8. Übungsblatt

Aufgabe 1)

Sei $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \xi, \pi, \sigma, \tau\} \subset AG(3;\mathbb{R})$ und $\{\lambda, \mu\} \subset \mathbb{R}$

KO1 (Möglichkeit des Streckenabtragens)

Z.z.: Es existiert für alle $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset AG(3;\mathbb{R})$ genau ein $\varepsilon \in \gamma\delta^{+}$ sodass $\| \gamma - \varepsilon \| = \| \alpha - \beta \|$ gilt.

Beweis:
Sei $\varepsilon = \gamma + \lambda(\gamma - \delta)$ mit $\lambda > 0$

Existenz:
Sei nun $\lambda = \frac{\|\alpha-\beta\|}{\|\gamma-\delta\|}$, dann folgt für
$\| \gamma - \varepsilon \| = \| \gamma - (\gamma + \frac{\|\alpha-\beta\|}{\|\gamma-\delta\|}(\gamma - \delta)) \| = \frac{\|\alpha-\beta\|}{\|\gamma-\delta\|} \| \gamma - \delta \|$

Eindeutigkeit:

$$\begin{aligned}
& \| \gamma - \varepsilon \| = \| \alpha - \beta \| \\
\iff & \| \gamma - (\gamma + \lambda(\gamma - \delta)) \| = \| \alpha - \beta \| \\
\iff & \| \lambda(\gamma - \delta) \| = \| \alpha - \beta \| \\
\iff & \lambda \| \gamma - \delta \| = \| \alpha - \beta \| \\
\iff & \lambda = \frac{\|\alpha-\beta\|}{\|\gamma-\delta\|}
\end{aligned}$$

KO2 (Die Streckenkongruenz ist eine Äquivalenzrelation)

Reflexivität:
$\overline{\alpha\beta} \equiv \overline{\alpha\beta} \iff \| \alpha - \beta \| = \| \alpha - \beta \|$

Symmetrie:

$$\begin{aligned}
& \overline{\alpha\beta} \equiv \overline{\alpha\beta} \\
\iff & \| \alpha - \beta \| = \| \alpha - \beta \| \\
\iff & \| \alpha - \beta \| = | -1 | \| \alpha - \beta \| \\
\iff & \| \alpha - \beta \| = \| \beta - \alpha \| \\
\iff & \overline{\alpha\beta} \equiv \overline{\beta\alpha}
\end{aligned}$$

Transitivität:

$$\begin{aligned}
& (\overline{\alpha\beta} \equiv \overline{\gamma\delta} \vee \overline{\gamma\delta} \equiv \overline{\varepsilon\zeta}) \\
\iff & (\| \alpha - \beta \| = \| \gamma - \delta \| \vee \| \gamma - \delta \| = \| \varepsilon - \zeta \|) \\
\iff & (\| \alpha - \beta \| = \| \varepsilon - \zeta \|) \\
\iff & \overline{\alpha\beta} \equiv \overline{\varepsilon\zeta}
\end{aligned}$$

KO3 (Axiom der Streckenaddition)

Z.z.: Seien $g,h \in G$ und $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subset g, \{\delta,\varepsilon,\zeta\} \subset h$ mit $(\alpha,\beta,\gamma) \in Z_g$und $(\delta,\varepsilon,\zeta) \in Z_h$ dann folgt aus $\overline{\alpha\beta} \equiv \overline{\delta\varepsilon}$ und $\overline{\beta\gamma} \equiv \overline{\varepsilon\zeta}$ auch $\overline{\alpha\gamma} \equiv \overline{\delta\zeta}$

Beweis:
Sei $\beta = \alpha + \lambda(\gamma-\alpha), 0 < \lambda < 1$ und $\varepsilon = \delta + \mu(\zeta-\delta), 0 < \mu < 1$,
sei $\overline{\alpha\beta} \equiv \overline{\delta\varepsilon} \vee \overline{\beta\gamma} \equiv \overline{\varepsilon\zeta}$ dann folgt:

$(\| \gamma-\alpha \| = | \lambda | \| \gamma-\alpha \| + | 1-\lambda | \| \lambda-\alpha \| =$
$\| \lambda(\gamma-\alpha) \| + \| (\gamma-\alpha) - \lambda(\gamma-\alpha) \| =$
$\| \beta-\alpha \| + \| \gamma-\beta \| = \| \varepsilon-\delta \| + \| \zeta-\delta \|$
$| \mu | \| \zeta-\varepsilon \| | 1-\mu | \| \zeta-\varepsilon \| = \| \zeta-\varepsilon \|) \Longrightarrow \overline{\alpha\gamma} \equiv \overline{\delta\zeta}$

KO4 (Axiom des Winkelantragens)

Zz.: Für jeden Winkel $\angle(\beta\alpha^+, \beta\gamma^+)$, jeder Halbgeraden $\varepsilon\tau^+$ und jeder Halbebenen $\varepsilon\tau\sigma^+$ mit $\sigma \notin \varepsilon\tau^+$ existiert genau ein $\delta \in \varepsilon\tau\sigma^+$, sodass $\angle(\beta\alpha^+, \beta\gamma^+) \equiv \angle(\varepsilon\tau^+, \varepsilon\delta^+)$gilt.

