Analysis I und II

(hauptsächlich für Lehramtskandidaten (m/w/d))

Dirk Werner

Vorlesungsskript FU Berlin, SS 2020 und WS 2020/21

Version vom 19. März 2021

Vorbemerkung

Dies ist das Skript zu den Analysis-Vorlesungen, die ich an der FU Berlin in den letzten Jahren häufiger gehalten habe. Es handelt sich um den Analysis-Zyklus, der hauptsächlich von Lehramtskandidaten besucht wird, und vielleicht möchten etwaige Leserinnen und Leser gern wissen, was an diesem Text das Lehramtsspezifische ist.

Da der Stoff der Analysis I weitgehend kanonisiert ist, sind die Abweichungen zu anderen Texten tatsächlich recht gering. Etwas ausführlicher als in manchen Büchern werden hier ein paar schulrelevante Themen wie die Dezimalbruchentwicklung und einseitige Grenzwerte besprochen; andererseits werden schwierigere Beweise wie der über die Äquivalenz von absoluter und unbedingter Konvergenz unendlicher Reihen weggelassen. Der Zusammenhang zur Schulmathematik wurde in den Tutorien weiter thematisiert.

Ein Spezifikum des Lehramtsstudiums an der FU ist, dass manche Studierende – je nach Fächerschwerpunkt – die Analysis II erst im 7. Semester hören können. Daher ist es zwingend, eine Einführung in die Integralrechnung, die üblicherweise in der Analysis II im Detail vorgestellt wird, bereits im 1. Semester zu bringen. Dies zu gewährleisten war, zusammen mit dem Wunsch, meine Lieblingsbeispiele vorzustellen, eine der Motivationen, das $(n+1)$-te Skript zur Analysis zusammenzustellen.

Fachleute werden erkennen (und vielleicht monieren), dass der für die Mathematik typische deduktive Aufbau gelegentlich durchbrochen wird; so werden Wurzeln und Dezimalbruchentwicklung benutzt, bevor deren Existenz wasserdicht bewiesen wird. Außerdem habe ich die Diskussion der Grundlagen der reellen Zahlen bewusst niedrig gehängt, da diese Dinge in den ersten beiden Wochen des Studiums nur von den allerwenigsten Erstsemestern verstanden werden.

Noch etwas: Fehlermeldungen aller Art an `werner@math.fu-berlin.de` sind sehr willkommen!

Dirk Werner

`Version vom 19. März 2021`

Inhaltsverzeichnis

Bevor es losgeht

Wenn nach dem Diktum zweier bedeutender Denker des 19. Jahrhunderts alle Geschichte die Geschichte von Klassenkämpfen ist, so kann man alle Analysis als Analysis von Grenzprozessen beschreiben. Es ist das Verdienst verschiedener anderer Denker des 19. Jahrhunderts, unter ihnen Cauchy, Dirichlet, Riemann und Weierstraß, den dahinterstehenden Grenzwertbegriff präzise gefasst und damit die moderne Mathematik erst möglich gemacht zu haben.

Der Grenzwertbegriff ist aus der Schulmathematik inzwischen leider verbannt worden. Dort sind Sie bei der Einführung der Ableitung möglicherweise so vorgegangen. Sie betrachten eine reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann berechnen Sie die Sekantensteigung zwischen den Punkten $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ auf dem Graphen von f, nämlich

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

und lassen den Abstand zwischen x und x_0 „immer kleiner“ werden. Als „Grenzwert“ erhalten Sie

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

was als Steigung der Tangente bei $(x_0, f(x_0))$ interpretiert wird. Häufig betrachtet man an dieser Stelle auch die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

wo die herangezogenen Vergleichspunkte stets $x > x_0$ bzw. $x < x_0$ erfüllen.

