11. Übung: Lineare Algebra I

Sommersemester 2005

Barbara Baumeister, Abgabe: Mo, 4.7.05

(1) Sei $V = \{(a_i)_{i\in\mathbf{N}} \mid a_i \in K\}$ der Vektorraum der Folgen. Definiere

$$S : V \to V \quad \text{durch}$$

$S(a_1, a_2, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots)$ und

$$T : V \to V \quad \text{durch}$$

$T(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$.
Zeigen Sie, $S, T \in Hom(V, V)$. Bestimmen Sie Ker S, Ker T, Im S, Im T. Welche der Abbildungen ist ein Epimorphismus, welche ein Monomorphismus?

(2) Finden Sie ein Beispiel für einen K-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $f \in Hom(V, V)$, so daß die jeweilige Situation vorliegt.

(a) Ker $f \subseteq$ Im f, Ker $f \neq \{\mathcal{O}\}$ und Im $f \neq V$.

(b) Im $f \subseteq$Ker f und Ker $f \neq V$.

(c) $V =$Ker $f \oplus$ Im f und Ker $f \neq \{\mathcal{O}\} \neq$ Im f.

(3) Bestimmen Sie, für welche $\lambda \in \mathbf{R}$ das folgende homogene Gleichungssystem mehr als eine Lösung hat. Berechnen Sie für diese λ sämtliche Lösungen.

$$\begin{array}{ccccccc}
(1+\lambda)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\
2x_1 & + & (2-\lambda)x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & (1+\lambda)x_3 & = & 0
\end{array}$$

(4) Seien V_1 und V_2 zwei K-Vektorräume. Für $A, B \in Hom(V_1, V_2)$ definiere $A + B$ durch:

$$(A + B)(v) := A(v) + B(v) \quad \text{für } v \in V_1$$

und λA für $\lambda \in K$ durch:

$$(\lambda A)(v) := \lambda A(v) \quad \text{für } v \in V_1.$$

Zeigen Sie, dass gilt

(a) $A + B \in Hom(V_1, V_2)$.

(b) $(Hom(V_1, V_2), +)$ ist eine Gruppe.

(c) $\lambda A \in Hom(V_1, V_2)$.