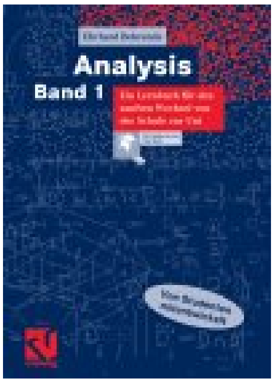
Sätzeverzeichnis „Analysis Band 1“ von Prof. Dr. Ehrhard Behrends

Ingo Bürk

21. August 2007



Inhaltsverzeichnis

1 Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

1.1 Vorbemerkungen

1.2 Mengen

1.2.1 (Der erste Schritt zum Axiomensystem für $\mathbb{R}$). $\mathbb{R}$ *ist eine Menge.*

Definition 1.2.2. *Angenommen, M und N sind Mengen. Wenn dann eine Zuordnungsvorschrift erklärt ist, die jedem Element aus M genau ein Element aus N zuordnet, so nennt man das eine Abbildung von M nach N.*
Ist f der Name für diese Abbildung, so schreibt man kurz: $f : M \to N$ und bezeichnet, für $x \in M$, mit $f(x)$ dasjenige Element aus N, das x zugeordnet wird.

Definition 1.2.3. *M und N seien Mengen. Unter einer Relation zwischen Elementen aus M und N verstehen wir eine Teilmenge R von $M \times N$. Ist $R \subset M \times N$ eine Relation, so schreibt man statt $(x, y) \in R$ auch xRy.*

Definition 1.2.4. *M und N seien Mengen und $R \subset M \times N$ eine Relation. R heißt Abbildungsrelation, wenn für jedes $x \in M$ genau ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ existiert.*

1.3 Algebraische Strukturen

Definition 1.3.1. *Sei M eine Menge. Unter einer inneren Komposition auf M verstehen wir eine Abbildung von $M \times M$ nach M, d.h. eine Zuordnungsvorschrift, die je zwei Elementen aus M ein weiteres Element aus M zuordnet. Ist z.B. „$\circ$“ die Bezeichnung dieser inneren Komposition, so schreiben wir für $\circ((c, x))$ - wie es ja eigentlich heißen müsste - kürzer $x \circ y$.*

Definition 1.3.2. *„$\circ$“ sei eine innere Komposition auf der Menge M.*

(i) „$\circ$“ heißt assoziativ, wenn für $x, y, z \in M$ stets gilt:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

(ii) „$\circ$“ heißt kommutativ, wenn

$$c \circ y = y \circ x$$

für alle $c, x \in M$ ist.

(iii) Ein Element $e \in M$ heißt neutral bezüglich „$\circ$“, wenn $e \circ x = x \circ e = x$ für jedes $x \in M$ gilt (e heißt dann auch eine Einheit bezüglich „$\circ$“).

(iv) Sei e eine Einheit für „$\circ$“ und $x \in M$. Ein Element $y \in M$ heißt invers zu x, wenn $x \circ y = y \circ x = e$.

Satz 1.3.3. *Es sei „$\circ$“ eine assoziative innere Komposition auf einer Menge M.*

(i) *Sind e_1 und e_2 neutrale Elemente, so gilt $e_1 = e_2$.*

(ii) *Wir nehmen an, dass es ein neutrales Element e zu der Verknüpfung „$\circ$“ gibt. Ist dann x ein beliebiges Element von M und sind y_1 und y_2 zu x invers, so ist $y_1 = y_2$.*

Definition 1.3.4. *Sei K eine Menge, auf der zwei innere Kompositionen „$+$“ und „$\cdot$“ vorgegeben sind.*
K (genauer: das Tripel $(K, +, \cdot)$) heißt Körper, wenn gilt:

A1: *„$+$“ ist assoziativ und kommutativ.*

A2: *Es existiert in K ein bzgl. „$+$“ neutrales Element, das wir „0“ nennen wollen.*

A3: *Für jedes $x \in K$ gibt es bezüglich „$+$“ ein inverses Element, das mit $-x$ bezeichnet wird.*

M1: *„$\cdot$“ ist assoziativ und kommutativ.*

M2: *Es existiert in K ein zu „$\cdot$“ neutrales Element, genannt „1“.*

M3: *Für jedes $x \neq 0$ in K gibt es bezüglich „$\cdot$“ ein inverses Element, genannt x^{-1}.*

D: *Es gilt das Distributivgesetz, d.h. für $x, y, z \in K$ ist*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + z \cdot z.$$

Schließlich verlangen wir, dass die Elemente 1 und 0 verschieden sind.

1.3.5 (Der zweite Schritt zum Axiomensystem für $\mathbb{R}$)**.** *$\mathbb{R}$ ist ein Körper.*
$\mathbb{R}$ ist also eine Menge, auf der zwei innere Kompositionen „$+$“ und „$\cdot$“ vorgegeben sind, derart, dass für $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ alle Körperaxiome erfüllt sind.

Satz 1.3.6. *$(K, +, \cdot)$ sei ein Körper.*

(i) *Sind $x, y \in K$ mit $x + y = x$, so ist $y = 0$ und ist $x \cdot y = x$, so folgt im Falle $x \neq 0$, dass $y = 1$ ist.*

(ii) *Für jedes $x \in K$ ist $0 \cdot x = 0$.*

(iii) *$-x$ (für alle x) und x^{-1} (für alle $x \neq 0$) sind eindeutig bestimmt, ebenfalls 0 und 1.*

(iv) *$(-1)x = -x$ für alle x.*

(v) *Für $x \neq 0$ ist auch $x^{-1} \neq 0$.*

(vi) *$-(-x) = x$ (für alle x), $(x^{-1})^{-1} = x$ (für alle $x \neq 0$).*

(vii) *Für* $x \neq 0, y \neq 0$ *ist* $x \cdot y \neq 0$ *(Nullteilerfreiheit).*

(viii) *Für* $x, y \in K$ *definieren wir* $x - y := x + (-y)$*. Dann gilt* $x - y = -(y - x)$*. Auch vereinbaren wir, dass* x/y *die Abkürzung für* $x \cdot y^{-1}$ *sein soll, wenn* $y \neq 0$ *gilt. Es ist dann* $(x/y)^{-1} = y/x$*, falls* x *und* y *von* 0 *verschieden sind.*

(ix) $-(x + y) = (-x) + (-y)$ *(für alle* x, y*);* $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ *(für alle* $x, y \neq 0$*).*

(x) $(-x)(-y) = xy$*,* $(-x)y = x(-y) = -(xy)$ *(für alle* x, y*).*

1.4 Angeordneter Körper

Definition 1.4.1. $(K, +, \cdot)$ *sei ein Körper und* $P \subset K$*.* P *heißt Positivbereich, wenn*

(i) *für jedes* $x \neq 0$ *in* K *ist* $x \in P$ *oder* $-x \in P$*; nie gleichzeitig* $x \in P$ *und* $-x \in P$*;*

(ii) *für* $x, y \in P$ *ist* $x + y \in P$ *sowie* $x \cdot y \in P$*.*

Ein Körper zusammen mit einem Positivbereich heißt angeordneter Körper. Für $x \in P$ *schreibt man auch* $x > 0$*.*

1.4.2 (Der dritte Schritt zum Axiomensystem für $\mathbb{R}$)**.** $\mathbb{R}$ *ist ein angeordneter Körper. Genauer: In dem Körper* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *ist eine (von nun an festgehaltene) Teilmenge* P*, die Menge der positiven Elemente, ausgezeichnet.*

Satz 1.4.3. *Sei* $(K, +, \cdot, P)$ *ein angeordneter Körper.*

(i) 0 *gehört nicht zu* P*. Die Aussage* $0 < 0$ *ist also falsch, und damit lässt sich aus* $x > 0$ *immer* $x \neq 0$ *folgern.*

(ii) $x_1 < x_2$ *und* $y_1 < y_2$ *impliziert* $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ *(„Ungleichungen dürfen addiert werden“).*

(iii) *Aus* $x < y$ *und* $z > 0$ *folgt* $xz < yz$ *(„Ungleichungen dürfen mit einer positiven Zahl multipliziert werden“).*

(iv) $x < y$ *impliziert* $x + z < y + z$ *für jedes* z *(„in Ungleichungen darf auf jeder Seite die gleiche Zahl addiert werden“).*

(v) $x < y$ *impliziert* $-y < -x$ *(„bei Multiplikation mit* -1 *kehrt sich die Ungleichung um“).*

(vi) *Für* $x < y$ *und* $z < 0$ *ist* $xz > yz$ *(„Multiplikation mit beliebigen negativen Zahlen kehrt die Ungleichung um“).*

(vii) *Für jedes* $x \neq 0$ *ist* $x^2 > 0$*; insbesondere ist* $1 > 0$*.*

(viii) *Ist* $x > 0$*, so gilt* $x^{-1} > 0$*, und aus* $x < 0$ *folgt* $x^{-1} < 0$*.*

(ix) *In den Aussagen (ii) bis (vi) darf „*$<$*“ überall durch „*$\leq$*“ ersetzt werden.*

Korollar 1.4.4. *Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Falls -1 als Summe von Quadraten geschrieben werden kann, so existiert in K kein Positivbereich (d.h. es ist nicht möglich, K zu einem angeordneten Körper zu machen).*

1.5 Natürliche Zahlen, vollständige Induktion

Definition. *K bezeichne im Folgenden, sofern nicht anders angegeben, immer den angeordneten Körper $(K, +, \cdot, P)$.*

Definition 1.5.1 (Die unkritische Definition von $\mathbb{N}$)**.** *Unter den natürlichen Zahlen in K verstehen wir die Gesamtheit derjenigen Elemente, die sich als endliche Summe von Einsen schreiben lassen, also* 1, $1{+}1$, $1{+}1{+}1$, *usw.; üblicherweise schreibt man* $2 := 1{+}1$, $3 := 1 + 1 + 1$, *... Wir werden hier das Zeichen $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen in K verwenden.*

Definition 1.5.2. *M sei eine Menge und $\mathcal{M}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von M. Das bedeutet einfach, dass $\mathcal{M}$ aus gewissen Teilmengen von M besteht. Unter dem Durchschnitt über das Mengensystem $\mathcal{M}$ verstehen wir dann die Menge aller x, die zu jedem $N \in \mathcal{M}$ gehören:*

$$\bigcap \mathcal{M} := \{x \in M \mid x \in N \text{ für jedes } N \in \mathcal{M}\}$$

Definition 1.5.3. *Eine Teilmenge $M \subset K$ heiße induktiv, wenn sie die beiden folgenden Eigenschaften hat:*

(i) $1 \in M$,

(ii) $x \in M$ *impliziert* $x + 1 \in M$.