In der Schulmathematik werden, wie gesagt, die Symbole $\lim_{x \to x_0}$, $\lim_{x \to x_0^+}$, $\lim_{x \to x_0^-}$ in der Regel nicht mit mathematischem Inhalt gefüllt, sondern eher ähnlich der gefühlten Temperatur im Wetterbericht wahrgenommen. Das wird in dieser Vorlesung nachgeholt, in der verschiedene Ausprägungen des Grenzwertbegriffs mit einer landläufig mathematisch genannten Präzision eingeführt werden.

Ein anderes Beispiel eines gefühlten Grenzwerts in der Schulmathematik ist das bestimmte Integral. Ausgangspunkt ist die Aufgabe, den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (der Einfachheit halber mit positiven Werten) zu bestimmen. Genauso wie die Sekanten beim Tangentenproblem Näherungslösungen sind, so entwickelt man auch hier Approximationen: Man teilt das Intervall $[a,b]$ in gleichlange Teilintervalle, sagen wir n Stück: $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, …, $[x_{n-1},x_n]$ mit $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$ für $j = 0,\ldots,n$. Anschließend errichtet man über dem j-ten Intervall das Rechteck mit der Höhe $f(x_j)$, das den Flächeninhalt $f(x_j)\frac{b-a}{n}$ hat, und summiert diese Rechtecksflächen:

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\frac{b-a}{n} = \sum_{j=1}^{n} f\Big(a + j\frac{b-a}{n}\Big)\frac{b-a}{n}.$$

Und nun lässt man n „immer größer“ werden, und als „Grenzwert“ entsteht das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f\Big(a + j\frac{b-a}{n}\Big)\frac{b-a}{n}.$$

Genau wie beim Ableitungsbegriff ist auch hier zu klären, was mit $\lim_{n\to\infty}$ eigentlich gemeint ist und für welche Funktionen der Grenzprozess wirklich zu einem endlichen Wert, dem Integral der Funktion, führt.

Fundamental zur Lösung dieser Probleme ist es, Grenzwerte von Folgen von Zahlen zu studieren. Nicht nur ist dies die einfachste Facette des Grenzwertbegriffs, alle anderen Varianten (unendliche Reihen, Grenzwerte bei Funktionen, später gleichmäßige Konvergenz bei Funktionenfolgen) lassen sich auf diese zurückführen.

Wenn man die Folge

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

betrachtet und dort n „immer größer“ werden lässt, wird man intuitiv erwarten, dass hier der „Grenzwert“ 0 vorliegt. Genauso erahnt man durch Probieren (oder mit Hilfe der Summenformel für endliche geometrische Reihen, wenn Ihnen diese bereits bekannt ist), dass sich bei

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16},\ \ldots$$

der „Grenzwert“ 2 einstellt.

Aber nicht immer erscheinen solche Dinge derart offensichtlich. Nehmen wir an, eine Bank bietet Ihnen pro Jahr 100% Zinsen auf Ihre Einlagen. (Natürlich gibt es eine solche Bank nicht, aber als Veranschaulichung sollten Sie sich auf dieses Gedankenspiel einlassen.) Nach einem Jahr werden aus 1 Euro dann $1 + 1 = 2$ Euro. Die Nachbarbank bietet ähnliche Konditionen mit einem winzigen Unterschied: Statt nach 12 Monaten 100% Zinsen zu zahlen, erhalten Sie nach je 6 Monaten 50%. Aus Ihrem Euro werden also nach 6 Monaten $1+\frac{1}{2} = 1.5$ Euro und nach weiteren 6 Monaten $(1+\frac{1}{2})\cdot 1.5 = (1+\frac{1}{2})^2 = 2.25$ Euro, was mehr ist. Wie sieht es bei der dritten Bank aus, die alle 4 Monate $33\frac{1}{3}\%$ verspricht? Hier werden aus Ihrem Euro $(1+\frac{1}{3})^3$ Euro; und rechnen wir das für die n-te Bank (alle $\frac{12}{n}$ Monate $\frac{100}{n}\%$ Zinsen) aus, so vervielfacht sich die Einlage um $(1+\frac{1}{n})^n$. Werden Sie unendlich reich, wenn n „immer größer“ wird, oder gibt es einen endlichen „Grenzwert“? Wir wollen also wissen, ob

