8. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06

Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;

Abgabe: Mi, 13.12.05

Aufgabe 30 Man zeige: Die 6 Funktionen $f_i : \begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_i(x) \end{cases}$ mit

$f_1(x) := x, \quad f_2(x) := 1 - x, \quad f_3(x) := \frac{1}{1-x},$

$f_4(x) := \frac{1}{x}, \quad f_5(x) := 1 - \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad f_6(x) := \frac{x}{1-x}$

bilden bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe.
Stellen Sie einen Zusammenhang zur Gruppe $\mathcal{S}_3$ her.

Aufgabe 31 Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -7 & 11 & 3 \\ 2 & -9 & -11 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 32 Bestimmen Sie: Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $\det(A) \neq 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & 3 & 2-a \\ a+2 & 2 & 8 & a \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -a & -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33 Sei $B = \{e_1, .., e_n\}$ die Standardbasis eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und Δ eine beliebige Determinantenform auf V. Zeigen Sie:

(a) $\det(A) = \frac{\Delta(Ae_1,..,Ae_n)}{\Delta(e_1,..,e_n)}$

(b) Sei A regulär und sei $\Delta' : V \times .. \times V \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$\Delta'(w_1, .., w_n) := \Delta(Aw_1, .., Aw_n).$$

Dann ist Δ' eine Determinantenform.

(c) Für eine beliebige Basis $B' = \{v_1, .., v_n\}$ von V gilt:

$$\frac{\Delta(Av_1, .., Av_n)}{\Delta(v_1, .., v_n)} = \frac{\Delta(Ae_1, .., Ae_n)}{\Delta(e_1, .., e_n)}.$$