Definition 1.5.4 (Die kritische Definition von $\mathbb{N}$)**.** *Sei $\mathcal{M}$ das System der induktiven Teilmengen von K. Wir definieren dann $\mathbb{N} := \bigcap \mathcal{M}$ und nennen $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.*

Satz 1.5.5 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit*

(i) $1 \in A$

(ii) $n \in A$ *impliziert* $n + 1 \in A$.

(A ist also eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$.) Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Satz 1.5.6. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Satz 1.5.7. *Wieder betrachten wir einen angeordneten Körper* $(K, +, \cdot, P)$ *und darin die in Definition 1.5.4 eingeführte Menge* $\mathbb{N}$ *der natürlichen Zahlen.*

(i) *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ist auch* $n + 1 \in \mathbb{N}$.

(ii) *Summen und Produkte natürlicher Zahlen sind wieder natürliche Zahlen.*

(iii) *Aus* $n \in \mathbb{N}$ *folgt* $n \geq 1$*; insbesondere ist stets* $n > 0$ *und damit* $n \neq 0$.

(iv) $n \in \mathbb{N}$ *und* $n \neq 1$ *impliziert die Existenz eines* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m + 1 = n$*: Außer 1 haben alle natürliche Zahlen einen „Vorgänger".*

(v) *Es seien* $n \in \mathbb{N}$ *und* $k \in K$ *mit* $k > 0$ *so vorgelegt, dass* $n + k \in \mathbb{N}$. *Dann ist auch* $k \in \mathbb{N}$.

(vi) *Sind* $n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n > m$ *gegeben, so folgt* $n - m \in \mathbb{N}$. *Damit gilt auch* $n \geq m + 1$.

(vii) *Ist* $A \subset \mathbb{N}$ *und* A *nicht leer, so gibt es ein* $n_0 \in A$ *mit:*
$n \geq n_0$ *für alle* $n \in A$.
Die Zahl n_0 *ist damit so etwas wie „das kleinstmöglichste" Element in* A.

(viii) *Es sei* A *eine nicht leere und durch eine natürliche Zahl nach oben beschränkte Teilmenge von* $\mathbb{N}$*; es soll also ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $n \leq n_0$ *für jedes* $n \in A$ *geben. Dann existiert ein* $n_1 \in A$ *mit:* $n \leq n_1$ *für alle* $n \in A$.
(Anschaulich ist n_1 *das größtmöglichste Element in* A.*)*

1.6 Die ganzen und die rationalen Zahlen

Definition 1.6.1. *In* $\mathbb{R}$ *definieren wir* $\mathbb{Z}$*, die Menge der ganzen Zahlen, durch*

$$\mathbb{Z} := \{n - m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

Satz 1.6.2. *Die Menge* $\mathbb{Z}$ *hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

(ii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *erfüllt alle Körperaxiome (siehe 1.3.4) bis auf M3: Es gibt von Null verschiedene Zahlen, die kein multiplikativ inverses Element haben.*

Definition 1.6.3. *Unter den rationalen Zahlen in* $\mathbb{R}$ *verstehen wir die Menge*

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

also die Menge der Quotienten aus ganzen und natürlichen Zahlen.
Reelle Zahlen, die nicht zu $\mathbb{Q}$ *gehören, heißten irrational.*

Satz 1.6.4. $\mathbb{Q}$*, versehen mit der Addition und Multiplikation von* $\mathbb{R}$*, ist ein Körper. Definiert man einen Positivbereich durch*

$$P := \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\},$$

so wird $\mathbb{Q}$ *zu einem angeordneten Körper.*

1.7 Das Archimedesaxiom

Definition 1.7.1 (Archimedesaxiom)**.** *Sei* $(K, +, \cdot, P)$ *ein angeordneter Körper. Wir sagen, dass* K *archimedisch angeordnet ist (oder dass das Archimedesaxiom in* K *gilt), falls für jedes* $x \in K$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq x$ *existiert.*

1.7.2 (Der vierte Schritt zum Axiomensystem für $\mathbb{R}$)**.** $\mathbb{R}$ *ist ein angeordneter Körper, in dem das Archimedesaxiom gilt.*

Satz 1.7.3. *Gilt in* $(K, +, \cdot, P)$ *das Archimedesaxiom (insbesondere also in* $\mathbb{R}$*), so folgt:*

(i) Für jedes $\varepsilon \in K$*,* $\varepsilon > 0$*, gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$*.*

(ii) Für jedes $\varepsilon \in K$*,* $\varepsilon > 0$*, und jedes* $M \in K$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n\varepsilon \geq M$*.*

Satz 1.7.4 (Dichtheitssatz)**.** *Es seien* x *und* y *Elemente aus* $\mathbb{R}$ *mit* $x < y$*. Dann gibt es ein* $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ *mit* $x \leq \frac{n}{m} \leq y$*.*

1.8 Vollständigkeit

Definition 1.8.1 (Dedekindscher Schnitt)**.** *Sei* $(K, +, \cdot, P)$ *ein angeordneter Körper. Ein Paar* (A, B) *zweier Teilmengen* A*,* B *von* K *heißt Dedekindscher Schnitt, falls gilt:*

(i) A*,* B *sind beide nicht leer.*

(ii) Für $x \in A$ *und* $y \in B$ *ist stets* $x < y$ *(insbesondere ist damit* $A \cap B = \emptyset$*).*

(iii) $A \cup B = K$*.*

Ist (A, B) *ein Dedekindscher Schnitt, so heißt* $x_0 \in K$ *eine Schnittzahl zu* (A, B)*, falls* $x \leq x_0 \leq y$ *für alle* $x \in A$ *und* $y \in B$*.*

1.8.2 (Der fünfte Schritt zum Axiomensystem von $\mathbb{R}$)**.** $\mathbb{R}$ *ist ein angeordneter Körper, in dem das Archimedesaxiom gilt und in dem jeder Dedekindsche Schnitt eine Schnittzahl besitzt.*

1.9 Von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$

Satz 1.9.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein Körper; das neutrale Element bzgl.* $+$ *(bzw.* $\cdot$*) ist* $(0, 0)$ *(bzw.* $(1, 0)$*).*

1.10 Wie groß ist $\mathbb{R}$?

Definition 1.10.1. *Seien* M *und* N *Mengen und* $f : M \to N$ *eine Abbildung.*

(i) f *heißt injektiv, wenn aus* $m_1 \neq m_2$ *stets* $f(m_1) \neq f(m_2)$ *folgt.*

(ii) f *heißt surjektiv, wenn für alle* $n \in N$ *ein* $m \in M$ *mit* $f(m) = n$ *existiert.*

(iii) f *wird bijektiv genannt, wenn* f *sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

(iv) *Ist $f : M \to N$ bijektiv, so kann man die so genannte inverse Abbildung $f^{-1} : N \to M$ definieren. Sie ordnet jedem $n \in N$ das eindeutig bestimmte m zu, für das $f(m) = n$ gilt.*

Definition 1.10.2. *M und N seien Mengen.*

(i) *M und N sollen isomorph (oder auch gleichmächtig) heißen, wenn es eine bijektive Abbildung f von M nach N gibt. Man sagt dann auch, dass M und N die gleiche Kardinalzahl haben und schreibt dafür $card(M) = card(N)$.*

(ii) *Ist M gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen, so sagt man, dass M abzählbar ist.*

(iii) *Ist eine Menge M nicht gleichmächtig zu einer Teilmenge der natürlichen Zahlen, so heißt sie überabzählbar.*

(iv) *„$card(M) \leq card(N)$“ wird als Abkürzung für die Aussage verwendet, dass es eine injektive Abbildung von M nach N gibt.*

Satz 1.10.3. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Satz 1.10.4. *$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar. Insbesondere muss es reelle Zahlen geben, die nicht rational sind.*

1.11 Ergänzungen

Satz 1.11.1. *Sind $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ angeordnete Körper, die beide den Axiomen aus 1.8.2 genügen, so sind $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ als angeordnete Körper isomorph.*
Kurz: Es gibt höchstens ein $\mathbb{R}$ (bis auf Isomorphie).

