11. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Entwurf und Analyse von Algorithmen

(Günter Rote, Astrid Kaffanke, Christian Knauer)

Abgabe: 18. Januar 2001

1. **Rekursionen** (4 Punkte).

   Gegeben sind die Funktionen t und S auf den natürlichen Zahlen, die definiert sind durch

   $$t(0) = t(1) = 0; \qquad t(n) = n - 1 + \max_{1 \le i \le n} [t(i-1) + t(n-i)]$$

   $$S(0) = S(1) = 0; \qquad S(n) = n - 1 + S(0) + S(n-1).$$

   (a) Zeige, dass $S(n) = \binom{n}{2}$ für alle $n \ge 1$.

   (b) Zeige

   $$\max_{1 \le i \le n} \left[\binom{i-1}{2} + \binom{n-i}{2} \right] = \binom{n-1}{2}.$$

   (c) Benutze (b) um zu zeigen, dass $t(n) = S(n)$ für alle $n \ge 1$.

2. **Differenzenbildung** (3 Punkte).

   Finde mit der Methode der Differenzenbildung die explizite Form für die folgende rekursiv definierte Funktion.

   $$f(1) = 1; \qquad f(n) = 1 + \frac{2}{n} \cdot (f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)).$$

3. **Rekursionsgleichungen** (4 Punkte).

   (a) Löse die folgende Rekursionsgleichung exakt:

   $$T(1) = 1$$
   $$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot T(i) \quad \text{für} \quad n > 1.$$

   (b) Zeige, dass für die durch $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$ definierte Funktion gilt: $T(n) = O(n(\log n)^2)$.

4. **Rekursionsgleichungen** (5 Punkte).

   Gib möglichst gute asymptotische Schranken für die folgenden rekursiv definierten Funktionen $T(n)$ an; dabei ist $T(n) = \Theta(1)$ für $n \leq 2$.

   (a) $T(n) = T(9n/10) + n$

   (b) $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$ für ein festes $a \geq 1$

   (c) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

   (d) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

   (e) $T(n) = T(n-1) + 1/n$

5. ***Zusatzaufgabe*** **Rekursionsgleichungen** (4 zusätzliche Punkte)

   Bestimme die exakte Laufzeit von Sortieren durch Verschmelzen durch Lösen der folgenden Rekursionsgleichung:

$$
\begin{aligned}
&T(1) = 0 \\
&T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n \quad \text{für} \quad n > 1.
\end{aligned}
$$

   Hinweis: Betrachte den binären Baum, der entsteht, wenn man n wie in der Rekursionsformel aufspaltet in $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

6. ***Zusatzaufgabe*** **Zufällige Suchbäume** (6 zusätzliche Punkte).

   Berechne für einen zufälligen binären Suchbaum mit n Knoten

   (a) die erwartete Anzahl von Blättern,

   (b) die erwartete Anzahl von Knoten mit genau einem Kind,

   (c) die erwartete Anzahl von Knoten mit genau zwei Kindern.