7. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06

Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;

Abgabe: Mi, 7.12.05

Alle zu berechnenden Determinanten sollen mit Hilfe der Definition der Determinante berechnet werden.

Aufgabe 26 Sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ eine $n \times n$-Matrix. Dann ist

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die zu A transponierte Matrix. Zeigen Sie:

(a) Für $A, B \in K^{(n,n)}$ gilt $(AB)^t = B^t A^t$.

(b) Die Abbildung $t : K^{(n,n)} \to K^{(n,n)}$ $A \mapsto A^t$
ist ein Endomorphismus von dem K-Vektorraum $K^{(n,n)}$.

Aufgabe 27 (a) Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $f(v_i) = v_{n-i+1}$, für $i = 1, \dots n$, und sei $A = M_B^B(f)$.
Berechnen Sie $\det A$.

(b) Eine Matrix P aus $K^{(n,n)}$ heißt eine *Permutationsmatrix*, falls jedes Element von P entweder 0 oder 1 ist, und, falls in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 vorkommt.
Berechnen Sie die Determinante einer beliebigen Permutationsmatrix.

Aufgabe 28 Seien $h_1, \dots, h_r$ Transpositionen aus der symmetrischen Gruppe S_n, $n \ge 2$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach r: Hat $h_r \circ h_{r-1} \circ \dots \circ h_1$ bei der Zerlegung in disjunkte Zyklen genau r Zyklen (einschließlich Zyklen der Länge 1), so gilt:

$$r \equiv n - c \pmod 2.$$

Aufgabe 29 (a) Berechnen Sie die Determinante einer quadratischen Matrix in Zeilenstufenform:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & & & \dots & \dots & \\ \dots & & & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$ eine quadratische Matrix mit Nullmatrix 0 und quadratischen ‘Kästchen‘ $A_1, A_2, A_4 \in K^{(n,n)}$. Zeigen Sie:

$$\det\ A = \ \det\ A_1 \cdot\ \det\ A_4.$$