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.1.1. *Sei M eine Menge. Unter einer Folge in M verstehen wir eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$.*

Definition 2.1.2. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen in der Menge M.*
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit

(i) *φ ist strikt monoton, d.h. $\varphi(n) < \varphi(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$, und*

(ii) *$b_n = a_{\varphi(n)}$ für alle n.*

Definition 2.1.3. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen in der Menge M. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit:*

$$b_n = a_{\varphi(n)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2.2 Konvergenz

Definition 2.2.1. *x und y seien reelle Zahlen.*

(i) *Wir definieren $|x|$ (gesprochen „x Betrag“ oder „Betrag von x“) durch*

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

(ii) *Unter dem Abstand zwischen x und y verstehen wir die Zahl $|x-y|$. (Je nachdem, welche der Zahlen die größere ist, gilt also $|x-y| = x-y$ oder $|x-y| = y-x$.)*

Satz 2.2.2. *Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $|x| \geq 0$, *und aus* $|x| = 0$ *folgt* $x = 0$.

(ii) $|xy| = |x||y|$.

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung).*

(i)' $|x-y| \geq 0$, *und aus* $|x-y| = 0$ *folgt* $x = y$.

(ii)' $|x-y| = |y-x|$.

(iii)' $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.

Lemma 2.2.3. *Sei $a \geq 0$ eine reelle Zahl.*

(i) *Es gibt höchstens ein $b \geq 0$ in $\mathbb{R}$ mit $b^2 = a$. Genauer: Aus $b_1^2 = b_2^2 = a$ und $b_1, b_2 \geq 0$ folgt $b_1 = b_2$.*

(ii) *Es existiert ein $b \geq 0$ in $\mathbb{R}$ mit $b^2 = a$.*

Definition 2.2.4. *Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Das nach Lemma 2.2.3 eindeutig bestimmte $b \geq 0$ mit $b^2 = a$ wird mit $\sqrt{a}$ (lies: „Wurzel aus a“) oder $a^{1/2}$ bezeichnet.*

Satz 2.2.5. *Es seien a und b reelle Zahlen mit $a, b \geq 0$, weiter sei c eine beliebige reelle Zahl.*

(i) *Die Gleichung $x^2 = a$ hat die Lösungen $x = \sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$, weitere Lösungen gibt es nicht.*

(ii) *Es gilt* $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

(iii) *Es ist* $\sqrt{c^2} = |c|$.

(iv) *Aus* $0 \leq a \leq b$ *folgt* $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Definition 2.2.6.

(i) *Sei $z \in \mathbb{C}$, z geschrieben als $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Unter $|z|$ („z Betrag“ oder „Betrag von z“) verstehen wir dann die Zahl $\sqrt{x^2 + y^2}$.*
(Beachte dazu, dass $x^2 + y^2$ wegen Satz 1.4.3(vii) nicht negativ ist, $\sqrt{x^2 + y^2}$ ist also wirklich definiert.)

(ii) *Für $z, w \in \mathbb{C}$ verstehen wir unter dem Abstand zwischen z und w die Zahl $|z - w|$.*

Satz 2.2.7. *Für $z, w, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $|z| \geq 0$, *und aus* $|z| = 0$ *folgt* $z = 0$.

(ii) $|zw| = |z||w|$.

(iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(i)' $|z - w| \geq 0$, *und aus* $|z - w| = 0$ *folgt* $z = w$.

(ii)' $|z - w| = |w - z|$.

(iii)' $|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$ *(Dreiecksungleichung).*

Definition 2.2.8 (Nullfolge)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Wir sagen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist (oder gegen Null konvergiert), falls es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $|a_n| \leq \varepsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.*

Definition 2.2.9 (Konvergenz)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Wir sagen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, wenn $(a - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.*
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{K}$ gibt mit: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a. Mit Quantoren:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : \; |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Folgen, die nicht konvergent sind, heißen divergent.

Satz 2.2.10. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann gilt*

(i)

$$(\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : \; |a_n| < \varepsilon) \Longleftrightarrow a_n \to 0$$

(ii) *Es gebe ein $K > 0$ mit*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : \; |a_n| \leq K\varepsilon.$$

Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
D.h., dass der Nachweis von z.B. nur $|a_n| \leq 3\varepsilon$ kein Hindernis darstellt.

(iii) *Es gebe eine Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{K}$ *und ein* $\hat{n}$ *mit* $a_n = b_n$ *für* $n \geq \hat{n}$, *d.h.* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *unterscheiden sich schlimmstenfalls durch endlich viele Folgenglieder. Ist dann* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent, so auch* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *und*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Kurz: Das Konvergenzverhalten ist nur abhängig von den a_n *mit* $n \geq \hat{n}$, *wobei* $\hat{n}$ *beliebig groß sein kann.*

(iv) *Aus* $a_n \to a$ *und* $a_n \to b$ *folgt* $a = b$. *Der Limes ist also eindeutig bestimmt, falls er existiert.*

Lemma 2.2.11. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$. *Ist dann* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent, so gibt es ein* $M > 0$ *mit*

$$|a_n| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Folgen mit dieser Eigenschaft heißen beschränkt.
Kurz: Konvergente Folgen sind beschränkt.

Satz 2.2.12. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seien Folgen in* $\mathbb{K}$.

(i) *Gilt* $a_n \to 0$ *und ist* $|b_n| \leq |a_n|$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *so ist auch* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge (Vergleichskriterium oder Majorantenkriterium).*

(ii) *Aus* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *folgt* $a_n + b_n \to a + b$.
Kurz: $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.

(iii) *Aus* $a_n \to a$ *folgt* $ca_n \to ca$ *für jedes* $c \in \mathbb{K}$.
Kurz: $\lim ca_n = c \lim a_n$.

(iv) *Aus* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *folgt* $a_n b_n \to ab$.
Kurz: $\lim a_n b_n = (\lim a_n)(\lim b_n)$.

(v) *Aus* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *folgt* $a_n/b_n \to a/b$, *falls* $b \neq 0$ *und* $b_n \neq 0$ *(für alle* $n \in \mathbb{N}$*) gilt.*
Kurz: $\lim a_n/b_n = \lim a_n / \lim b_n$, *falls* $\lim b_n \neq 0$ *und alle* $b_n \neq 0$.

(vi) *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *und* a_n *geschrieben als* $a_n = x_n + iy_n$ *mit* $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ *(für alle* $n \in \mathbb{N}$*); weiter sei* $a = x + iy \in \mathbb{C}$ *mit* $x, y \in \mathbb{R}$. *Dann gilt* $a_n \to a$ *genau dann, wenn* $x_n \to x$ *und* $y_n \to y$.
Kurz: Konvergenzuntersuchungen in $\mathbb{C}$ *können wir auf die Konvergenz von Real- und Imaginärteil und damit auf Konvergenzuntersuchungen in* $\mathbb{R}$ *zurückgeführt werden.*

(vii) *Es sei* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *und es gelte* $a_n \to a$. *Ist dann* $a_n \leq M$ *für eine Zahl* M *und alle* n, *so gilt* $a \leq M$. *Entsprechend bleiben Ungleichungen der Form* $\geq M$ *im Limes erhalten.*

(viii) *Ist* (b_n) *eine Teilfolge von* (a_n) *und ist die Folge* (a_n) *konvergent, so ist auch* (b_n) *konvergent. Es gilt* $\lim b_n = \lim a_n$.

2.3 Cauchy-Folgen und Vollständigkeit

Definition 2.3.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| \le \varepsilon$ für alle $n, m \ge n_0$. In Quantorenschreibweise:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \ge n_0 \ : \ |a_n - a_m| \le \varepsilon.$$

Satz 2.3.2. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen in $\mathbb{K}$.*

(i) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(ii) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(iii) Angenommen, (a_n) ist eine Cauchy-Folge. Gilt dann $|b_n - b_m| \le |a_n - a_m|$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(iv) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen, so auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für beliebiges $c \in \mathbb{K}$.

(v) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und a_n geschrieben als $a_n = x_n + iy_n$ (mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$). Dann gilt:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge} \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sind Cauchy-Folgen.}$$

Satz 2.3.3. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{K}$ mit $a_n \to a$. Kurz: Cauchy-Folgen in $\mathbb{K}$ sind konvergent.*

Definition 2.3.4. *Sei $(M, \prec)$ ein geordneter Raum, $x_0 \in M$ und $A \subset M$.*

(i) x_0 heißt obere Schranke von A, wenn $x \prec x_0$ für alle $x \in A$.

(i)' x_0 heißt untere Schranke von A, wenn $x_0 \prec x$ für alle $x \in A$.

(ii) x_0 heißt Supremum (oder kleinste obere Schranke) von A, wenn gilt
  - *(a) x_0 ist obere Schranke von A.*
  - *(b) Ist y_0 eine obere Schranke von A, so folgt $x_0 \prec y_0$.*

(ii)' x_0 heißt Infimum (oder größte untere Schranke) von A, wenn gilt
  - *(a) x_0 ist untere Schranke von A.*
  - *(b) Ist y_0 eine untere Schranke von A, so folgt $y_0 \prec x_0$.*

Satz 2.3.5. *Ist $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, die nicht leer und nach oben beschränkt ist, so existiert* $\sup D$.

Satz 2.3.6. *Sei $(K, +, \cdot, P)$ ein archimedisch angeordneter Körper. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $(K, +, \cdot, P)$ ist vollständig im Sinne von Abschnitt 1.8 (d.h., jeder Dedekindsche Schnitt besitzt eine Schnittzahl).

