11. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06

Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;

Abgabe: Mi, 18.01.06

Aufgabe (43) Seien g und h zwei diagonalisierbare Homomorphismen aus $End(V)$. Zeigen Sie:

Gilt $g \circ h = h \circ g$, so sind g und h „gleichzeitig diagonalisierbar ", d.h. es gibt eine Basis B von V, so dass $M_B^B(g)$ und $M_B^B(h)$ Diagonalmatrizen sind.

Aufgabe(44)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgendermaßen definierten linearen Abbildung $f \in End(V)$ bzgl. der Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$f(v_1) := \tfrac{5}{2}v_1 + 2v_2 + \tfrac{1}{2}v_3$$
$$f(v_2) := 5v_1 + 4v_2 - 2v_3$$
$$f(v_3) := \tfrac{-7}{2}v_1 - 2v_2 - \tfrac{3}{2}v_3.$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe (45) Die lineare Abbildung $h \in End(V)$ sei gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom f_h von A.

(b) Ist A diagonalähnlich? Falls ja, geben Sie eine Basis aus Eigenvektoren an.

Aufgabe (46) Zeigen Sie, dass für einen Körper $\mathbb{K}$ und beliebige Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gilt:

(a) grad $(f \circ g)$ =grad f+grad g,

(b) $\mathbb{K}[x]$ ist nullteilerfrei.