Prof. Dr. B. Baumeister
Dipl.-Math. Peter Knorr

WS 2009/10

Mathematatik für Informatiker I - Übungsblatt 13

Abgabe bis Montag, den 25. Januar 2010
in die Briefkästen im Mathe-Foyer

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Konstruieren Sie einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$, sodass

(i) $Kern(\varphi) \subseteq Bild(\varphi), Kern(\varphi) \neq \{\vec{0}\}, Bild(\varphi) \neq V$.
(ii) $Kern(\varphi) \supseteq Bild(\varphi), Kern(\varphi) \neq V$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

(i) $\vec{v}$ habe die Darstellung $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis

$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$. Wie lautet die Darstellung von $\vec{v}$

bezüglich der Standardbasis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$?

(ii) Der Vektor $\vec{v}$ habe die Darstellung $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$. Welche Darstellung hat er bezüglich der Basis

$\mathbb{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$?

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Bestimmen Sie Kern und Bild folgender linearer Abbildungen:

(i) $\varphi_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, wobei $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ die Darstellungsmatrix von φ_A ist.
(ii) $V := \{p(x) \mid \text{endliches Polynom über } \mathbb{R}\}$
$\varphi : V \to V, \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=2}^{n} k \cdot (k-1) \cdot a_k x^{k-2}$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
(i) Stellen Sie die Basisvektoren der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ dar bezüglich der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
(ii) Bilden Sie die Matrix M, deren Spalten genau die bei (i) erhaltenen Vektoren sind, und multiplizieren Sie diese Matrix M mit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte*)
In $\mathbb{C}$ gibt es zu jedem Winkel α ein Element y_α, sodass für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Zahl $y_\alpha \cdot z$ denselben Abstand zum Ursprung hat wie z, und dass der Winkel zwischen z und $y_\alpha \cdot z$ gerade α ist. Mit anderen Worten: Die Multiplikation mit dem Element y_α bewirkt die Drehung des Punktes um den Winkel α.

(i) Stellen Sie $\mathrm{Re}(y_\alpha)$ und $\mathrm{Im}(y_\alpha)$ in Abhängigkeit vom Winkel α dar und führen Sie die Multiplikation $y_\alpha \cdot (a + ib)$ durch.
(ii) Man kann $\mathbb{C}$ auch als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum verstehen, wobei der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dem Element $a + ib$ entspricht. Die Visualisierungen von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind deswegen gleich.
Die in (i) geleistete Multiplikation $y_\alpha \cdot (a + ib)$ entspricht im $\mathbb{R}^2$ einer Matrix-Vektor-Multiplikation $M_\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Wie sehen die (vom Winkel α abhängigen) Einträge dieser Matrix M_α aus?