9. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06
Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;
Abgabe: Mi, 11.01.06

Aufgabe 34 Sei A eine $(m \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$ und r_{max} das maximale r mit der Eigenschaft, dass eine $(r \times r)$-Untermatrix B von A existiert mit $\det B \neq 0$.
Beweisen Sie: Rang $A = r_{max}$.

Aufgabe 35 Seien $a_1, .., a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Zeigen Sie

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Aufgabe 36 Seien v, w zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^2$ und $L \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade durch v und w. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\}.$$

Aufgabe 37 Sei A ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\dim_{\mathbb{R}} A < n$ und $p \in \mathbb{R}^n \backslash A$.
Die Menge der Punkte der Verbindungsgeraden

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = p + t(q - p), t \in \mathbb{R}, q \in A\}$$

von p zu den Vektoren q von A, vereinigt mit den Punkten des zu A parallelen Unterraumes der Dimension von A durch p heiße W.

(a) Ist W stets ein Unterraum?
(b) Ist W stets ein affiner Unterraum?
(c) Welche Dimension hat W gegebenenfalls?

Beweisen Sie Ihre Antworten.

(38⋆) (Diese Aufgabe ist freiwillig.)
Es sei $\mathbb{F}^4$ der Vektorraum der reellen Polynomabbildungen mit Maximalgrad 4, d.h. $\mathbb{F}^4 \cong \mathbb{R}^5$. Ferner sei $E = \{t^i \mid i \in \{0, .., 4\}\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{F}^4$ und $D : \mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^4$ der Differentialoperator, also $D(f) = f'$ für $f \in \mathbb{F}^4$.

1. Bestimmen Sie $M_E^E(D)$.
2. Geben Sie eine Basis B für $\mathbb{F}^4$an, so dass $M_B^B(D)$ möglichst viele Nullen und sonst nur Einsen als Einträge hat.
3. Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $M_B^E(id)$ und $M_E^B(id)$.