Beweis:

i) *Wohldefiniertheit*
Z.z. $\angle(\alpha\beta\gamma) \equiv \angle(\xi\beta\pi)$ für alle $\xi \in \beta\alpha^+$ und $\pi \in \beta\gamma^+$
Sei $\xi = \beta + \lambda(\alpha-\beta)$, $\pi = \beta + \mu(\gamma-\beta)$, $\gamma, \mu \in \mathbb{R}^+$ dann folgt:

$$\frac{(\xi-\beta,\pi-\beta)}{\|\xi-\beta\|\|\pi-\beta\|} = \frac{(\beta+\lambda(\alpha-\beta)-\beta,\beta+\mu(\gamma-\beta)-\beta)}{\|\beta+\lambda(\alpha-\beta)-\beta\|\|\beta+\mu(\gamma-\beta)-\beta\|} =$$
$$\frac{(\lambda(\alpha-\beta),\mu(\gamma-\beta))}{\|\lambda(\alpha-\beta)\|\|\mu(\gamma-\beta)\|} = \frac{\lambda\mu(\alpha-\beta,\gamma-\beta)}{\sqrt{(\lambda(\alpha-\beta),\lambda(\alpha-\beta))(\mu(\gamma-\beta),\mu(\gamma-\beta))}} =$$
$$\frac{\lambda\mu}{\sqrt{(\lambda\mu)^2}}\frac{(\alpha-\beta,\gamma-\beta)}{\sqrt{(\alpha-\beta,\alpha-\beta)(\gamma-\beta,\gamma-\beta)}} = \frac{(\alpha-\beta,\gamma-\beta)}{\|\alpha-\beta\|\|\gamma-\beta\|}$$

Also ist die Relation unabhängig von der Wahl der Elemente auf den jeweiligen Halbgeraden.

ii) *Existenz*
Sei $\| \zeta-\varepsilon \| = \| \gamma-\beta \| \vee \| \zeta-\delta \| = \| \gamma-\alpha \| \vee \| \delta-\varepsilon \| = \| \alpha-\beta \|$
Betrachte dann:
$(\delta-\varepsilon, \zeta-\varepsilon) =$
$(\delta-\varepsilon, \zeta-\varepsilon+\delta-\delta) =$
$(\alpha-\beta, \alpha-\beta) + (\zeta-\varepsilon, \zeta-\delta-\varepsilon+\varepsilon) + (\delta-\zeta, \zeta-\delta) =$
$(\alpha-\beta, \alpha-\beta) + (\zeta-\varepsilon, \zeta-\varepsilon) + (\zeta-\varepsilon, \varepsilon-\delta) - (\gamma-\alpha, \gamma-\alpha) =$
$(\alpha-\beta, \alpha-\beta) + (\gamma-\beta, \gamma-\beta) - (\gamma-\alpha, \gamma-\alpha) - (\delta-\varepsilon, \zeta-\varepsilon)$

$\Longrightarrow (\delta-\varepsilon, \zeta-\varepsilon) = \frac{1}{2}[(\alpha-\beta, \alpha-\beta) + (\gamma-\beta, \gamma-\beta) - (\gamma-\alpha, \gamma-\alpha)]$

Analog folgt:
$(\alpha-\beta, \beta-\gamma) = \frac{1}{2}[(\alpha-\beta, \alpha-\beta)+(\gamma-\beta, \gamma-\beta)-(\gamma-\alpha, \gamma-\alpha)]$
Also gilt
$(\delta-\varepsilon, \zeta-\varepsilon) = (\alpha-\beta, \beta-\gamma)$
und daraus folgt wiederum:

$\frac{(\delta-\varepsilon, \zeta-\varepsilon)}{\|\delta-\varepsilon\|\|\zeta-\varepsilon\|} = \frac{(\alpha-\beta, \gamma-\beta)}{\|\alpha-\beta\|\|\gamma-\beta\|}$

Eindeutigkeit

Sei $\frac{(\tilde{\delta}-\varepsilon, \tilde{\zeta}-\varepsilon)}{\|\tilde{\delta}-\varepsilon\|\|\tilde{\zeta}-\varepsilon\|} = \frac{(\alpha-\beta, \gamma-\beta)}{\|\alpha-\beta\|\|\gamma-\beta\|}$ und $\delta = \varepsilon + \tilde{\lambda}(\sigma-\varepsilon) + \tilde{\mu}\left(\tilde{\zeta}-\varepsilon\right)$ mit $\tilde{\lambda} \geq 0$ da $\delta \in \varepsilon\tau\sigma^+$,

nach i) gibt es dann ein $\delta \in \varepsilon\tilde{\delta}^+$und ein $\zeta \in \varepsilon\tilde{\zeta}^+$mit

