13. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Entwurf und Analyse von Algorithmen

(Günter Rote, Astrid Kaffanke, Christian Knauer)

Abgabe: 1. Februar 2001

1. **Knotenüberdeckung** (4 Punkte).

   Eine *Knotenüberdeckung (vertex cover)* eines ungerichteten, ungewichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Eckenmenge $S \subset V$ mit der Eigenschaft, dass jede Kante von G zu mindestens einer Ecke aus S benachbart ist.

   Das Problem KNOTENÜBERDECKUNG ist: Gegeben ein ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbf{N}$. Entscheide, ob G eine Knotenüberdeckung S der Größe $|S| = k$ hat.

   Zeige: KNOTENÜBERDECKUNG ist NP-vollständig.

   Hinweis. Gib dazu eine polynomielle Reduktion von CLIQUE auf KNOTENÜBERDECKUNG an.

2. **Mengenüberdeckung** (4 Punkte).

   Das Problem Mengenüberdeckung (MÜ) ist definiert wie folgt.

   Gegeben: Eine Menge von endlichen Mengen $\{S_1, \ldots, S_n, X\}$ und eine Zahl $k \in \mathbf{N}$.
   Frage: Gibt es eine Mengenüberdeckung der Größe k, das heißt eine Auswahl $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ mit

   $$\bigcup_j S_{i_j} = X \quad ?$$

   Gib eine polynomielle Reduktion von KNOTENÜBERDECKUNG auf MÜ an.

   Was folgt aus den beiden vorherigen Aufgaben für MÜ?

3. **Richtig oder falsch** (2 Punkte).

   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe Deine Antwort. Falls eine Aussage falsch ist, formuliere eine ähnliche, aber richtige Aussage.

   (a) Wenn es einen polynomiellen Algorithmus für ein NP-vollständiges Problem X gibt, dann lässt sich jedes Entscheidungsproblem in polynomieller Zeit lösen.

   (b) Wenn $P = NP$ ist, dann ist jedes Entscheidungsproblem in P NP-vollständig.

4. ***Zusatzaufgabe:* 3-Färbbarkeit und SAT** (5 zusätzliche Punkte).

   In der Vorlesung wurde SAT $\leq_P$ 3-FÄRBBARKEIT gezeigt. Hier ist die Aufgabe, eine umgekehrte Reduktion 3-FÄRBBARKEIT $\leq_P$ SAT anzugeben. Benutze dafür den folgenden

Hinweis. Jedem Knoten v eines Graphen G kann man logische Variablen zuordnen. Durch die Kombination der Belegung dieser Variablen läßt sich die Farbe von v darstellen. Bei der logischen Formel muss man noch beachten, dass keine Belegungskombinationen ohne zugehörige Farbe entstehen. (Warum ist die letzte Bemerkung wichtig?)

5. ***Zusatzaufgabe:*** 2-Sat (5 zusätzliche Punkte).

   Zeige, dass 2-Sat, das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln in konjunktiver Normalform, bei denen alle Klauseln aus *höchstens zwei* Literalen bestehen, in polynomieller Zeit entscheidbar ist.

   Hinweis. Ersetze eine Klausel $c_i = l_{i1} \vee l_{i2}$ in der Formel $\varphi = \wedge_{i=1}^{n} c_i$ durch die Implikationen $\neg l_{i2} \rightarrow l_{i1}$ und $\neg l_{i1} \rightarrow l_{i2}$, und bilde daraus einen gerichteten Graphen $G_\varphi = (V, E)$ mit $V = \{\neg l_{i2}, l_{i1}, \neg l_{i1}, l_{i2} | i = 1, \ldots, n\}$ und $E = \{(\neg l_{i2}, l_{i1}), (\neg l_{i1}, l_{i2}) | i = 1, \ldots, n\}$. Zeige, dass φ erfüllbar ist genau dann wenn es in G_φ *keinen* gerichteten Kreis gibt, auf dem eine Variable x und ihre Negation $\neg x$ vorkommen.