\\ &= q_r^{4r}(L_{r,1}^0-R_{r,r}^0)\\ &\le q_r^{4r},\end{aligned}$$

denn $L_{r,1}^0 \le 1$. Aus Satz 5 (i) folgt nun $p_{4r}^{\neq}-p_{4r}^{=}\to 0$.

Fall 2: $n \bmod 4 = 1$. Der Beweis ist sehr ähnlich, diesmal vergleichen wir gegen q_r^{4r+1}. Wir wissen schon (Satz 5 (ii)), dass $q_r^{4r+1}\to 0$ mit $r\to\infty$. Da wir q_{r-j}^{4r+1} mit q_{r+j+1}^{4r+1} in Beziehung setzen wollen (für $j=0,\dots,r-1$), hat q_0^{4r+1} keinen „Partner", und deswegen ist es wichtig zu wissen, dass $q_0^{4r+1}\to 0$: Das folgt sofort aus der Gleichung

$$q_0^{4r+1}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 4r}{(4r+3)(4r+5)\cdots(8r-1)},$$

die sich aus Satz 1 ergibt.

Wir werden nun beweisen, dass

$$\sum_{j=0}^{r-1}\frac{q_{r-j}^{4r+1}-q_{r+1+j}^{4r+1}}{q_r^{4r+1}}\le 1\,.$$

Das würde

$$p_{4r+1}^{\neq}-p_{4r+1}^{=}=q_0^{4r+1}+\sum_{j=0}^{r-1}(q_{r-j}^{4r+1}-q_{r+1+j}^{4r+1})\to 0$$

implizieren, und wegen $p_{4r+1}^{\neq}+p_{4r+1}^{=}=1$ würde $p_{4r+1}^{\neq}, p_{4r+1}^{=}\to 0{,}5$ folgen.

Wie im vorigen Beweisteil beginnen wir mit einer Abschätzung der hier relevanten Quotienten:

$$\begin{aligned}\frac{q_{r-j}^{4r+1}}{q_r^{4r+1}} &= Q_{2r-2j,2r+1,j} < Q^*_{2r-2j+1,2r+1,j} =: L_{r,j}^1\,,\\ \frac{q_{r+1+j}^{4r+1}}{q_r^{4r+1}} &= \frac{1}{Q_{2r,2r-2j-1,j+1}} > \frac{1}{Q^*_{2r+1,2r-2j-1,j+1}} =: R_{r,j}^1\,.\end{aligned}$$

Nun ist hier (ein Glücksfall!) $R^1_{r,j+1} = L^1_{r,j}$. Deswegen ist die uns interessierende Summe eine Teleskopsumme:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r-1} \frac{q_{r-j}^{4r+1} - q_{r+1+j}^{4r+1}}{q_r^{4r+1}} &\leq \sum_{j=0}^{r-1} (L^1_{r,j} - R^1_{r,j}) \\ &= L^1_{r,0} - R^1_{r,r-1} \\ &\leq L^1_{r,0} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Fall 3: $n \bmod 4 = 2$. Das zentrale Element ist diesmal q_r^{4r+2}. Aus

$$\begin{aligned}\frac{q_{r-j}^{4r+2}}{q_r^{4r+2}} &= Q_{2r-2j,2r+2,j} < Q^*_{2r-2j+1,2r+2,j} =: L^2_{r,j}\,, \\ \frac{q_{r+1+j}^{4r+2}}{q_r^{4r+2}} &= \frac{1}{Q_{2r,2r-2j,j+1}} > \frac{1}{Q^*_{2r+1,2r-2j,j+1}} =: R^2_{r,j}\end{aligned}$$

und $L^2_{r,j+1} < R_{r,j}$ (wegen $L^2_{r,j+1}/R_{r,j} = (2r-2j)/(2r+2j+4) < 1$) erhalten wir

$$\begin{aligned}p^{\neq}_{4r+2} - p^{=}_{4r+2} &\leq q_r^{4r+2} \sum_{j=0}^{r} (L^2_{r,j} - R^2_{r,j}) \\ &\leq q_r^{4r+2}(L^2_{r,0} - R^2_{r,r}) \\ &\leq q_r^{4r+2} L^2_{r,0} \\ &= q_r^{4r+2}.\end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten gehen gegen Null (Satz 5 (iii)), und wegen $p^{\neq}_{4r+2} + p^{=}_{4r+2} = 1$ muss $p^{\neq}_{4r+2}, p^{=}_{4r+2} \to 0{,}5$ gelten.