(ii) *Jede Cauchy-Folge in K ist konvergent.*

(iii) *Ist $A \subset K$ nicht leer und nach oben beschränkt, so besitzt A in K ein Supremum.*

(iv) *Seien (a_n) und (b_n) Folgen in K mit der Eigenschaft, dass erstens $a_n \leq b_n$ für alle n, zweitens $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$, drittens $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$ und viertens $b_n - a_n \to 0$; die a_n, b_n laufen also - von links bzw. rechs kommend - aufeinander zu. (Man spricht dann auch von einer Intervallschachtelung.)*
Dann gibt es ein x_0 in K, so dass $a_n \leq x_0 \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.3.7. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, so dass gilt:*

(i) *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend, d.h., $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$.*

(ii) *(a_n) ist nach oben beschränkt: Es gibt ein M mit $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Analog gilt: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2.4 Unendliche Reihen

Definition 2.4.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ (also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Für $N \in \mathbb{N}$ verstehen wir unter der N-ten Partialsumme die Zahl*

$$s_N := a_1 + a_2 + \ldots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Falls der Limes der Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ existiert, sagen wir, dass die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe konvergent ist. In diesem Fall schreiben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} s_N.$$

Die Zahl $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wird die Reihensumme der zu (a_n) gehörige Reihe genannt.
Reihen, die nicht konvergent sind, heißen divergent.

Satz 2.4.2. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen in $\mathbb{K}$.*

(i) *Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existieren, so auch $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$; es gilt $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

(ii) *Es gilt das Distributivgesetz: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert, so auch $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ für jedes $c \in \mathbb{K}$; und dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

(iii) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist (das so genannte Cauchy-Kriterium):*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \underset{n,m\in\mathbb{N}}{\forall} m > n \geq n_0 \; \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

(iv) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ existiert und $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, so existiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Insbesondere impliziert die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diejenige von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
In diesem Fall gilt auch $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(v) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert, so ist $a_n \to 0$. Außerdem gilt dann: Für alle n existiert $b_n := a_n + a_{n+1} + \ldots$, und $b_n \to 0$.

Satz 2.4.3. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in $\mathbb{K}$. Jede der folgenden Bedingungen garantiert, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert:*

(i) Wurzelkriterium: Es gibt ein $\hat{n} \in \mathbb{N}$ sowie ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$, so dass für alle $n \geq \hat{n}$ gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q.$$

(ii) Quotientenkriterium: Es gibt ein $\hat{n} \in \mathbb{N}$ und ein $0 \leq q < 1$, so dass für $n \geq \hat{n}$ gilt:

$$a_n \neq 0 \text{ und } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q.$$

(iii) Kriterium für alternierende Reihen, oder auch LEIBNIZ-Kriterium:
Alle a_n sind reell, es gilt $a_n \to 0$ sowie $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ für alle n, und die Vorzeichen der a_n sind abwechselnd positiv und negativ.
Es ist also entweder $a_1 \geq 0, a_2 \leq 0, a_3 \geq 0, \ldots$ oder umgekehrt.

Definition 2.4.4. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in $\mathbb{K}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.*

Satz 2.4.5. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent und $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ konvergent, und es gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}.$$

Satz 2.4.6. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergente Reihen in $\mathbb{K}$.*
Definiert man dann für $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1,$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

2.5 Ergänzungen

Satz 2.5.1.

(i) *Seien* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_m, \dots, b_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ *und* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\{0, 1, \dots, 9\}$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

und wir setzen abkürzend

$$b_m b_{m-1} \dots b_0.a_1a_2a_3 \dots := b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + b_1 \cdot 10 + b_0 + a_1/10 + a_2/100 + a_3/1000 + \cdots.$$

(ii) *Jede nichtnegative reelle Zahl besitzt eine Darstellung gemäß (i), d.h. zu* $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ *gibt es ein* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_m, \dots, b_0, a_1, a_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$ *mit*

$$x = b_m b_{m-1} \dots b_0.a_1a_2a_3 \dots \quad \textit{die Dezimalbruchentwicklung von } x.$$

(iii) *Vereinbaren wir, dass eine negative Zahl* x *als* $-b_m b_{m-1} \dots b_0.a_1a_2a_3 \dots$ *geschrieben wird, wobei* $b_m b_{m-1} \dots b_0.a_1a_2a_3 \dots$ *die Darstellung von* $-x$ *gemäß (ii) ist, so ist damit für jede reelle Zahl die Existenz einer Dezimalentwicklung nachgewiesen.*

Definition 2.5.2. *Sei* M *eine nicht leere Menge, für jedes* m *sei* a_m *eine reelle nicht negative Zahl. Falls dann eine Zahl* $R \in \mathbb{R}$ *so existiert, dass* $\sum_{m\in\Delta} a_m \leq R$ *für jede endliche Teilmenge* Δ *von* M, *so definieren wir*

$$\sum_{m\in M} a_m := \sup_{\substack{\Delta \subset M, \\ \Delta \text{ endlich}}} \sum_{m\in\Delta} a_m.$$

Satz 2.5.3. *Die* a_m *seien nichtnegativ, und* $\sum_{m\in M} a_m$ *möge existieren. Dann sind höchstens abzählbar viele* a_m *echt größer als Null.*

Definition 2.5.4. *Sei* X *eine Menge mit einer inneren Komposition* $+ : X \times X \to X$ *(Addition) und einer äußeren Komposition* $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ *(Skalarmultiplikation).*
X *heißt dann* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, falls*

(i) $(X, +)$ *ist abelsche Gruppe (d.h., „+“ ist kommutativ und assoziativ, es gibt ein neutrales Element, und jedes Element hat ein Inverses).*

(ii) *Es gilt für beliebige* $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x,$$
$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,$$
$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$$

(iii) *Für jedes* $x \in X$ *ist* $1 \cdot x = x$.

Definition 2.5.5. *Sei* X *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und* $Y \subset X$.
Y *wird Unterraum genannt, falls das neutrale Element der Addition zu* Y *gehört und* $\lambda y_1 + \mu y_2 \in Y$ *für alle* $y_1, y_2 \in Y$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *gilt. Dann ist* Y *bzgl. der von* X *geerbten Kompositionen selbst wieder ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum.*

Definition 2.5.6.

(i) *Sei* s *die Menge aller Folgen in* $\mathbb{K}$*, also*

$$s := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{K}).$$

Wir erklären auf s *eine Addition und eine Skalarmultiplikation durch:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(ii) *Weiter definieren wir*

$$c_{00} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \textit{es existiert ein } \hat{n} \textit{ mit } a_n = 0 \textit{ für } n \geq \hat{n}\}$$

$$c_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \to 0\}$$

$$c := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ ist konvergent}\}$$

$$l^\infty := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \textit{es existiert } M > 0 \textit{ mit } |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Dies sind also die Mengen der abbrechenden Folgen, der Nullfolgen, der konvergenten Folgen und der beschränkten Folgen.

Satz 2.5.7. *Es gilt:*

(i) s *ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum.*

(ii) c_{00}, c_0, c *und* l^∞ *sind Unterräume von* s*, und es gilt*

$$c_{00} \subsetneqq c_0 \subsetneqq c \subsetneqq l^\infty \subsetneqq s.$$

Definition 2.5.8. *Sei* X *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum. Eine Abbildung* $f : X \to \mathbb{K}$ *heißt linear (genauer:* $\mathbb{K}$*-linear), wenn für alle* $x_1, x_2 \in X$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *die Gleichung*

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$$

gilt.

Definition 2.5.9. *Es sei* X *ein Untervektorraum des Raumes* s *aller reellen Folgen, der den Raum* c *der konvergenten Folgen umfasst.*
Er soll auch die folgende Eigenschaft haben: Ist $(a_1, a_2, \ldots)$ *in* X*, so auch die „verschobene" Folge* $(a_2, a_3, \ldots)$*.*
Weiter sei $L : X \to \mathbb{R}$ *eine lineare Abbildung; wir werden das Bild einer Folge* (a_n) *mit* $L(a_n)$ *bezeichnen.* L *heißt ein verallgemeinerter Limes, wenn gilt:*

(i) L *ist linear.*

(ii) L *setzt die übliche Limesabbildung fort: Ist* (a_n) *eine konvergente Folge, so ist* $L(a_n) = \lim a_n$*. (Verträglichkeitsforderung)*

(iii) Ist $a_n \geq 0$ für jedes n, so gilt $L(a_n) \geq 0$. (Monotonie)

(iv) $L(a_1, a_2, \ldots) = L(a_2, a_3, \ldots)$ für jede Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ aus X. (Translationsinvarianz)

Definition 2.5.10. *Sei X_C die Menge derjenigen Folgen (a_n), für die jede Folge*

$$\left(a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \ldots\right)$$

konvergent ist. Definiere $C\text{-}\lim : X_C \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$C\text{-}\lim a_n := \lim_k \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}.$$

Satz 2.5.11. *Der C-Limes ist ein verallgemeinerter Limes auf dem Raum X_C, er wird der Cesàro-Limes genannt.*

3 Metrische Räume und Stetigkeit

3.1 Metrische Räume

Definition 3.1.1 (Metrik). *Sei M eine Menge und $d : M \times M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. d heißt Metrik auf M, wenn gilt:*

(i) Für $x, y \in M$ ist $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ gilt genau dann, wenn $x = y$ ist.