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

existiert und, wenn ja, welchen Wert dieser Limes hat. Wie diese Fragen zu beantworten sind, werden Sie in dieser Vorlesung lernen; aber bevor wir zur Beantwortung kommen, lautet das gedankliche Problem, das Symbol $\lim_{n\to\infty}$ präzise mathematisch zu fassen.

Um hier eine befriedigende Theorie aufbauen zu können, müssen wir über der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen rechnen; die rationalen Zahlen (= Brüche) aus der Unterstufe sind dafür nicht angemessen. Betrachten Sie etwa den Graphen der durch $f(x) = x^2 - 2$ definierten Funktion. „Offensichtlich“ schneidet dieser die x-Achse, und f hat eine Nullstelle. Aber Achtung: In der 9. Klasse haben Sie gelernt (und vermutlich sogar bewiesen), dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Daher ist die „offensichtliche“ Tatsache falsch, wenn man nur rationale Zahlen kennt. Und wie steht es mit $g(x) = x^5 + x - 3$, wo man ebenfalls eine Nullstelle zu sehen meint, für die man im Gegensatz zu $\sqrt{2}$ aber keine Formel hat?

Deshalb müssen wir uns zunächst mit dem System der reellen Zahlen auseinandersetzen, damit wir schließlich die scheinbar offensichtlichen Schlussfolgerungen auch wirklich begründen können. Auch diese Begründungen fußen auf dem Grenzwertbegriff.

Also ans Werk.

Version vom 19. März 2021

Kapitel I

Die reellen Zahlen

I.1 Die natürlichen Zahlen

„Im Anfang war die Zahl“ – so hätte Doktor Faust die Analysisvorlesung begonnen, und heute soll es nicht anders geschehen. Wir nehmen den Standpunkt ein, dass wir die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen kennen; dazu mehr im nächsten Abschnitt, wo der Unterschied zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen deutlich gemacht werden soll.

Zuerst soll jedoch das System $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen etwas näher betrachtet werden. In dieser Vorlesung ist

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

und

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

(Es sei darauf hingewiesen, dass für einige Autoren auch 0 eine natürliche Zahl ist.)

Wir beginnen mit dem unmittelbar einleuchtenden (?) Induktionsprinzip.

Prinzip der vollständigen Induktion. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage über die natürlich Zahl n. Es gelte der „Induktionsanfang“ $A(1)$ sowie für jedes $n \in \mathbb{N}$ der „Induktionsschluss“*

Wenn $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

Dann trifft die Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl n zu.

Beim Induktionsschluss nennt man $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung* und $A(n+1)$ die *Induktionsbehauptung*.

Als Beispiel betrachten wir die Aussage

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{I.1.1}$$

die wir durch vollständige Induktion beweisen wollen. Dass der Induktionsanfang stimmt, sieht man, indem man auf beiden Seiten $n = 1$ einsetzt. Nehmen wir nun an, wir wüssten, dass die Formel für ein beliebiges, aber festes n richtig ist, und wir wollen sie dann für $n + 1$ beweisen. Das machen wir in der folgenden Gleichungskette:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

im vorletzten Schritt wurde die Induktionsvoraussetzung benutzt.

Es folgen weitere Beispiele, die für diese Vorlesung wichtig sind.