$\delta = \varepsilon + \lambda(\sigma-\varepsilon) + \mu(\zeta-\varepsilon)$ mit $\lambda \geq 0$ da $\delta \in \varepsilon\tau\sigma^+$und

$\| \zeta - \varepsilon \| = \| \gamma - \beta \|, \| \delta - \varepsilon \| = \| \alpha - \beta \|$

Dann gilt analog zur Rechnung von ii)

$\frac{(\delta-\varepsilon, \zeta-\varepsilon)}{\|\delta-\varepsilon\|\|\zeta-\varepsilon\|} = \frac{(\alpha-\beta, \gamma-\beta)}{\|\alpha-\beta\|\|\gamma-\beta\|} \Longrightarrow \| \zeta - \delta \| = \| \gamma - \alpha \|$

Dadurch ist δ eindeutig bestimmt.

iv) *Die Winkelkongruenz ist eine Äquivalenzrelation*

Analog zu KO2

KO5 Axiom der Dreieckskongruenz

Zz.: Aus $\angle(\alpha\beta\gamma) \equiv \angle(\delta\varepsilon\zeta)$, $\overline{\alpha\beta} \equiv \overline{\delta\varepsilon}$, $\overline{\gamma\beta} \equiv \overline{\zeta\varepsilon}$ folgt $\angle(\gamma\alpha\beta) \equiv \angle(\zeta\delta\varepsilon)$und $\angle(\beta\gamma\alpha) \equiv \angle(\varepsilon\zeta\delta)$
Beweis:

Sei $\angle(\alpha\beta\gamma) \equiv \angle(\delta\varepsilon\zeta)$, $\overline{\alpha\beta} \equiv \overline{\delta\varepsilon}$, $\overline{\gamma\beta} \equiv \overline{\zeta\varepsilon}$ dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\angle(\alpha\beta\gamma) \equiv \angle(\delta\varepsilon\zeta)\\
\iff &\tfrac{(\alpha-\beta,\gamma-\beta)}{\|\alpha-\beta\|\|\gamma-\beta\|} = \tfrac{(\delta-\varepsilon,\zeta-\varepsilon)}{\|\delta-\varepsilon\|\|\zeta-\varepsilon\|}\\
\iff &(\alpha-\beta, \beta-\gamma) = (\delta-\varepsilon, \zeta-\varepsilon)
\end{aligned}$$

Dann folgt für $\angle(\gamma\alpha\beta)$

$$\Bigg(\tfrac{(\gamma-\alpha,\beta-\alpha)}{\|\gamma-\alpha\|\|\beta-\alpha\|} = \tfrac{(\beta-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+\beta)}{\sqrt{(\gamma-\alpha,\gamma-\alpha)}\|\varepsilon-\delta\|} =
\tfrac{(\beta-\alpha,\gamma-\beta)+(\beta-\alpha,\beta-\alpha)}{\sqrt{(\gamma-\alpha+\beta-\beta,\gamma-\alpha+\beta-\beta)}\|\varepsilon-\delta\|} =
\tfrac{(-\delta+\varepsilon,\zeta-\varepsilon)+(\varepsilon-\delta,\varepsilon-\delta)}{\sqrt{(\gamma-\beta,\gamma-\alpha+\beta-\beta)+(-\alpha+\beta,\gamma-\alpha+\beta-\beta)}\|\varepsilon-\delta\|} =
\tfrac{(\varepsilon-\delta,\zeta-\varepsilon+\varepsilon-\delta)}{\sqrt{(\gamma-\beta,\gamma-\beta)+2(\gamma-\beta,\beta-\alpha)+(-\alpha+\beta,-\alpha+\beta)}\|\varepsilon-\delta\|} =
\tfrac{(\varepsilon-\delta,\zeta-\delta)}{\sqrt{(\zeta-\varepsilon,\zeta-\varepsilon)-2(\delta-\varepsilon,\zeta-\varepsilon)+(\varepsilon-\delta,\varepsilon-\delta)}\|\varepsilon-\delta\|} =
\tfrac{(\varepsilon-\delta,\zeta-\delta)}{\sqrt{(\zeta-\varepsilon-\delta+\varepsilon,\zeta-\varepsilon)+(\varepsilon-\delta-\zeta-\varepsilon,\varepsilon-\delta)}\|\varepsilon-\delta\|} =
\tfrac{(\varepsilon-\delta,\zeta-\delta)}{\sqrt{(\zeta-\delta,\zeta-\delta)}\|\varepsilon-\delta\|} =
\tfrac{(\zeta-\delta,\varepsilon-\delta)}{\|\zeta-\delta\|\|\varepsilon-\delta\|}\Bigg) \iff \angle(\gamma\alpha\beta) \equiv \angle(\zeta\delta\varepsilon)$$

Analog für $\angle(\beta\gamma\alpha) \equiv \angle(\varepsilon\zeta\delta)$