(ii) Für $x, y \in M$ ist $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) Für $x, y, z \in M$ ist $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

M, zusammen mit einer Metrik d, (also das Paar (M, d)) heißt auch metrischer Raum.

Definition 3.1.2. *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, wie üblich ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf X, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind; dabei werden wir $\|x\|$, gesprochen „Norm von x“, statt $\|\cdot\|(x)$ schreiben:*

(i) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in X$, und $\|x\| = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$ ist.

(ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$.

Das Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt dann ein normierter Raum.

Definition 3.1.3. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M.*

(i) Für $x_0 \in M$ heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen x_0, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; d(x_0, x_n) \leq \varepsilon.$$

Man schreibt dann $\lim x_n = x_0$ oder $x_n \to x_0$, und x_0 wird Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt.

(ii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es ein $x_0 \in M$ mit $x_n \to x_0$ gibt.

(iii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0\ d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Satz 3.1.4. *Es gilt:*

(i) Konvergente Folgen haben höchstens einen Limes, d.h. aus $x_n \to x_0$ und $x_n \to y_0$ folgt $x_0 = y_0$.

(ii) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, die Umkehrung gilt im Allgemeinen aber nicht.

Definition 3.1.5. *Sei (M, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in M$ und $r \geq 0$. Unter der Kugel um x_0 mit Radius r verstehen wir dann die Menge*

$$K_r(x_0) := \{x \mid x \in M, d(x, x_0) \leq r\},$$

also die Menge derjenigen x, für die der Abstand zu x_0 höchstens gleich r ist.

Definition 3.1.6. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$.*

(i) A heißt offen (in M), wenn gilt: Für jedes $x_0 \in A$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x_0) \subset A$. Als Formel:

$$\forall x_0 \in A\ \exists \varepsilon > 0\ K_\varepsilon(x_0) \subset A.$$

(ii) A heißt abgeschlossen (in M), wenn $M \setminus A := \{x \in M \mid x \notin A\}$ offen ist (d.h. für jedes $x_0 \in M$ mit $x_0 \notin A$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $A \cap K_\varepsilon(x_0) = \emptyset$). Mit Quantoren liest sich das so:

$$\forall x_0 \notin A\ \exists \varepsilon > 0\ K_\varepsilon(x_0) \cap A = \emptyset.$$

Satz 3.1.7. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Dann sind äquivalent:*

(i) A ist abgeschlossen.

(ii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, für die es ein $x_0 \in M$ mit $x_n \to x_0$ gibt, so ist $x_0 \in A$. In Worten: Folgen in A, die in M konvergent sind, sind bereits in A konvergent.

Satz 3.1.8. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum.*

(i) Sind $A_1, A_2 \subset M$ abgeschlossene Teilmengen, so ist auch $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

(ii) Allgemeiner gilt: $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ist abgeschlossen, falls $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen von M sind.

(iii) Sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von M. Sind alle Elemente von $\mathcal{A}$ abgeschlossen, so ist $\bigcap \mathcal{A}$ abgeschlossen.

(iv) *Sind $O_1, \dots, O_n$ offene Teilmengen von M, so ist auch $O_1 \cap \dots \cap O_n$ offen.*

(v) *Sei $\mathcal{O}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von M mit der Eigenschaft, dass jedes Element von $\mathcal{O}$ eine offene Teilmenge von M ist. Dann ist $\bigcup \mathcal{O}$ offen.*

(vi) *Die vorstehenden Aussagen sind bestmöglich im folgenden Sinn: Es ist nicht richtig, dass in allen metrischen Räumen beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind oder beliebige Schnitte offener Mengen wieder offen sind.*

Definition 3.1.9. *Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes (M, d).*

(i) *Der offene Kern (auch: das Innere) von A ist die Menge*

$$A^\circ := \{x \mid x \in M, \exists \varepsilon > 0 \; K_\varepsilon(x) \subset A\};$$

die Menge A° wird auch kurz als „A Null“ bezeichnet.

(ii) *Unter dem Abschluss von A (auch abgeschlossene Hülle) verstehen wir die Menge*

$$A^- := \{x \mid x \in M, \forall \varepsilon > 0 \; K_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\};$$

gesprochen wird das als „A quer“.

Satz 3.1.10. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Dann gilt:*

(i) *A^- ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, d.h.*
  - *(a)* *$A \subset B \subset M$, B abgeschlossen $\Rightarrow A^- \subset B$.*
  - *(b)* *A^- ist abgeschlossen, und $A \subset A^-$.*

(ii) *A° ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist, d.h.*
  - *(a)* *$B \subset A \subset M$, B offen $\Rightarrow B \subset A^\circ$.*
  - *(b)* *A° ist offen, und $A^\circ \subset A$.*

(iii) *A ist genau dann abgeschlossen, wenn $A = A^-$.*

(iv) *A ist genau dann offen, wenn $A = A^\circ$.*

(v) *$A^- = \{x_0 \in M \mid$ es gibt eine Folge (x_n) in A mit $x_n \to x_0\}$.*

Definition 3.1.11. *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann heißt eine Teilmenge D von M dicht in M, falls $D^- = M$.*

Satz 3.1.12. *Die folgenden Aussagen sind für eine Teilmenge D eines metrischen Raumes äquivalent:*

(i) *D liegt dicht in M.*

(ii) *Zu jedem $x_0 \in M$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in D$ mit $d(x, x_0) \leq \varepsilon$.*

(iii) *Zu jedem $x_0 \in M$ gibt es eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$.*

Definition 3.1.13. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Dann heißt die Menge*

$$\partial A := A^- \setminus A^\circ \ (= \{x \mid x \in A^-, x \notin A^\circ\})$$

der Rand von A.

3.2 Kompaktheit

Definition 3.2.1. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $K \subset M$. K heißt kompakt, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.*

Satz 3.2.2. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $K, K_1, K_2 \subset M$.*

(i) Ist K kompakt, so ist K abgeschlossen.

(ii) Kompakte Teilmengen sind beschränkt: Falls K kompakt ist, so gibt es für jedes $x_0 \in M$ ein $R \geq 0$ mit $d(x, x_0) \leq R$ für alle $x \in K$.

(iii) Sind K_1 und K_2 kompakt, so auch $K_1 \cup K_2$.
(Durch vollständige Induktion folgt daraus sofort, dass die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen wieder kompakt ist.)

(iv) Ist K kompakt, so ist auch jede abgeschlossene Teilmenge A von K kompakt.

Satz 3.2.3. *Sei K eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. K ist genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist. Insbesondere sind alle Intervalle $[a, b]$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) kompakt.*

Lemma 3.2.4. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K}^m$ versehen mit der durch $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metrik. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\vec{x}_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m) \in \mathbb{K}$ vorgelegt.*

(i) $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ konvergiert.

(ii) Gibt es ein $R \geq 0$ mit $\|\vec{x}_n\|_\infty \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so besitzt $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Satz 3.2.5 (Kompaktheit in $\mathbb{K}^m$)**.** *Eine Teilmenge K des $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Definition. *Wir wählen zwei Elemente $-\infty$ und $+\infty$ und definieren:*

(i) $\hat{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *($\hat{\mathbb{R}}$ gesprochen als „R Dach“ heißt die Zweipunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$).*

(ii) Die Ordnung wird für $x, y \in \hat{\mathbb{R}}$ wie folgt fortgesetzt:

$$x \leq y \overset{\text{Definition}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq y \\ \text{oder } x = -\infty \\ \text{oder } y = +\infty. \end{cases}$$

„$\leq$“ ist dann wirklich eine Ordnungsrelation auf $\hat{\mathbb{R}}$, und diese Ordnung stimmt nach Definition auf $\mathbb{R}$ mit der dort definierten Ordnung überein.

(iii) Die algebraische Struktur: „$+$“ und „$\cdot$“ können nicht sinnvoll zu inneren Kompositionen für $\hat{\mathbb{R}}$ fortgesetzt werden. Wir definieren nur:

- $x + (+\infty) := (+\infty) + x := +\infty$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$,
- $x + (-\infty) := (-\infty) + x := -\infty$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$,
- $(+\infty) + (+\infty) := +\infty$,
- $(-\infty) + (-\infty) := -\infty$,
- $x \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot x := +\infty$ *für* $x \in \mathbb{R}, x > 0$,
- $x \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot x := -\infty$ *für* $x \in \mathbb{R}, x < 0$,
- $x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := -\infty$ *für* $x \in \mathbb{R}, x > 0$,
- $x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := +\infty$ *für* $x \in \mathbb{R}, x < 0$,
- $(+\infty) \cdot (+\infty) := (-\infty) \cdot (-\infty) := +\infty$,
- $(+\infty) \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot (+\infty) := -\infty$.

Zu beachten ist, dass weder „$+$“ noch „$\cdot$“ auf ganz $\hat{\mathbb{R}} \times \hat{\mathbb{R}}$ definiert sind, zum Beispiel ist nicht festgelegt, was $0 \cdot (+\infty)$ sein soll. Die Frage, ob $\hat{\mathbb{R}}$ ein Körper ist, ist folglich sinnlos.