Satz I.1.1 (Bernoullische Ungleichung)
Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und jede natürliche Zahl n gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{I.1.2}$$

Beweis. Die Aussage $A(n)$, die für jede natürliche Zahl n durch Induktion zu beweisen ist, lautet hier: „Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ gilt (I.1.2).“ Der Induktionsanfang gilt, da für $n = 1$ auf jeder Seite der Ungleichung $1+x$ steht. Nehmen wir nun an, wir wüssten, dass die Ungleichung für ein beliebiges, aber festes n für alle $x \geq -1$ richtig ist, und wir wollen sie für $n+1$ zeigen. Dazu rechnen wir für $x \geq -1$ folgendermaßen:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

Im zweiten Schritt wurde die Induktionsvoraussetzung benutzt; beachte, dass $1 + x \geq 0$ ist und sich deswegen das Ungleichheitszeichen nicht umkehrt. □

Für den nächsten Satz benötigen wir die *Binomialkoeffizienten*. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (lies „n über k“; engl. “n choose k”) gibt an, auf wie viele Weisen man aus n Objekten k Stück auswählen kann, ohne die Reihenfolge zu beachten. Mit anderen Worten ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$. Diese Anzahl kann explizit mit Hilfe der *Fakultäten* $n!$ (lies „n Fakultät“; engl. “n factorial”) bestimmt werden. Man setzt für $n \in \mathbb{N}$

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

sowie

$$0! := 1.$$

Man beachte, dass $n!$ die Anzahl der Anordnungen einer n-elementigen Menge angibt (warum?).

Zurück zu den Binomialkoeffizienten; es gilt nun für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

die erste Formel gilt sogar für $k > n$. Zur Begründung beachten wir, dass es n Möglichkeiten gibt, das erste Element einer k-elementigen Teilmenge auszuwählen, dass es danach noch $n-1$ Möglichkeiten gibt, das zweite Element auszuwählen, dass es danach noch $n-2$ Möglichkeiten gibt, das dritte Element auszuwählen usw., bis man noch $n-k+1$ Möglichkeiten für das k-te Element hat. Das sind insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$ Möglichkeiten. Damit haben wir aber Auswahlen, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, separat gezählt; also ist diese Anzahl noch durch $k!$ zu teilen. Die zweite Gleichung folgt durch einfaches Einsetzen der Fakultäten. (Machen Sie sich klar, dass die Formel auch in den Grenzfällen $k = 0$ oder $n = 0$ stimmt, wo das verbale Argument etwas hinkt.)

Satz I.1.2 (Binomischer Satz)
Für reelle Zahlen x und y und jede natürliche Zahl n gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{I.1.3}$$

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion über n. Der Induktionsanfang stimmt, da (I.1.3) dann ja $x + y = x + y$ lautet. Nun zum Schluss von n auf $n+1$. Wir rechnen mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

In der ersten Summe wird als nächstes „umsummiert“: Statt von 0 bis n soll der Summationsindex von 1 bis $n+1$ laufen; um das zu erreichen, muss in der Summe überall $k-1$ statt k geschrieben werden, also

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k}.$$

Der Gewinn dieser Operation ist, dass jetzt in beiden Summen x und y mit den jeweils gleichen Potenzen auftauchen und zusammengefasst werden können; man muss nur beachten, dass in der (neuen) ersten Summe $k = n+1$ kein Gegenstück in der zweiten Summe hat, für die das gleiche über $k = 0$ gilt. Diese Terme werden also abgespalten:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n+1-k}\\&\quad=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{k}y^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n+1-k}\\&\quad=\binom{n}{n}x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^{k}y^{n+1-k}+\binom{n}{0}y^{n+1}\end{aligned}$$

Die beiden äußeren Binomialkoeffizienten sind jeweils 1, und für die Binomialkoeffizienten in der Summe gilt

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k};$$

dies kann man mit Hilfe der Fakultäten nachrechnen (tun Sie's!) oder sich mit Hilfe der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten klarmachen (tun Sie's!). Daher vereinfachen sich die zuletzt berechneten Terme zu

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{k}y^{n+1-k},$$

und das war zu zeigen. □

Es ist klar, dass die Variante des Induktionsprinzips, in der der Induktionsanfang für eine Zahl $N \in \mathbb{N}_0$ und der Induktionsschluss für ein beliebiges $n \geq N$ durchgeführt wird, die Gültigkeit der Aussage $A(n)$ für alle $n \geq N$ zeigt.