Fall 4: $n \bmod 4 = 3$. Wir vergleichen mit q_{r+1}^{4r+3}, diesmal ist die Situation für Spieler B günstiger. Wegen

$$\begin{aligned}\frac{q_{r-j}^{4r+3}}{q_{r+1}^{4r+3}} &= Q_{2r-2j,2r+1,j+1} > Q^*_{2r-2j,2r+1,j+1} =: L^3_{r,j}\,, \\ \frac{q_{r+1+j}^{4r+3}}{q_{r+1}^{4r+3}} &= \frac{1}{Q_{2r+2,2r-2j+1,j}} < \frac{1}{Q^*_{2r+2,2r-2j+1,j}} =: R^3_{r,j}\end{aligned}$$

und $L^3_{r,j} > R^3_{r,j+1}$ (da $L^3_{r,j}/R^3_{r,j+1} = (2r+2j+4)/(2r-2j) > 1$) ergibt sich

$$\begin{aligned}p^{=}_{4r+3} - p^{\neq}_{4r+3} &\leq q_{r+1}^{4r+3} \sum_{j=0}^{r} (R^3_{r,j} - L^3_{r,j}) \\ &\leq q_{r+1}^{4r+3}(R^3_{r,0} - L^3_{r,r}) \\ &\leq q_{r+1}^{4r+3} L^3_{r,0}\end{aligned}$$

$$= q_{r+1}^{4r+3}.$$

Diese Wahrscheinlichkeiten gehen gegen Null (Satz 5 (iv)), und $p_{4r+3}^{\neq} + p_{4r+3}^{=} = 1$ impliziert $p_{4r+3}^{\neq}, p_{4r+3}^{=} \to 0{,}5$. □

7 Ungleichungen für die p_n^u, $p_n^{\neq}$ und die $p_n^{=}$

Es ist $p_{4r}^u = q_r^{4r}$, d. h. wegen Satz 5 (i) fallen die Wahrscheinlichkeiten für ein Unentschieden monoton gegen Null.

Die Daten suggerieren auch, dass stets $p_{4r+1}^{\neq} > p_{4r+2}^{\neq}$ gilt, dass die $p_n^{\neq}$, eingeschränkt auf die $n \bmod 4 = 1$ (oder eingeschränkt auf die $n \bmod 4 = 2$) monoton fallen und dass sie – eingeschränkt auf die $n \bmod 4 = 3$ – monoton steigen: $p_{4r+1}^{\neq} > p_{4(r+1)+1}^{\neq}$ (bzw. $p_{4r+2}^{\neq} > p_{4(r+1)+2}^{\neq}$ bzw. $p_{4r+3}^{\neq} < p_{4(r+1)+3}^{\neq}$) für alle r.

$p_{4r+1}^{\neq} > p_{4r+2}^{\neq}$ ist leicht zu verifizieren: Es ist

$$\frac{q_l^{4r+1}}{q_l^{4r+2}} = \frac{(8r+3)(4r+2-2l)}{(4r+2)^2} \geq \frac{(8r+3)(2r+2)}{(4r+2)^2} > 1$$

für $l = 0, \ldots, r$, und es folgt

$$p_{4r+1}^{\neq} = \sum_{l=0}^{r} q_l^{4r+1} > \sum_{l=0}^{r} q_l^{4r+2} = p_{4r+2}^{\neq}.$$

Leider führten Versuche, die anderen Ungleichungen auf geeignete Ungleichungen für die q_l^n zurückzuführen, nicht zum Ziel.

In einem ersten Ansatz kann man q_l^{4r+1} mit $q_l^{4(r+1)+1}$ vergleichen. Wirklich lässt aufgrund der Tatsache, dass sich bei Quotienten vieles weghebt, zeigen, dass $q_l^{4r+1}/q_l^{4(r+1)+1} > 1$ und folglich $q_l^{4r+1} > q_l^{4(r+1)+1}$ für $l = 0, \ldots, r$ gilt. Das impliziert

$$p_n^{\neq} = \sum_{l=1}^{r} q_l^{4r+1} > \sum_{l=1}^{r} q_l^{4(r+1)+1}.$$

Aber die rechte Summe ist nicht gleich $p_{4(r+1)+1}^{\neq}$, es fehlt noch der Summand $q_{r+1}^{4(r+1)+1}$.