(iv) Konvergenz: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\hat{\mathbb{R}}$ und $a \in \mathbb{R}$, so definieren wir

$$\begin{aligned} a_n \to a &\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n \in \mathbb{R} \text{ und } |a_n - a| \leq \varepsilon, \\ a_n \to +\infty &\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \forall R \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n \geq R, \\ a_n \to -\infty &\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \forall R \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n \leq R, \end{aligned}$$

Alle mit „Konvergenz“ zusammenhängenden Schreibweisen werden ebenfalls übernommen.

Satz 3.2.6. *In* $\hat{\mathbb{R}}$ *gilt:*

(i) Jede Teilmenge hat ein Supremum und ein Infimum.

(ii) Jede Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Satz 3.2.7. *Sei* (M,d) *ein metrischer Raum und* $K \subset M$*. Dann ist* K *genau dann kompakt, wenn gilt:*
Ist $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$ *eine offene Überdeckung von* K *(d.h. jedes* $O \in \mathcal{O}$ *ist offen und es ist* $\bigcup \mathcal{O} \supset K$*), so existieren* $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O}$ *mit* $K \subset O_1 \cup \dots \cup O_n$*; aus jeder offenen Überdeckung von* K *lässt sich also eine endliche Teilüberdeckung auswählen.*

3.3 Stetigkeit

Definition 3.3.1. (M, d_M) *und* (N, d_N) *seien metrische Räume und* f *von* M *nach* N *eine Abbildung.*

(i) Für $x_0 \in M$ *heißt* f *stetig bei* x_0*, wenn für jedes positive* ε *ein positives* δ *existiert, so dass für alle* $x \in M$ *mit* $d_M(x, x_0) \leq \delta$ *die Ungleichung* $d_N(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$ *gilt. Mit Quantoren:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in M \; d_M(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

(ii) f *heißt stetig auf* M*, wenn* f *stetig bei* x_0 *für alle* $x_0 \in M$ *ist.*

Definition 3.3.2. *Eine Funktion* $f : M \to N$ *heißt Lipschitzabbildung, falls es ein* $L \geq 0$ *gibt, so dass*

$$\forall x, y \in M \; d_N(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_M(x, y).$$

Ein solches L *heißt eine Lipschitzkonstante für* f*.*

Satz 3.3.3. *Lipschitzabbildungen sind stetig.*

Satz 3.3.4 (Charakterisierungssatz)**.** (M, d_M) *und* (N, d_N) *seien metrische Räume und* $f : M \to N$ *eine Abbildung.*

(i) Für $x_0 \in M$ *ist* f *bei* x_0 *genau dann stetig, wenn gilt: Ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* M *mit* $\lim x_n = x_0$*, so gilt* $\lim f(x_n) = f(x_0)$*.*
Damit ist f *genau dann stetig auf* M*, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

für alle in M *konvergenten Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt.*

(ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) f *ist stetig auf* M*.*
(b) Für jede abgeschlossene Teilmenge A *von* N *ist* $f^{-1}(A)$ *abgeschlossen in* M*.*
(c) Für jedes offene $O \subset N$ *ist* $f^{-1}(O)$ *offen in* M*.*

Satz 3.3.5 (Permanenzsatz)**.**

(i) *Komposita: Für $i = 1, 2, 3$ seien metrische Räume (M_i, d_i) gegeben, ferner seien $f : M_1 \to M_2$ und $g : M_2 \to M_3$ Abbildungen.*
Für $x_0 \in M_1$ gilt dann: Ist f stetig bei x_0 und g stetig bei $f(x_0)$, so ist $g \circ f$ stetig bei x_0.
Als Folgerung ergibt sich, dass $g \circ f$ stetig ist, falls f und g stetige Funktionen sind.

(ii) *Algebraische Verknüpfungen: (M, d) sei ein metrischer Raum und f, g stetige Funktionen von M nach $\mathbb{K}$. Erklärt man $f + g, f \cdot g, \alpha f (\alpha \in \mathbb{K})$ und f/g punktweise, so sind diese Funktionen stetig bei x_0 (bzw. stetig auf M), wenn f und g beide diese Eigenschaft haben.*

(iii) *Ordnungstheoretische Verknüpfungen: (M, d) sei ein metrischer Raum, $f, g : M \to \mathbb{R}$. Definiert man $\min\{f, g\}$ bzw. $\max\{f, g\}$ durch*

$$x \mapsto \min\{f(x), g(x)\},\ x \mapsto \max\{f(x), g(x)\},$$

so sind diese Funktionen im Fall stetiger f, g ebenfalls stetig.

Satz 3.3.6 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$. Dann gibt es für jedes η mit $f(a) < \eta < f(b)$ ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = \eta$.*

Korollar 3.3.7. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $a \geq 0$ gibt es genau ein $b \geq 0$ mit $b^n = a$. b wird die n-te Wurzel aus a (Schreibweise $\sqrt[n]{a}$ oder $a^{1/n}$) genannt.*

Satz 3.3.8. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton steigende Funktion.*

(i) *Die Bildmenge $\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ stimmt mit dem Intervall $I := [f(a), f(b)]$ überein, und $f : [a, b] \to I$ ist bijektiv.*

(ii) *Die inverse Abbildung $f^{-1} : I \to [a, b]$ ist stetig.*

Eine entsprechende Aussage gilt für streng monoton fallende Funktionen.

Satz 3.3.9 (Stetige Bilder kompakter Räume sind wieder kompakt)**.** *Sei $f : M \to N$ eine stetige Funktion (wobei (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume sind). Für jede kompakte Teilmenge A von M ist dann auch*

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

kompakt; insbesondere ist $f(A)$ dann abgeschlossen.

Korollar 3.3.10. *(M, d_M) und (N, d_N) seien kompakt, und $f : M \to N$ sei eine bijektive stetige Abbildung. Dann ist $f^{-1} : N \to M$ stetig.*

Satz 3.3.11 (Satz von Maximum und Minimum)**.** *Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist dann $M \neq \emptyset$, so gibt es Elemente x_0 und y_0 in M, so dass*

$$\forall x \in M\ f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0).$$

Bei x_0 bzw. y_0 wird der für f kleinstmöglichste bzw. größtmöglichste Wert angenommen, und $f(x_0)$ (bzw. $f(y_0)$) heißt das Minimum (bzw. das Maximum) der Funktion f auf M.

Definition 3.3.12. *(M, d_M) und (N, d_N) seien metrische Räume. Eine Funktion $f : M \to N$ heißt gleichmäßig stetig, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_0 \in M \ \forall d_M(x, x_0) \leq \delta \ d_N(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

Satz 3.3.13 (Kompaktheit impliziert gleichmäßige Stetigkeit)**.** *(M, d_M) und (N, d_N) seien metrische Räume. Ist M kompakt, so ist jede stetige Funktion $f : M \to N$ sogar gleichmäßig stetig.*

4 Differentiation (eine Veränderliche)

4.1 Differenzierbare Funktionen

Definition 4.1.1. *Es sei M ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ oder eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Weiter sei x_0 ein beliebiger Punkt aus M.*
(Man beachte, dass es dann Folgen in $M \setminus \{x_0\}$ gibt, die gegen x_0 konvergieren.)
Ist dann $g : M \setminus \{x_0\} \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $\alpha \in \mathbb{K}$, so sagen wir, dass

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = \alpha$$

gilt, falls die Folge $(g(x_n))$ für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $M \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gegen α konvergent ist.

Definition 4.1.2. *Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{K}$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ soll M eine offene Teilmenge, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall sein. Weiter sei $f : M \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $x_0 \in M$.*

(i) f heißt bei x_0 differenzierbar, falls

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert, dieser Limes soll dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet werden.
$f'(x_0)$ (gesprochen „f Strich von x_0“) heißt die Ableitung von f bei x_0.

(ii) Ist f bei allen $x \in M$ differenzierbar, so heißt f auf M differenzierbar. Unter $f' : M \to \mathbb{K}$ wollen wir dann die Funktion $x \mapsto f'(x)$ (die Ableitung von f) verstehen.

Satz 4.1.3. *M und f seien wie in Definition 4.1.2. Ist dann f bei $x_0 \in M$ differenzierbar, so ist f bei x_0 stetig.*

Satz 4.1.4 (Permanenzsatz)**.** *M, M_1 und M_2 seien wie in Definition 4.1.2 gegeben. Dann gilt:*

(i) Sind f und g Abbildungen von M nach $\mathbb{K}$, die beide bei $x_0 \in M$ differenzierbar sind, so ist auch $f + g$ bei x_0 differenzierbar. Es gilt

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(ii) *Aus der Differenzierbarkeit von* $f : M \to \mathbb{K}$ *bei* $x_0 \in M$ *folgt, dass auch* αf *bei* x_0 *differenzierbar ist (für alle* $\alpha \in \mathbb{K}$*). Es gilt*

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0).$$

(iii) *Sind* $f, g : M \to \mathbb{K}$ *bei* $x_0 \in M$ *differenzierbar, so auch* $f \cdot g$*. Für die Ableitung gilt die Produktregel:*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(iv) $f : M_1 \to M_2$ *sei bei* $x_0 \in M_1$ *und* $g : M_2 \to \mathbb{K}$ *bei* $f(x_0)$ *differenzierbar. Dann ist auch* $g \circ f : M_1 \to \mathbb{K}$ *bei* x_0 *differenzierbar, und es gilt die Kettenregel:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

(v) $f, g : M \to \mathbb{K}$ *seien bei* $x_0 \in M$ *differenzierbar, und es gelte* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in M$*. Dann ist* $f/g : M \to \mathbb{K}$ *bei* x_0 *differenzierbar, und die Ableitung lässt sich nach der Quotientenregel berechnen:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

(vi) *Ist* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*,* $M \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall und* $f : M \to \mathbb{R}$ *streng monoton steigend, so gilt für die inverse Funktion* f^{-1}*: Falls* f *bei* $x_0 \in M$ *differenzierbar ist mit* $f'(x_0) \neq 0$*, so ist* f^{-1} *bei* $f(x_0)$ *differenzierbar. Es gilt dann*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Die gleiche Aussage gilt für streng monoton fallende Abbildungen.

