1. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Entwurf und Analyse von Algorithmen

(Günter Rote, Astrid Kaffanke, Christian Knauer)

Abgabe: 26. Oktober 2000

1. **O-Notation** (5 Punkte).
   (a) Zeige, daß $\log n! = \Theta(n \log n)$ ist.
   (b) Folgere daraus, daß für alle $c > 0$ gilt, $c^n = o(n!)$.
   Hinweis: Benutze einfache Abschätzungen für $n!$, wie etwa $n! < n^n$.
   (c) Vereinfache unter der Annahme $k \leq n$ den Ausdruck $O(k \log \frac{n}{k} + n)$.

2. **Nochmal O-Notation** (freiwillig).

   Ordne die folgenden Funktionen derart, daß $g_i = \Omega(g_{i+1})$ gilt; begründe jeweils kurz, warum dies so ist ($\log n = \log_2 n$):

$$(3/2)^n, (\sqrt{2})^{\log n}, \log^* n, n^2, (\log n)!, n^3,$$

$$\log^2 n, 2^{2^n}, n^{1/\log n}, n2^n, n^{\log \log n}, \ln n,$$

$$2^n, 4^{\log n}, (n+1)!, \sqrt{\log n}, n!, 2^{\sqrt{2 \log n}}, n.$$

3. **Münzwechseln** (freiwillig).

   Berechne, auf wieviele Arten man 1 DM mit (beliebig vielen) 1-, 2-, 5-, 10- und 50-Pfennigstücken wechseln kann.

   Hinweis: Überlege, auf wieviele Arten man n Pfennige wechseln kann, wenn man sich zunächst nur auf 1-Pfennigstücke, dann nur auf 1- und 2-Pfennigstücke, dann nur auf 1-,2- und 5-Pfennigstücke, usw. beschränkt.

4. **Simultane Suche nach Minimum und Maximum einer Folge** (7 Punkte).

   Finde einen Algorithmus, der simultan das Minimum und das Maximum von einer Folge S von n Elementen aus einem total geordneten Universum $\mathcal{U}$ berechnet.

   Schätze die Anzahl der von dem Algorithmus benötigten Vergleiche ab. Zur Vereinfachung kannst Du dabei annehmen, daß n eine Zweierpotenz ist.

5. **Optimale Triangulierung** (8 Punkte)

   Sei P ein konvexes Polygon in der Ebene. P kann durch eine Liste $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ seiner n Ecken, gegeben durch die Koordinaten, beschrieben werden. Der von zwei nicht benachbarten Ecken definierte Streckenabschnitt $v_i v_j$ heißt *Sehne.* Eine *Triangulierung* von P ist eine Menge T der Sehnen von P, so dass P in eine Menge von Dreiecken unterteilt wird, deren Inneres disjunkt ist. Eine *optimale Triangulierung* ist eine Triangulierung, bei der

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} f(l)$$

minimal ist. Dabei sei

(a) $\mathcal{L}$ die Menge der Sehnen einer Triangulierung und $f(l)$ die Länge der Sehne l.

(b) $\mathcal{L}$ die Menge der Sehnen einer Triangulierung und $f(l)$ die quadrierte Länge der Sehne l.

(c) $\mathcal{L}$ die Menge der Dreiecke einer Triangulierung und $f(l)$ die Fläche des Dreiecks l.

Gib einen Algorithmus an, der für jeden der Fälle eine optimale Triangulierung eines konvexen Polygons P findet. Analysiere jeweils die Laufzeit als Funktion der Anzahl der Ecken.