5. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06
Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;
Abgabe: Mi, 23.11.05

Aufgabe 17 (2 Punkte)

Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume derselben Dimension und sei $f \in \text{Hom}\,(V, W)$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) f ist injektiv.

(b) f ist surjektiv.

(c) f ist bijektiv.

Aufgabe 18 (3 Punkte)

Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, das als Lösungsraum die Ebene E durch die Punkte $P_1 = (1, 1, 1)$ $P_2 = (0, 1, 2), P_3 = (0, 0, 1)$ des 3-dimensionalen reellen affinen Raumes $AG(3, \mathbb{R})$ hat.

Aufgabe 19 (3 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionale K-Vektorraum und seien $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$. Zeigen Sie, daß es eine Linearform $f \in V^*$ gibt, so dass $f(v_1) \neq f(v_2)$.

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien $f, g \in V^*$ Linearformen.
Zeigen Sie:
Gilt Ker $f =$ Ker g, so gibt es ein $c \in K$ mit $f = cg$.

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Seien S_1, S_2 Teilmengen und U_1, U_2 Unterräume des K-Vektorraum V. Zeigen Sie:

(a) Ist $S_1 \subseteq S_2$, so gilt $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.

(b) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

(c) Ist V endlich-dimensional, so gilt: $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

(d) Ist V endlich-dimensional, so folgt aus $V = U_1 \oplus U_2$ die Aussage $V^* = U_1^\perp \oplus U_2^\perp$.