Angewandte diskrete Mathematik

Wintersemester 2008/2009
Barbara Baumeister
Frederik von Heymann

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Aufgabenblatt 3

Ausgabe: 4.11.2008

Abgabe: 11.11.2008

Aufgabe 9. 4 Punkte

Beweisen Sie Satz 4.7:

Jeder lineare Code über $K = GF(q)$ mit Kontrollmatrix $H \in Mat_{r,n}(K)$, deren Spaltenzahl maximal ist bezüglich der Eigenschaft, dass je zwei Spalten linear unabhängig sind, ist äquivalent zu einem Hamming-Code.

Aufgabe 10. 4 Punkte

a) Sei C ein $[n, k, d]$-Code über K und $n \geq 2$. Beweisen Sie, dass der verkürzte Code

$$\overline{C} := \{(c_1, \ldots, c_{n-1}) \mid (c_1, \ldots, c_{n-1}, 0) \in C\} \subseteq K^{n-1}$$

die Dimension $k - 1$ oder k hat, sowie mindestens die Minimaldistanz d.

b) Weisen Sie die Existenz eines $[32, 28, 5]$- und eines $[28, 24, 5]$-Codes über dem Körper $GF(2^8)$ nach.

Hinweis zu b): Es gibt einen Reed-Solomon-Code der Länge 256 und der Dimension 252 über $GF(2^8)$.

Aufgabe 11. 4 Punkte

Definiere für $a, b \in GF(q) = K$ den Abstand $\|a - b\| = \min\{a - b, b - a\}$.

Sind $u = (u_1, \ldots, u_n)$ und $v = (v_1, \ldots, v_n)$ in K^n, so bezeichnet

$$d_L(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \|u_i - v_i\|$$

die *Lee-Distanz* von u und v. Zeigen Sie:

a) d_L definiert eine translationsinvariante Metrik auf K^n.

Bitte wenden!

b) Ist $q = 2n + 1$ und

$$C = \left\{ (c_1, \ldots, c_n) \mid c_i \in K, \sum_{i=1}^{n} i c_i \equiv 0 \mod 2n+1 \right\},$$

so liefern die Lee-Kugeln vom Radius 1 um die Codeworte $c \in C$ eine disjunkte Überdeckung von K^n. Insbesondere ist C ein perfekter 1-fehlerkorrigierender Code in der Lee-Metrik.

Aufgabe 12. 4 Punkte

Sei $K = GF(q)$ und $q = 2e^2 + 2e + 1$ mit $e \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$C = \{(c, (2e+1)c) : c \in K\} \subseteq K^2$$

ein perfekter e-korrigierender Code in der Lee-Metrik ist.