5. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Entwurf und Analyse von Algorithmen

(Günter Rote, Astrid Kaffanke, Christian Knauer)

Abgabe: 23. November 2000

1. **Breitensuche** (3 Punkte).

   Zeige, dass der Algorithmus zur Breitensuche das Problem *kürzeste Wege von s zu allen anderen Knoten* für gerichtete Graphen löst, bei denen die Kantengewichte alle gleich sind.

2. **Minimieren der maximalen Kantenlänge** (5 Punkte).

   Für einen Pfad P in einem ungerichteten, gewichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Gewichtsfunktion w sei $\tilde{\mu}(P) = \max\{w(e) \mid e \in P\}$ die Länge der längsten Kante auf diesem Pfad. Für zwei Knoten $u, v \in V$ sei $\mu(u, v) = \min\{\tilde{\mu}(P) \mid P \text{ ist Pfad von } u \text{ nach } v\}$ die minimale Länge der längsten Kante auf Pfaden von u nach v.

   Gib einen effizienten Algorithmus an, der zu gegebenem Graph G und Startknoten s für alle Knoten v den Wert $\mu(s, v)$ berechnet. Zeige, dass der Algorithmus korrekt ist und analysiere seine Laufzeit.

3. **Transitive Hülle von Graphen** (4 Punkte).

   Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$. Der Graph $G^* = (V, E^*)$ ist folgendermaßen definiert: Es gibt eine Kante ij, falls in G ein Weg von i nach j existiert. G^* heißt *transitive Hülle* von G.

   Gib eine Variante des Floyd-Warshall-Algorithmus an, die zu einem Graphen G seine transitive Hülle G^* berechnet. Welcher Halbring liegt deinem Algorithmus zugrunde? Ist dieser Halbring idempotent?

4. **Dijkstras Algorithmus für ganzzahlige Kantengewichte** (4 Punkte).

   Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit der Gewichtsfunktion $w\colon E \to \{0, 1, \ldots, W-1\}$ ($W \in \mathbb{N}$). Modifiziere Dijkstras Algorithmus so, dass die kürzesten Pfade von einem Knoten $s \in V$ aus in $O(WV + E)$ Schritten berechnet werden.