4.2 Mittelwertsätze

Satz 4.2.1 (Satz von ROLLE)**.** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Gilt dann*

- f *ist differenzierbar auf* $]a, b[$,
- f *ist stetig auf* $[a, b]$,
- $f(a) = f(b)$,

so gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ *mit* $f'(x_0) = 0$.

Satz 4.2.2.

(i) *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* $]a, b[$ *differenzierbar. Dann gibt es ein* $x_0 \in]a, b[$ *mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \quad \textit{(erster Mittelwertsatz)}.$$

(ii) Ist f wie in (i) und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$, so gibt es ein $x_0 \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \textit{(zweiter Mittelwertsatz).}$$

Korollar 4.2.3. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion.*

(i) Ist $f'(x) = 0$ für alle x, so ist f konstant.

(ii) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle x, so ist f monoton steigend.

(iii) Ist $f'(x) \leq 0$ für alle x, so ist f monoton fallend.

(iv) Ist $f'(x) > 0$ für alle x, so ist f streng monoton steigend.

(v) Ist $f'(x) < 0$ für alle x, so ist f streng monoton fallend.

(vi) Ist $|f'|$ durch eine Konstante R beschränkt, so ist f eine Lipschitzabbildung mit Lipschitzkonstante R.

Satz 4.2.4 (Die l'Hôpitalschen Regeln, der Fall 0/0)**.**
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

(i) $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b[$ sowie

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0.$$

Falls dann $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so auch $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(i)' Analog für Funktionen $f, g : \ ]a,b] \to \mathbb{R}$ und den rechtsseitigen Limes $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x)$.

(ii) $f, g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle x in $[a,+\infty[$ sowie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Falls dann $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so auch $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii)' Analog für Funktionen $f, g :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)/g(x)$.

Satz 4.2.5 (Die l'Hôpitalschen Regeln, der Fall ∞/∞)**.**
Es seien a und b reelle Zahlen, $a < b$.

(i) *$f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b[$ sowie*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = +\infty.$$

Falls dann $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so auch $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Analoge Aussagen erhält man - wie im Fall der l'Hôpitalschen Regeln im Fall $0/0$ - für Limites von Funktionen, die auf $]a, b]$, $[a, +\infty[$ oder $]-\infty, b]$ definiert sind.*

4.3 Taylorpolynome

Definition 4.3.1. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar, $x_0 \in [a, b]$. Unter dem n-ten Taylorpolynom bei x_0 verstehen wir dann das Polynom*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Satz 4.3.2 (Satz von Taylor, Restgliedformel)**.**
Die Funktion $f : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ sei $(n + 1)$-mal differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in]x_0, x[$ mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

d.h. dann gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Satz 4.3.3. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar.*

(i) *Ist $x_0 \in]a, b[$ ein lokales Maximum, so ist $f'(x_0) = 0$. Ebenso ist $f'(x_0) = 0$, falls $x_0 \in]a, b[$ ein lokales Minimum ist.*

(ii) *Sei $x_0 \in]a, b[$ mit $f'(x_0) = 0$ vorgelegt, x_0 ist dann nicht notwendig ein Extremwert (d.h. ein lokales Maximum oder Minimum). Falls f genügend oft differenzierbar ist, lassen sich aber hinreichende Bedingungen angeben:*
Angenommen, f ist auf $[a, b]$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, und $f^{(n+1)}$ ist stetig bei x_0. Wir setzen voraus, dass

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0, \;\; f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Ist dabei n ungerade (und damit $n + 1$ gerade), so ist x_0 ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Maximum für $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ und ein lokales Minimum im Fall $f^{(n+1)}(x_0) > 0$.
Ist n gerade, so ist x_0 weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum.

4.4 Potenzreihen

Definition 4.4.1. *Sei $a = (a_0, a_1, \dots)$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Wir setzen*

$$D_a := \left\{ z \mid z \in \mathbb{K},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert in } \mathbb{K} \right\};$$

diese Menge ist der naheliegende Definitionsbereich der Funktion

$$\begin{aligned} f_a : D_a &\rightarrow \mathbb{K} \\ z &\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \end{aligned}$$

f_a heißt die zu a gehörige Potenzreihe.
Kurz: Es ist $f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, wo immer in $\mathbb{K}$ sich das sinnvoll definieren lässt.

Lemma 4.4.2. *Ist $z \in D_a$ und $|w| < |z|$, so ist auch $w \in D_a$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ ist sogar absolut konvergent.*

Satz 4.4.3. *Sei $a = (a_0, a_1, \dots)$ vorgelegt. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:*

- *Entweder ist $D_a = \mathbb{K}$, dann definieren wir die Zahl R_a durch $R_a := +\infty$.*
- *Oder es gibt ein eindeutig bestimmtes $R_a \in [0, +\infty[$ mit*

$$\{z \mid |z| < R_a\} \subset D_a \subset \{z \mid |z| \leq R_a\}.$$

R_a heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe f_a.

Definition 4.4.4.

(i) Eine Zahl $t \in \hat{\mathbb{R}}$ heißt ein Häufungspunkt von (b_n), wenn t der Limes einer geeignet gewählten Teilfolge (b_{n_k}) ist. Wir bezeichnen mit Δ_b die Menge aller Häufungspunkte von (b_n).
Beachte, dass Δ_b nicht leer ist, denn nach Satz 3.2.6 hat jede Folge in $\hat{\mathbb{R}}$ eine konvergente Teilfolge.

(ii) Der Limes superior von (b_n) wird als

$$\limsup b_n := \sup \Delta_b \in \hat{\mathbb{R}}$$

definiert. Möchte man hervorheben, wie die Folgenindizes heißen, schreibt man $\limsup_{n\to\infty} b_n$.

(iii) Der Vollständigkeit halber definieren wir noch: Der Limes inferior von (b_n) ist die Zahl

$$\liminf b_n := \inf \Delta_b \in \hat{\mathbb{R}}.$$

Satz 4.4.5. (b_n) *sei eine reelle Folge.*

(i) $\limsup b_n$ *gehört zu* Δ_b*, d.h., es gibt eine Teilfolge von* (b_n)*, die gegen den Limes superior konvergiert.*
Anders ausgedrückt: $\limsup b_n$ *ist der größte Häufungspunkt der Folge* (b_n)*.*

(ii) Setze $c := \limsup b_n$*, wir nehmen an, dass* $c \in \mathbb{R}$*. Dann gilt: Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gibt es nur endlich viele Indizes* n *mit* $b_n \geq c + \varepsilon$*, aber für unendlich viele Indizes* n *ist* $b_n \geq c - \varepsilon$*.*

(iii) Es sei $\limsup b_n = +\infty$*. Für jedes reelle* R *sind dann unendlich viele* b_n *größer oder gleich* R*.*

(iv) Ist $\limsup b_n = -\infty$*, so sind - für jedes reelle* R *- nur endlich viele* b_n *größer oder gleich* R*.*

(v) Die vorstehenden Aussagen charakterisieren den Limes superior: Hat eine reelle Zahl c *die in (ii) beschriebenen Eigenschaften, so ist* $c = \limsup b_n$*. Entsprechend gelten die Umkehrungen von (iii) und (iv).*

(vi) Eine Folge (b_n) *ist in* $\hat{\mathbb{R}}$ *genau dann konvergent, wenn* $\limsup b_n = \liminf b_n$ *gilt.*

Analoge Charakterisierungen gibt es für den Limes inferior.

Satz 4.4.6. $a := (a_0, a_1, \ldots)$ *sei eine Folge in* $\mathbb{K}$*,* f_a *die zugehörige Potenzreihe und* R_a *deren Konvergenzradius.*

(i) Es ist

$$R_a = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}};$$

wir vereinbaren dabei $1/0 := +\infty$ *und* $1/+\infty := 0$*.*

(ii) Sind alle $a_n \neq 0$ *und existiert* $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ *in* $\hat{\mathbb{R}}$*, so ist*

$$R_a = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Lemma 4.4.7. *Es gilt:*

(i) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

(ii) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\hat{\mathbb{R}}$ *und* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine gegen 1 konvergente reelle Folge, so ist*

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(iii) Die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ *sind gleich.*

Satz 4.4.8. *$f_a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ sei eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R_a. Dann ist f_a bei allen z mit $|z| < R_a$ (also im Innern des Konvergenzkreises) differenzierbar mit*

$$f_a'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots .$$

Insbesondere ist f_a' ebenfalls eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R_a, und eine mehrfache Anwendung dieses Ergebnisses zeigt, dass f_a in $\{z \mid |z| < R_a\}$ beliebig oft differenzierbar ist.

Korollar 4.4.9.

