Sudoku

Auf unserer Rätselseite finden Sie jede Woche drei japanische Zahlenrätsel mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad. Sudoku bedeutet so viel wie „die Zahl, die allein steht“ und ist mittlerweile ein geflügeltes Wort.

Lösung des Rätsels der vergangenen Woche:

LEICHT

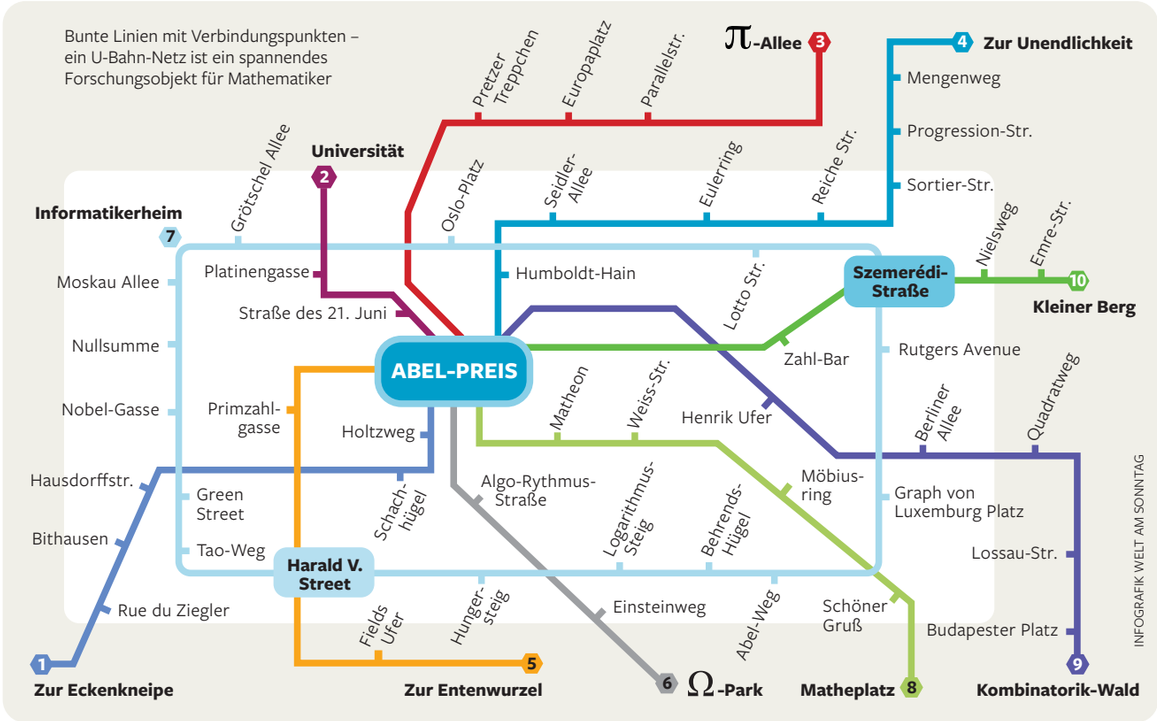
1	6	7	8	9	4	5	3	2
4	8	2	3	5	7	6	1	9
3	5	9	1	6	2	4	7	8
9	2	6	5	8	3	1	4	7
8	1	4	2	7	6	3	9	5
7	3	5	4	1	9	8	2	6
6	4	8	9	2	1	7	5	3
5	9	3	7	4	8	2	6	1
2	7	1	6	3	5	9	8	4

MITTEL

8	3	7	1	2	9	6	4	5
2	5	1	3	6	4	8	7	9
4	9	6	8	7	5	1	2	3
3	8	9	6	5	2	4	1	7
1	6	5	4	8	7	3	9	2
7	4	2	9	3	1	5	8	6
5	1	8	7	9	3	2	6	4
9	2	4	5	1	6	7	3	8
6	7	3	2	4	8	9	5	1

SCHWER

4	7	5	1	3	9	2	6	8
3	9	2	8	6	4	7	1	5
8	1	6	7	5	2	4	3	9
9	5	8	3	4	7	6	2	1
1	3	4	5	2	6	9	8	7
2	6	7	9	1	8	5	4	3
5	2	1	6	9	3	8	7	4
7	4	3	2	8	5	1	9	6
6	8	9	4	7	1	3	5	2



Mathematik für die U-Bahn

Der Ungar Emre Szemerédi erhält in Oslo den „Nobelpreis für Mathematik“. Er hat Tore zur Welt des Unendlichen geöffnet

■ Ein U-Bahn-Netz ist für Mathematiker ein „Graph mit Ecken und Kanten“. Für sie darf er ruhig unendlich groß sein

EHRHARD BEHRENDS

Norwegens König Harald V. überreicht am kommenden Dienstag in Oslo den mit 800.000 Euro dotierten Abelpreis, der für Mathematiker in seiner Bedeutung einem Nobelpreis gleichkommt. Ausgezeichnet wird der ungarische Mathematiker Emre Szemerédi, der auch noch im Alter von 71 Jahren aktiv forscht – an der Rutgers University in New Jersey (USA).

Der Namenspate des Preises, Niels Henrik Abel, ist eine der tragischsten Figuren in der Geschichte der Mathematik. Obwohl er einer der genialsten Mathematiker aller Zeiten war, fand der 1802 Geborene in seinem Heimatland keine Möglichkeit, seinen Lebensunterhalt zu verdienen. Er reiste auf Jobsuche durch ganz Europa, bis man endlich in Berlin seine Exzellenz erkannte. Einige Monate nach seiner Abreise wurde ihm dort eine Professur angeboten. Doch die Nachricht erreichte ihn zu spät. Wenige Tage vorher war der durch Mangelernährung geschwächte Abel im Alter von nur 26 Jahren an Tuberkulose gestorben.

