Klausur zur Linearen Algebra II

WS 2005/06

13. Februar 2006, 10.15–11.45

Vorname und Name (bitte leserlich !):

Matrikelnummer:

☐ Ich möchte einen normalen Schein.

☐ Ich möchte einen ECTS-Schein.

☐ Ich möchte einen benoteten Schein.

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Note

Bitte beachten Sie:

- Jedes abgegebene Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!
  Namen bitte leserlich in BLOCKSCHRIFT!
- (Teil-)Lösungen werden nur mit vollständigem (Teil-)Lösungsweg anerkannt.
- Erlaubte Hilfsmittel sind ein vorbereitetes DIN A4 Blatt.
- Jede Aufgabe zählt 4 Punkte; die besten 6 Aufgaben zählen. Die Klausur ist mit 12 Punkten bestanden.

Aufgabe 1 (a) Formulieren Sie den Homomorphiesatz für Vektorräume.

(b) Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und sei $h \in \text{Hom}\,(V,W)$ Beweisen Sie mit Hilfe von (a) die Formel

$$\dim V = \dim \text{Ker}\, h + \dim \text{Im}\, h.$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der linearen Abbildung

$$h : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ y \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (a) Definieren Sie das Minimalpolynom m_h zu einem Endomorphismus $h \in \text{End}\,(V)$.

(b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an m_h dafür, dass h diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4 In dem euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^4, (\,,\,))$, wobei $(\,,\,)$ das Standardskalarprodukt ist, sei der Unterraum U definiert durch die Gleichungen

$$x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Bestimmen Sie $\dim U$ und geben Sie eine Orthonormalbasis von U an.

Aufgabe 5 Sei h ein Endomorphismus des Vektorraums V mit charakteristischem Polynom $f_h = (x-3)^2(x-2)^6$ und Minimalpolynom $m_h = (x-3)^2(x-2)^3$. Bestimmen Sie die möglichen Jordanschen Normalformen von h.

Aufgabe 6 Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 7 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$, $\|\cdot\|$ eine Norm auf V und $h : V \to V$ linear. Es gelte

$$\|h(v)\| \leq \|v\| \qquad \forall v \in V.$$

Zeigen Sie $|\lambda| \leq 1$ für jeden Eigenwert von h.

Aufgabe 8 Sei $(V, (\,,\,))$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zu jedem Element $v \in V$ wird durch

$$L_v : V \to \mathbb{R} \quad L_v(w) := (v, w) \text{ für alle } \; w \in V$$

eine Linearform L_v aus V^*, dem Dualraum von V, definiert.
Beweisen Sie:
Die Abbildung

$$\Phi : V \to V^*$$
$$v \mapsto L_v$$

ist ein Isomorphismus.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Aussage $\dim V = \dim V^*$ benutzen.