Manchmal ist die folgende Spielart der Induktion nützlich, in der man den Induktionsschluss durch

Wenn $A(k)$ für alle $k \leq n$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

ersetzt. Zum Beispiel kann man damit leicht die Existenz der Primfaktorzerlegung jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ begründen: Sei $A(n)$ die Aussage „n kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden“. (Dabei wird auch ein Produkt mit genau einem Faktor zugelassen.) Hier ist $A(2)$ offenbar richtig, denn 2 ist ja eine Primzahl[1]. Nehmen wir nun an, dass für eine gegebene Zahl n alle natürlichen Zahlen $2, \dots, n$ in Primfaktoren zerlegt werden können; wir müssen das auch für $n+1$ begründen. Wir unterscheiden zwei Fälle: $n+1$ ist eine Primzahl

[1] In der Zahlentheorie ist 1 definitionsgemäß *keine* Primzahl.

oder nicht. Im ersten Fall steht die Primfaktorzerlegung (mit einem einzigen Faktor) schon da. Im zweiten Fall kann man $n+1$ als Produkt zweier Zahlen schreiben, die weder 1 noch $n+1$ sind: $n+1 = k_1k_2$. Also sind k_1 und k_2 zwischen 2 und n, und nach Induktionsvoraussetzung können k_1 und k_2 beide als Primzahlprodukte geschrieben werden. Daher trifft das auch für ihr Produkt $n+1$ zu.

I.2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Wie gesagt, nehmen wir die reellen Zahlen und ihre Rechengesetze als gegeben an. Der Vollständigkeit halber sollen diese noch einmal aufgezählt werden; im Folgenden sind x, y, z reelle Zahlen:

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= x+(y+z) \\
x+y &= y+x \\
0+x &= x \\
x+(-x) &= 0 \\
(x\cdot y)\cdot z &= x\cdot(y\cdot z) \\
x\cdot y &= y\cdot x \\
1\cdot x &= x \\
x\cdot\frac{1}{x} &= 1 \quad \text{für } x\neq 0 \\
x\cdot(y+z) &= x\cdot y + x\cdot z
\end{aligned}$$

Hier findet man in der 1. und 5. Zeile das Assoziativgesetz der Addition bzw. Multiplikation, in der 2. und 6. Zeile das Kommutativgesetz der Addition bzw. Multiplikation, die 3. und 7. Zeile beschreiben die Sonderrolle der 0 bzw. 1 als neutrale Elemente der Addition bzw. Multiplikation, die 4. bzw. 8. Zeile regelt die Existenz des additiv bzw. multiplikativ inversen Elements, und schließlich steht in der letzten Zeile das Distributivgesetz. Die Existenz des Inversen sollte ausführlicher so formuliert werden: Zu jeder reellen Zahl x existiert genau eine, mit $-x$ bezeichnete, reelle Zahl, so dass $x+(-x)=0$ gilt; und zu jeder reellen Zahl $x\neq 0$ existiert genau eine, mit $\frac{1}{x}$ bezeichnete, reelle Zahl, so dass $x\cdot\frac{1}{x}=1$ gilt. In der Linearen Algebra lernt man, dass durch diese 9 Gesetze ein *Körper* definiert wird[2].

Zusätzlich können reelle Zahlen der Größe nach verglichen werden; für je zwei reelle Zahlen x und y gilt genau eine der Beziehungen $x<y$, $x=y$ oder $x>y$, und die Relation ist transitiv:

$$x>y,\ y>z \quad\Rightarrow\quad x>z.$$

[2] Bei der abstrakten Definition eines Körpers kommt noch die Forderung hinzu, dass $0\neq 1$ ist.