Abel-Preisträger Szemerédi fiel seinen Professoren an der Budapester Universität bereits in den ersten Semestern auf. Seine Doktorarbeit schrieb er in Moskau. Sein Spezialgebiet ist die Kombinatorik, eine mathematische Disziplin, die auch für Laien von Interesse ist. So lässt sich etwa mit kombinatorischen Methoden berechnen, dass es genau 13.983.816 Möglichkeiten gibt, sechs Kreuze auf einen Lottoschein mit 49 Kästchen zu machen. Doch für richtige Mathematiker wird es erst spannend, wenn sie nicht nur mit sechs Elementen aus 49 umgehen dürfen, sondern mit möglichst großen, ja, am besten unendlich großen Mengen.

In riesengroßen Mengen kann man auf faszinierende Phänomene stoßen. Ein gefeiertes Ergebnis von Szemerédi bezieht sich auf große Teilmengen von natürlichen Zahlen, in denen sogenannte arithmetische Progressionen auftreten. Darunter verstehen Mathematiker einen Satz von Zahlen, bei denen der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen immer gleich ist. Ein Beispiel ist die Menge (12, 20, 28, 36, 42). Der Abstand der Zahlen beträgt jeweils 8, und die Progression hat eine Länge von 5, weil die Menge aus 5 Zahlen besteht.

Szemerédi bewies, dass beliebig lange Progressionen in großen Zahlenmengen zwangsläufig auftreten. Wünscht man sich etwa eine Progression der Länge 23 und gibt einen Prozentsatz vor – etwa ein Prozent –, so gilt nach Szemerédi: Es gibt eine Zahl n, sodass in einer beliebigen Auswahl von einem Prozent aller Zahlen zwischen 1 und n garantiert eine Progression der Länge 23 enthalten ist.

Diese Erkenntnis hat wichtige Konsequenzen für die Kombinatorik großer Mengen. Der Satz von Ben Green und Terence Tao ist gewiss am spektakulärsten. Er besagt, dass es in der Menge der Primzahlen – innerhalb der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, ...– Progressionen beliebiger Länge gibt. Unter anderem dafür erhielt Tao 2006 die Fields-Medaille, die höchste Auszeichnung für junge Mathematiker.

Eng verwandt sind Themen aus der Graphentheorie. Unter einem Graphen verstehen Mathematiker ganz allgemein ein beliebiges Gebilde mit Ecken und Kanten. Konkrete Beispiele sind U-Bahn-Netze, Straßenkarten oder Leiterbahnen auf einer Elektronikplatine. Mathematiker können etwa aus der Anzahl von Ecken und Kanten wichtige Eigenschaften des betreffenden Graphen ermitteln. Und das hat praktische Anwendungen.

Es gibt zum Beispiel die folgende Gesetzmäßigkeit: Wenn ein Graph eine gerade Anzahl von Ecken (2n) besitzt und der Graph mehr als n mal n Kanten hat, dann gibt es garantiert drei Punkte, sodass jeder mit den beiden anderen verbunden ist. Man nennt das auch ein Dreieck. Sie können das selber überprüfen: Nehmen Sie ein Blatt Papier und einen Stift und probieren Sie es beispielsweise mit 2*4 = 8 Ecken und 4*4 + 1 = 17 Kanten aus. Wenn es, wie in diesem Beispiel um n = 4 geht, ist die Sache noch recht anschaulich. Doch Mathematiker wie Szemerédi interessieren sich für tiefer liegende Geheimnisse von Graphen, die sich erst offenbaren, wenn es um sehr viele Ecken und Kanten geht.

Andere Forschungsarbeiten von Emre Szemerédi haben große Bedeutung für die Informatik. Dort ist es eine Grundaufgabe, „viele“ vorgegebene Zahlen nach ihrer Größe zu sortieren. In der Praxis geht es dabei um die ökonomisch wichtige Frage, wie schnell dieses Sortieren mithilfe geeigneter Algorithmen und Computer möglich ist.

Die einfachste Sortiermethode wäre, sich aus den n Zahlen zuerst die kleinste zu schnappen. Dazu müsste man n-1 Vergleichsoperationen ausführen. Unter den restlichen n-1 Zahlen wird wieder die kleinste ermittelt: mit n-2 Vergleichsoperationen. Und so weiter. Am Ende hat man n*(n-1)/2-mal Zahlen miteinander vergleichen müssen. Mathematiker sprechen von einem Rechenaufwand, der quadratisch mit n wächst.

In der Praxis ist diese Methode völlig unbrauchbar, weil sie zu langsam ist. Tatsächlich kennen die Informatiker längst bessere Methoden, bei denen der Aufwand im Wesentlichen nur linear wächst (proportional zum Produkt aus n und dem Logarithmus von n). Es war jedoch lange Zeit eine offene Frage, wie man am besten beim Sortieren vorgeht, wenn sehr viele Parallelrechner zur Verfügung stehen. Szemerédi hat gemeinsam mit Kollegen bewiesen, wie sich in diesem Fall die optimale Anzahl der Vergleichsschritte mit wachsender Rechnerzahl reduziert. (Wer es genauer wissen will: Wenn viele Rechner parallel arbeiten, wächst der Zeitaufwand proportional zum Zweier-Logarithmus von n.)

Szemerédi, der Mitglied der ungarischen Akademie der Wissenschaften ist, hat Mathematiker mit Werkzeugen versorgt, mit denen sie Gesetzmäßigkeiten im Bereich von sehr großen oder gar unendlich großen Mengen aufspüren können. Gerade die Wege in die Welt des Unendlichen sind für Mathematiker faszinierend – auch wenn unendlich große U-Bahn-Netze in unserem Alltag niemals eine Rolle spielen werden.