Prof. Dr. B. Baumeister
Dipl.-Math. Peter Knorr

WS 2009/10

Mathematik für Informatiker I - Übungsblatt 14

Abgabe bis Montag, den 1. Februar 2010
in die Briefkästen im Mathe-Foyer

Aufgabe 1: (4 Punkte)

(i) Es gibt genau eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\varphi \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Welche Darstellungsmatrix hat φ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$?

(ii) Bestimmen Sie die Ränge der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -8 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 10 \\ 7 & 8 & 20 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

(i) Zeigen Sie:

$(A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ ist eindeutig lösbar für jedes $\vec{y} \in \mathbb{K}^n) \Leftrightarrow (A\vec{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0) \Leftrightarrow (\text{Rang} A = n)$

(ii) Seien $\text{Rang}(A) = n$ und $\vec{v_i} \in \mathbb{K}^n$ mit $A \cdot \vec{v_i} = \vec{e_i}$ für $i \in \{1 \dots n\}$.

Zeigen Sie: $A \cdot \vec{x} = b \Longleftrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \vec{v_i}$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Seien $\mathscr{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathscr{B}' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathscr{E}$ die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^3$. Ferner sei $M^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}(A)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (4 + 2 Punkte)

Für eine $n \times n$-Matrix A und $i, j \in \{1 \dots n\}$ bezeichnet $A_{i,j}$ die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Entfernung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \; A_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \; A_{2,1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Sei nun $j \in \{1 \dots n\}$. Dann ist die *Determinante* von A definiert als:

(a) $\det(A) = a$ für die 1×1-Matrix $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$

(b) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{i,j})$

Hinweis: Das Ergebnis dieser Rechnung ist für jedes $j \in \{1 \dots n\}$ dasselbe.

(i) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\det(A)$ und beweisen Sie, dass für $\det(A) \neq 0$ gilt: $\frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Sie erhalten die Einträge $a_{11}, a_{12}, \dots a_{15}, a_{21}, a_{22} \dots a_{55} \in \mathbb{R}$ einer 5×5-Matrix A als Eingabevariablen für eine Prozedur. Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Determinante von A nach der oben angegebenen rekursiven Summenformel.

(**Hinweis:** Mit „Beschreiben“ ist gemeint, dass die genauen Rechenoperationen, Ein- und Ausgabevariablen angegeben werden müssen. Vor allem muss beschrieben werden, welche Variablen an welches Unterprogramm übergeben werden sollen.)

(iii*) Implementieren Sie ein solches Programm und berechnen Sie damit die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Viel Erfolg!