Prof. Dr. B. Baumeister
Dipl.-Math. Peter Knorr

WS 2009/10

Mathematik für Informatiker I - Übungsblatt 8

Abgabe bis Montag, den 7. Dezember
in die Briefkästen im Mathe-Foyer

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus:
(i) $\mathrm{ggT}(2423, 5111)$
(ii) $\mathrm{ggT}(3933, 2645)$
(iii) $\mathrm{ggT}(1001, 4477)$
und jeweils Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $u \cdot a + v \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b)$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

(i) Beweisen Sie: 10^k hat für alle $k \in \mathbb{N}$ bei Division durch 9 den Rest 1.
(ii) Jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ hat eine Darstellung $m = a_0 + a_1 \cdot 10 + .. + a_n \cdot 10^n$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, ..., 9\}$, die sogenannte *Dezimaldarstellung*.
Dann ist die *rekursive Quersumme* $Q(m)$ von m rekursiv definiert durch:

$$Q(m) := \begin{cases} a_0 + a_1 + ... + a_n, & \text{falls diese Zahl nicht größer als 9 ist,} \\ Q(a_0 + a_1 + ... + a_n), & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $Q(m) \in \{1, 2, ..., 9\}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
(iii) Beweisen Sie: Wenn m durch 9 teilbar ist, gilt $Q(m) = 9$. Sonst ist $m \equiv Q(m) \bmod 9$; das heißt, dass m bei Division durch 9 den Rest m hat.
(iv) Welche Gestalt hat $Q(m)$, wenn m durch 3 teilbar ist?

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Um eine Gleichung von Zahlen aus $\mathbb{N}$ auf Korrektheit zu überprüfen, kann man sich zunutze machen, dass dieselbe Gleichung auch dann gelten muss, wenn man statt der Zahlen auch ihre Reste bei Division durch 9 benutzt. Die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$ werden hierbei durch Additionen und Multiplikationen auf $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ersetzt. Diesen Vorgang bezeichnet man als *Neunerprobe*.

(i) Bei dieser Methode funktioniert die Division nicht in jedem Fall. Für welche Zahlen aus $\mathbb{N}$ lässt sich die Division des zugehörigen Elementes von $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ nicht durchführen?
(ii) Prüfen Sie die Rechnung $1243 \cdot (47^3 - 63)/32 = 4004135$ nach, indem Sie die Neunerprobe durchführen.
(iii) Wenden Sie die Neunerprobe auf die Rechnung $1872469717 + 568683728 = 2405351085$ an. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
In einem Ring bezeichnet man die Elemente, die ein multiplikatives Inverses besitzen, als *Einheiten*.

(i) Bestimmen Sie die Einheiten im Ring $\mathbb{Z}[i] = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$, wobei Addition und Multiplikation dieselben Operationen wie in $\mathbb{C}$ sind.
(ii) Bestimmen Sie die Einheiten im Ring $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
(iii) Fertigen Sie zu den Einheiten aus Teil (ii) eine Multiplikationstabelle an. Ist diese Menge mit der Multiplikation eine Gruppe?