12. Übungsblatt

Abgabe: Die, 30.1.07 vor der Vorlesung in das Fach von Andrea Wiese

Aufgabe 1 **(a)** Die Multiplikation

$$[a] \cdot [b] := [ab]$$

in dem Restklassenring $\mathbf{Z}_m$ ist wohldefiniert.

(b) Konstruieren Sie den bis auf Isomorphie eindeutigen Körper der Ordung 4 und geben Sie die Multiplikations- und die Additionstafeln an.

Aufgabe 2 Zerlegen Sie $x^4 + 1$ in irreduzible Faktoren in $\mathbf{Z}_3$.

Aufgabe 3 Sei $(G, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ungerader Ordnung. Definiere $(G, \circ)$ durch $x \circ y := xy^{-1}$. Zeigen Sie, dass $L(x, y) = x \circ y$ ein Lateinisches Quadrat ist und orthogonal zu $L'(x, y) = xy$ ist.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass in jedem Körper K der Charakteristik p gilt

$$(a + b)^p = a^p + b^p \quad \text{für alle } a, b \in K,$$

wobei die Charakteristik $char(K)$ eines Körpers K die kleinste natürliche Zahl n ist, so dass 1 n-mal addiert 0 ergibt. Falls es keine solche Zahl gibt, dann ist $char(K) := 0$. Die Charakteristik eines Körpers ist entweder 0 oder eine Primzahl.
Hinweis: Benutzen Sie den Binomialsatz oder den Satz von Fermat.