(i) Ist $f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, so lassen sich die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ aus der Funktion $z \mapsto f_a(z)$ ermitteln: Es gilt

$$a_n = \frac{f_a^{(n)}(0)}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sind f_a, f_b Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius, so gilt: Gibt es eine Nullfolge (z_k), so dass $z_k \neq 0$ und $f_a(z_k) = f_b(z_k)$ für alle k gilt, so ist $a_n = b_n$ für alle n. (Wir setzen dabei natürlich voraus, dass alle $f_a(z_k)$, $f_b(z_k)$ definiert sind.) Insbesondere gilt: Ist für irgendein positives ε, das kleiner als R_a und kleiner als R_b ist, $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ für alle z mit $|z| \leq \varepsilon$, so ist $a_n = b_n$ für alle n. (Identitätssatz für Potenzreihen)

(iii) $f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sei eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Dann ist f_a symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch), genau dann, wenn $a_1 = a_3 = \cdots = 0$ (bzw. $a_0 = a_2 = \cdots = 0$); dabei heißt eine Funktion f symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch) auf einer Menge Δ, wenn Δ eine Teilmenge des Definitionsbereichs von f ist, mit $z \in \Delta$ stets auch $-z \in \Delta$ gilt und die Gleichung $f(-z) = f(z)$ (bzw. $f(-z) = -f(z)$) für alle $z \in \Delta$ erfüllt ist.

Definition 4.4.10. *Sei $M \subset \mathbb{K}$ und $z_0 \in M$; M sei offen oder (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ein Intervall. Eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{K}$ heißt bei z_0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, wenn es ein $\delta > 0$ und eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ gibt, so dass $R_a > \delta$ ist und f wie folgt dargestellt werden kann:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ für alle } z \text{ mit } |z - z_0| \leq \delta.$$

Satz 4.4.11. *Es sei* $]a, b[$ *ein Intervall in* $\mathbb{R}$, *und eine beliebig oft differenzierbare Funktion* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *sei vorgegeben. Weiter sei* $x_0 \in]a, b[$.

(i) Falls es positive K *und* δ *gibt, so dass* $|f^{(n)}(\xi)| \leq K$ *für alle* n *und alle* ξ *mit* $|\xi - x_0| \leq \delta$, *so ist* f *bei* x_0 *lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, für die der Konvergenzradius* $\geq \delta$ *ist.*
Kurz: Gleichmäßig beschränkte Ableitungen garantieren Entwickelbarkeit.

(ii) Es gebe ein r, *so dass* $f^{(r)} = f$. *Dann ist* f *bei* x_0 *lokal in eine Potenzreihe entwickelbar.*

(iii) Allgemeiner gilt: Es gebe ein $r \in \mathbb{N}$ *und reelle Zahlen* $a_0, \ldots, a_{r-1}$, *so dass*

$$f^{(r)} = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{r-1} f^{(r-1)}.$$

Auch dann ist f *lokal bei* x_0 *in eine Potenzreihe entwickelbar.*

4.5 Spezielle Funktionen

Satz 4.5.1. *Es gibt genau eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften:*

- f *ist differenzierbar.*
- $f' = f$.
- $f(0) = 1$.

Sie ist beliebig oft differenzierbar und bei 0 *in eine Potenzreihe mit unendlichem Konvergenzradius entwickelbar. Es gilt*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Satz 4.5.2. *Die nach Satz 4.5.1 eindeutig bestimmte Funktion* f *mit* $f' = f$ *und* $f(0) = 1$ *wird mit* exp *(Exponentialfunktion) bezeichnet.*

Satz 4.5.3. *Für die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $\exp(x) \exp(-x) = 1$ *für alle* x.

(ii) $\exp(x) \neq 0$ *für alle* x.

(iii) $\exp(x) > 0$ *für alle* x.

(iv) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ *für alle* x, y.

(v) exp *ist streng monoton steigend (und folglich injektiv), und für jedes* $y > 0$ *gibt es ein* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $\exp(x) = y$ *(d.h.* exp *ist eine surjektive Abbildung von* $\mathbb{R}$ *nach* $]0, +\infty[$*).*
Damit ist $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *eine bijektive Abbildung.*

Definition 4.5.4. *Die Umkehrabbildung zu* exp *bezeichnen wir mit*

$$\log : \ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

(Logarithmus). Nach Definition ist also - für $y > 0$ - die Zahl $\log y$ das eindeutig bestimmte x, für das $\exp(x) = y$ gilt.

Korollar 4.5.5. *Für die Logarithmusfunktion* log *gilt:*

(i) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ *für alle $a, b > 0$.*

(ii) log *ist differenzierbar, und es gilt $\log'(x) = 1/x$ für alle $x > 0$.*

Definition 4.5.6. *Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Wir setzen*

$$a^x := \exp(x \cdot \log a).$$

Satz 4.5.7. *Es sei $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$\exp\left(\frac{m}{n} \log a\right) = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Anders ausgedrückt: Beide Definitionsmöglichkeiten für $a^{m/n}$ führen zum gleichen Ergebnis.

Korollar 4.5.8. *Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

(ii) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

(iii) Die Funktion $x \mapsto a^x$ ist differenzierbar, und es gilt $(a^x)' = \log a \cdot a^x$.

(iv) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $x \mapsto x^c$ differenzierbar mit $(x^c)' = c \cdot x^{c-1}$.

(v) Für positives a, $a \neq 1$, ist $\log_a x$ differenzierbar. Es gilt $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$.

Satz 4.5.9. *e ist irrational.*

Satz 4.5.10. *Es gibt genau eine Funktion s und genau eine Funktion c, die das folgende Problem lösen:*

$$\begin{aligned} s'' + s = 0 \quad &, \quad s(0) = 0,\ s'(0) = 1,\ \textit{und} \\ c'' + c = 0 \quad &, \quad c(0) = 1,\ c'(0) = 0. \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind bei 0 in eine Potenzreihe mit unendlichem Konvergenzradius entwickelbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots, \\ c(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} &&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots. \end{aligned}$$

Definition 4.5.11. *Die eindeutig bestimmten Lösungen* s *und* c *des Problems aus 4.5.10 (Schwingungsdifferentialgleichung) bezeichnen wir mit* $\sin$ *(Sinus) und* $\cos$ *(Cosinus).*

Satz 4.5.12. *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$.

(ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

(iii) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$.

(iv) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Satz 4.5.13. *Es gibt eine kleinste positive reelle Zahl* c_0 *mit* $\sin c_0 = 1$.

Definition 4.5.14. *Es sei* c_0 *die kleinste positive Zahl mit* $c_0 = 1$. *Wir definieren* $\pi := 2c_0$.
π *hat ungefähr den Wert* $3.14\ldots$.

Korollar 4.5.15. *Es gilt* $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *sowie* $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$.
Außerdem ist für alle $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\sin(2\pi + x) = \sin x$,

(ii) $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\cos(2\pi + x) = \cos x$,

(iii) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

Satz 4.5.16. *Zu jedem Punkt* (a, b) *auf dem Einheitskreis existiert genau ein* $x \in [0, 2\pi[$ *mit* $a = \cos x$, $b = \sin x$, *d.h.*

$$\forall a^2 + b^2 = 1 \ \exists x \in [0, 2\pi[\ : \ a = \cos x \ , \ b = \sin x.$$

Definition 4.5.17. *Die Tangens-Funktion* $\tan$ *und die Cotangens-Funktion* $\cot$ *sind definiert durch*

$$\begin{aligned}
\tan : \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \cos x \neq 0\} &\mapsto \mathbb{R} \\
x &\mapsto \frac{\sin x}{\cos x}, \\
\cot : \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \sin x \neq 0\} &\mapsto \mathbb{R} \\
x &\mapsto \frac{\cos x}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Definition 4.5.18. *Wir definieren für* $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\exp z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \\
\sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \cdots, \\
\cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \pm \cdots.
\end{aligned}$$

Definition 4.5.19. *Es sei $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann soll a^z durch*

$$a^z := \exp(z \log a)$$

definiert sein.

Satz 4.5.20. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\exp' z = \exp z$, $\sin'' z = -\sin z$, *und* $\cos'' z = -\cos z$,
die Funktionen exp, sin *und* cos *genügen also den Differentialgleichungen wie im Fall reeller Skalare.*

(ii) $\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$.

(iii) $\exp iz = \cos z + i \sin z$ *(Eulersche Formel).*

(iv) $\exp(z + 2\pi i) = \exp z$ *für jedes* $z \in \mathbb{C}$.

(v) z kann als $z = |z|e^{ix}$ mit einem $x \in [0, 2\pi[$ geschrieben werden. Ist $z \neq 0$, so ist dieses x eindeutig bestimmt.

(vi) Für die Potenz im Komplexen gelten die folgenden Rechenregeln (dabei sind a und b positive Zahlen):

$$(ab)^z = a^z b^z, \quad a^z a^w = a^{z+w}.$$

Definition 4.5.21. *Sei $z \in \mathbb{C}$, die nach Satz 4.5.20(v) existierende Darstellung $z = |z|e^{ix}$ mit $x \in [0, 2\pi[$ wird die Polardarstellung von z genannt. Dabei heißt die Zahl x das Argument von z.*

Korollar 4.5.22. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.*

4.6 Fundamentalsatz der Algebra

Satz 4.6.1 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

ein nicht konstantes Polynom n-ten Grades (d.h. $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$) mit $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Die $z_1, \ldots, z_n$ sind gerade die Nullstellen von P: Es ist $P(z_j) = 0$ für $j = 1, \ldots, n$, und ist eine Zahl z von allen z_j verschieden, so ist $P(z) \neq 0$.