12. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06

Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;

Abgabe: Mi, 25.01.06

Aufgabe (47) Seien $A^i \in \mathbb{K}^{n\times n}, i \in \{0, .., r\}$, die Matrizen $A^0 = I_n, A, A^2, .., A^{r-1}$ linear un- und $A^0 = I_n, A, A^2, .., A^r$ linear abhängig, so existieren $a_0, .., a_{r-1} \in \mathbb{K}$ mit $A^r = \sum_{i=0}^{r-1} a_i A^i$.
Zeigen Sie, dass das Polynom $p = x^r - \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i$ das Minimalpolynom von A ist.

Aufgabe (48) Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ein Endomorphismus $g \in End(V)$ heißt nilpotent, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $g^k \equiv 0$.
Zeigen Sie:

(a) Ein nilpotenter Endomorphismus g besitzt 0 als einzigen Eigenwert.

(b) Für einen nilpotenten Endomorphismus g auf V gilt $g^n \equiv 0$.

(c) Hat ein Endomorphismus f auf V das charakteristische Polynom $f_g(x) = (-x)^n$, so ist g nilpotent.

Aufgabe (49) (a) Zeigen Sie, dass für eine komplexe Matrix $C \in \mathbb{C}^{(2,2)}$ gilt: $C^2 = (\text{spur } C) \cdot C - (\det C) \cdot I_2$.

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und dessen Nullstellen über $\mathbb{C}$ zu

$$B = \begin{pmatrix} i & -\frac{4}{3}i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ -1+i & \frac{1}{3}-i & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie dann (gegebenenfalls auch die komplexen) Eigenwerte und Eigenräume von B.

Aufgabe (50) Sei $V = \mathbb{R}^3$, $h \in End(V)$ und $m_h(x) = x^2 + 4x + 4$ das Minimalpolynom von h.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom f_h von h an.

(b) Begründen Sie, warum es keinen Endomorphismus $g \in End(V)$ mit Minimalpolynom $m_g(x) = x^2 + 1$ gibt.