Prof. Dr. B. Baumeister
Dipl.-Math. Peter Knorr

WS 2009/10

Mathematatik für Informatiker I - Übungsblatt 12

Abgabe bis Montag, den 18. Januar 2010
in die Briefkästen im Mathe-Foyer

Aufgabe 1: (4 Punkte)

$$\mathscr{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

(i) Beweisen Sie, dass $\mathscr{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.
(ii) Ersetzen Sie wie im Austauschsatz von Steinitz zwei geeignete Vektoren aus $\mathscr{B}$ durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Rechnen Sie nach, ob folgende Abbildungen linear sind:

(i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_1 + v_2 + v_3$

(ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \vec{v} \mapsto \vec{v} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $f_3 : \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n | a_0 \ldots a_n \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$,
$p(x) \mapsto p(0)$

(iv) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_1 \cdot v_2 \cdot v_3$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V (also $|\mathscr{B}| = n$).
Sei $\mathscr{M} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann ist $\mathscr{M}$ eine Basis von V genau dann, wenn $|\mathscr{M}| = n$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Berechnen Sie die Dimensionen folgender Untervektorräume:

(i) $V_1 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \right\}$

(ii) $V_2 := \{p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ (a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}) \mid p(0) = 0\}$

(iii) $V_3 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

(iv) $V_4 := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{y} \right\}$

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte*)

Ist $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper, so heißt die kleinste natürliche Zahl p mit

$$p \cdot 1 := \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{p Summanden}} = 0$$

die Charakteristik von $\mathbb{K}$, in Zeichen $char\mathbb{K} = p$. Gibt es keine solche natürliche Zahl p, so ist die Charakteristik von $\mathbb{K}$ gleich null.

Beweisen Sie: Ist $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper, so ist $char\mathbb{K}$ eine Primzahl.