Ein zweiter Versuch begann mt dem Vergleich von q_l^{4r+1} mit $q_{l+1}^{4(r+1)+1}$. Wäre für $l = 0, \ldots, r$ stets $q_l^{4r+1} > q_{l+1}^{4(r+1)+1}$, so hätte man „beinahe“ $p_{4r+1}^{\neq} > p_{4(r+1)+1}^{\neq}$ gezeigt: Man müsste nur noch nachweisen, dass der fehlende Summand $q_0^{4(r+1)+1}$ vernachlässigbar klein ist. Aber leider ist es nicht richtig, dass $q_l^{4r+1} > q_{l+1}^{4(r+1)+1}$ für die uns interessierenden l immer erfüllt ist. Man kann zwar mit der üblichen Quotiententechnik zeigen, dass immer $q_r^{4r+1} > q_{r+1}^{4(r+1)+1}$ gilt, aber für jedes r existieren l mit $q_l^{4r+1} < q_{l+1}^{4(r+1)+1}$. Zur Illustration gibt es hier eine Tabelle für den Fall $r = 4$, da ist $p_{4r+1}^{\neq} = 0{,}6446 > 0{,}6302 = p_{4(r+1)+1}^{\neq}$:

l	0	1	2	3	4	5
q_l^{17}	0,0001	0,0038	0,0501	0,2172	0,3734	
q_l^{21}	0,0000	0,0004	0,0087	0,0661	0,2168	0,3382

$p_{17}^{\neq}$ ist um etwa 0,014 größer als $p_{21}^{\neq}$. Der Unterschied zwischen q_4^{17} und q_5^{21} liegt mit etwa 0,035 deutlich darüber, es ist auch $q_3^{17} > q_4^{21}$ aber $q_l^{17} < q_{l+1}^{21}$ für $l = 0, 1, 2$.

Wegen dieses „Umspringens der Ungleichungen" kann eine Ungleichung zwischen $p_{4r+1}^{\neq}$ und $p_{4(r+1)+1}^{\neq}$ wahrscheinlich nicht aus Ungleichungen zwischen geschickt gewählten q_l^n gefolgert werden. Das Arbeiten mit den oben angegebenen Approximationen der q_l^n scheint auch wenig erfolgversprechend, da $p_{4r+1}^{\neq}$ schon für mäßig große r nur um eine Winzigkeit größer ist als $p_{4(r+1)+1}^{\neq}$. (Zum Beispiel ist $p_{81}^{\neq} = 0{,}5664$ und $p_{85}^{\neq} = 0{,}5649$.)

Entsprechend scheiterten Versuche zum Nachweis von $p_{4r+2}^{\neq} > p_{4(r+1)+2}^{\neq}$ bzw. $p_{4r+3}^{\neq} < p_{4(r+1)+3}^{\neq}$.

8 $n = 5$ ist die optimale Wahl für Spieler B

Da ein Beweis für $p_{4r+1}^{\neq} > p_{4(r+1)+1}^{\neq}$ noch aussteht, ist zunächst nicht klar, dass $n = 5$ die optimale Wahl für Spieler B ist. Man kann es aber auf andere Weise einsehen. Angenommen, wir haben für positive η, ε ein r_0 mit $q_0^{4r_0+1} < \eta$ und $q_{r_0}^{4r_0+1} < \varepsilon$ gefunden. Da die $q_0^{4r_0+1}, q_{r_0}^{4r_0+1}$ monoton fallen, gelten diese Ungleichungen auch für die $r \geq r_0$. Damit ist aufgrund der Ungleichungen aus dem Beweis von Satz 6

$$\begin{aligned}
2p_{4r+1}^{\neq} &= p_{4r+1}^{\neq} + (1 - p_{4r+1}^{=}) \\
&= 1 + (p_{4r+1}^{\neq} - p_{4r+1}^{=}) \\
&= 1 + q_0^{4r+1} + \sum_{j=0}^{r-1} \left(q_{r-j}^{4r+1} - q_{r+j+1}^{4r+1}\right) \\
&\leq 1 + q_0^{4r+1} + q_r^{4r+1} \\
&\leq 1 + \eta + \varepsilon,
\end{aligned}$$

d.h. $p_{4r+1}^{\neq} \leq (1 + \eta + \varepsilon)/2$. Für $r_0 = 3$ etwa ist $q_3^{13} = 0{,}4224$ und $q_0^{13} = 0{,}0307$, es gilt also $p_{4r+1}^{\neq} \leq (1 + 0{,}4224 + 0{,}0307)/2 < 0{,}708$ für $r \geq 3$. Wenn also unter den $p_5^{\neq}, p_9^{\neq}, p_{13}^{\neq}$ ein Wert auftritt, der größer als 0,708 ist, muss das der Maximalwert sein. Das beweist, dass $p_5^{\neq} = 0{,}7619$ nicht zu übertreffen ist.

Ganz analog zeigt man, dass $p_6^{\neq}$ unter den $p_{4r+2}^{\neq}$ und $p_3^{=}$ unter den $p_{4r+3}^{=}$ maximal sind.

Literatur

1. Behrends, E.: Elementare Stochastik. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden (2012)
2. Behrends, E.: Giobbi upgraded. Magie **10**, 479–480 (2017)
3. Giobbi, R.: Hidden Agenda. Vanishing Inc. Magic, New York (2016)