6. Übung: Lineare Algebra I

Sommersemester 2005

Barbara Baumeister, Abgabe: Mo, 30.5.05

(1) Beweisen Sie:
Sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$. Dann gilt
$U \leq G$ genau dann, wenn $U \neq \emptyset$ und wenn die folgenden Bedingungen gelten:

(i) Für alle $u, v \in U$ ist stets $u \star v \in U$.

(ii) Ist $u \in U$, dann ist auch $u^{-1} \in U$.

(2) Sei $m \in \mathbf{N}$. Zeigen Sie, dass $(m\mathbf{Z}, +)$ eine Untergruppe von $\mathbf{Z}$ ist.

(3) Sei $(G, \star)$ eine endliche Gruppe, die eine gerade Anzahl von Elementen enthält. Zeigen Sie, dass es ein vom neutralen Element e verschiedenes Element a mit $a \star a = e$ gibt.

(4) Sei $\mathbf{R}^*$ die Gruppe der von 0 verschiedenen reellen Zahlen bezüglich der Multiplikation und $\mathbf{R}$ die Gruppe der reellen Zahlen bezüglich der Addition. Man prüfe, ob die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind: (Falls dies der Fall ist, beweisen Sie es, falls nicht, belegen Sie es durch ein Gegenbeispiel).

(a) $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*,\ x \mapsto x^4$.

(b) $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*,\ x \mapsto 4x$.

(c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^4$.

(d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 4x$.

(e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^*,\ x \mapsto 4^x$.