13. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06

Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;

Abgabe: Mi, 01.02.06

Aufgabe (51) Bestimmen Sie die Jordanschen Normalformen der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (52)

(a) Sei $V = \mathbb{C}^5$ und $C \in \mathbb{C}^{(5,5)}$ mit $m_C = (x-2)^2$. Welche Jordansche Normalform kann C haben?

(b) Sei $V = \mathbb{C}^8$ und $D \in \mathbb{C}^{(8,8)}$ mit $m_D = x^2(x-1)^3$. Welche Jordansche Normalform kann D haben?

Aufgabe (53) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$) und α eine Abbildung von V nach $\mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\forall v \in V$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\alpha(\lambda v) = \mid \lambda \mid \alpha(v)$

(b) $\forall v_1, v_2 \in V : \alpha(v_1 + v_2) \leq \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$

(α heißt dann Halbnorm). Zeigen Sie:

(a) $\forall v \in V : \alpha(v) \geq 0$.

(b) $\mathcal{U} = \{v \in V \mid \alpha(v) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V.

(c) wenn für $v + \mathcal{U} \in V/\mathcal{U}$ definiert wird $\| v + \mathcal{U} \| := \alpha(v)$, dann ist $\| \ \|$ eine Norm auf $V/\mathcal{U}$.

Aufgabe (54) Auf $\mathbb{C}^4$ ist das kanonische Skalarprodukt definiert durch

$$f(v, w) = \sum_{i=1}^{4} x_i \overline{y}_i \text{ für } v = (x_1, \ldots, x_4) \text{ und } w = (y_1, \ldots, y_4).$$

Sei $a_1 = (1, 0, i, 0),\ a_2 = (-1, 1, 0, -i),\ a_3 = (1, -1, 2i, i)$ und $\mathcal{U} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis von $\mathcal{U}$ und ein orthogonales Komplement von $\mathcal{U}$ in $\mathbb{C}^4$.