9. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Entwurf und Analyse von Algorithmen

(Günter Rote, Astrid Kaffanke, Christian Knauer)

Abgabe: 21. Dezember 2000

1. **Gewichtete Auswahl und gewichteter Median** (6 Punkte).

   Das *gewichtete Auswahlproblem* zum Gewicht b Für n Zahlen $x_1, \dots, x_n$ mit positiven Gewichten $w_1, \dots, w_n$ mit $W := w_1 + \dots + w_n$ $(0 \le b \le W)$ ist die Bestimmung eines Elementes x_k mit der Eigenschaft

   $$\sum_{x_i < x_k} w_i \le b \qquad \text{und} \qquad \sum_{x_i > x_k} w_i \le b.$$

   Für $b = W/2$ spricht man vom *gewichteten Median.*

   (a) Zeige, dass der Median gerade der gewichtete Median mit identischen Gewichten ist. ($w_i = w_0$ für alle $i = 1, \dots, n$.)

   (b) Wie kann man die gewichtete Auswahl von n Elementen in Zeit $O(n \log n)$ mit Hilfe eines optimalen Sortierverfahrens berechnen?

   (c) Zeige, wie man die gewichtete Auswahl aus n Elementen in Zeit $\Theta(n)$ mit Hilfe eines optimalen Medianalgorithmus berechnen kann.

   (d) *Zusatzaufgabe* Wie kann man die gewichtete Auswahl *direkt* berechnen, *ohne* auf einen Medianalgorithmus zurückzugreifen?

2. **Das Medianproblem als Standortproblem** (4 Punkte).

   Betrachte das folgendermaßen definierte Standortproblem: Gegeben sind n Punkte (Kunden) $p_1, \dots, p_n$ mit den Gewichten $w_1, \dots, w_n$. Gesucht ist ein Punkt p (als Standort für eine Fabrik oder ein Depot) der die Summe $\sum_{i=1}^{n} w_i d(p, p_i)$ minimiert. Dabei ist $d(p, p_i)$ der Abstand von p zu p_i. (p muss nicht notwendigerweise einer der p_i sein.)

   (a) Zeige, dass der gewichtete Median die Lösung für dieses Standortproblem in einer Dimension ist; dabei sind die Punkte p_i reelle Zahlen und der Abstand zwischen zwei Punkten a und b ist $d(a, b) = |a - b|$.

   (b) Finde die Lösung für das *zweidimensionale Medianproblem*, wo die Punkte in der Ebene liegen, und der Abstand zwischen zwei Punkten $a = (x_1, y_1)$ und $b = (x_2, y_2)$ der *Manhattan-Abstand* $d(a, b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ ist.

3. **MST für verschiedene Kantengewichte** (0 Punkte).

   Zeige, dass der minimal aufspannende Baum eines zusammenhängenden Graphen G eindeutig ist, wenn alle Kantengewichte verschieden sind.

4. **MST und maximale Kantenlänge** (3 Punkte).

   Zeige, dass der MST eines Graphen G für jedes Paar von Knoten i, j den Weg enthält, der die maximale Kantenlänge minimiert.

5. ***Zusatzaufgabe* Ein Ratespiel** (5 zusätzliche Punkte).

   Man soll eine positive ganze Zahl x zwischen 1 und n in möglichst wenigen Fragerunden erraten.

   Eine Fragerunde besteht dabei aus höchstens x Fragen der Form „Ist $x \leq 1000$?“, wobei statt 1000 eine beliebige Schranke stehen darf. Die Antworten auf die Fragen einer Runde werden erst gegeben, wenn der Rater alle Fragen dieser Runde gestellt hat. Es ist unzulässig, k oder mehr Fragen in einer Runde zu stellen, solange man nicht ausgeschlossen hat, dass x den Wert k hat.

   Denk dir eine möglichst gute Ratestrategie aus. Wieviele Runden (in Abhängigkeit von n) benötigst du, um x zu erraten?

   Wie ändert sich das Spiel, wenn beliebige Fragen zugelassen sind, die mit ja oder nein zu beantworten sind, zum Beispiel „Ist $x = 365$?“ oder „Ist x eine Primzahl?“ oder „Ist $x \equiv 3 \pmod 5$?“.

6. **Ackermann-Funktion** (3 Punkte).

   (a) Zeige (z. B. mit Induktion nach i):

   $$A_{i+1}(j) \geq 2^{A_i(j)}$$

   (b) Was folgt daraus für den Unterschied zwischen

   $$\alpha(n) := \min\{\, i \mid A_i(1) \geq n \,\}$$

   und

   $$\tilde{\alpha}(n) := \min\{\, i \mid A_i(1) \geq \lfloor \log_2 n \rfloor \,\}$$