Die Ordnungsrelation wechselwirkt mit den algebraischen Operationen:

$$x > 0,\ y > 0 \quad \Rightarrow \quad x + y > 0 \text{ und } x \cdot y > 0.$$

Man spricht von einem *angeordneten Körper*.

Diese primitiven Gesetze sollen hier nicht weiter problematisiert werden, und im Abschnitt I.1 haben wir ja auch schon ausgiebig davon Gebrauch gemacht. Alle weiteren Rechengesetze wie $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ oder „minus mal minus ergibt plus“ lassen sich aus diesen Grundgesetzen herleiten.

Auch $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper. In der Vorstellung auf der Zahlengeraden besitzt $\mathbb{Q}$ gewisse „Löcher“, z.B. $\sqrt{2}$ (siehe unten), $\mathbb{R}$ hat jedoch keine Löcher und ist „vollständig“. Das soll jetzt präzisiert werden. Zunächst halten wir fest:

Satz I.2.1 *$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; genauer: Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.*

Beweis. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir also an, dass es doch eine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ gibt. Wegen $x^2 = (-x)^2$ [warum eigentlich?] dürfen wir dann auch $x > 0$ annehmen, und die positive rationale Zahl x kann als gekürzter (!) Bruch $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ geschrieben werden. Dann folgt $(\frac{p}{q})^2 = 2$ und deshalb $p^2 = 2q^2$; p^2 ist also gerade. Dann ist auch p gerade: Wäre nämlich $p = 2m - 1$ ungerade, wäre auch $p^2 = 2(2m^2 - 2m) + 1$ ungerade. Schreiben wir also $p = 2r$; es folgt $2q^2 = p^2 = 4r^2$, und auch $q^2 = 2r^2$ ist gerade. Wie soeben gezeigt, muss q ebenfalls gerade sein. Damit haben wir einen Widerspruch gefunden: p und q haben beide den Teiler 2, obwohl sie teilerfremd waren. □

Hier haben wir einen *Widerspruchsbeweis* geführt; formal sieht das so aus: Um die Implikation zweier Aussagen, also A $\Rightarrow$ B, zu zeigen, nimmt man an, dass A gilt, aber B nicht. In (meist) mehreren Schritten (die beliebig kompliziert werden können) versucht man dann, einen Widerspruch zu einer bekannten Aussage abzuleiten; in Kurzfassung

$$\text{A und nicht B} \ \Rightarrow \ 0 = 1.$$

Davon zu unterscheiden ist der *Beweis durch Kontraposition*; hier zeigt man statt A $\Rightarrow$ B

$$\text{nicht B} \ \Rightarrow \ \text{nicht A}.$$

Der Unterschied zum Widerspruchsbeweis ist, dass man die Voraussetzung A gar nicht benutzt. (Im Beweis von Satz I.2.1 haben wir diese Argumentationsstrategie in der Mitte verwandt; dort war A „p^2 ist gerade“ und B „p ist gerade“.)

Zurück zu den nicht vorhandenen „Löchern“ von $\mathbb{R}$. Um dies genauer zu fassen, gehen wir von der Vorstellung aus, dass sich zwischen zwei Teilmengen von

$\mathbb{R}$, von denen eine links von der anderen liegt, immer eine reelle Zahl befindet. (Beachte, dass in $\mathbb{Q}$ wegen Satz I.2.1 zwischen $A = \{a \in \mathbb{Q}\colon a > 0,\ a^2 < 2\}$ und $B = \{b \in \mathbb{Q}\colon b > 0,\ b^2 > 2\}$ die Lücke $\sqrt{2}$ klafft.) Wir präzisieren diese Vorstellung so:

Lückenlosigkeit von $\mathbb{R}$. *Seien A und B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Es gelte $a \leq b$ für alle $a \in A$, $b \in B$. Dann existiert eine reelle Zahl s mit*

$$a \leq s \leq b \quad \textit{für alle } a \in A,\ b \in B.$$

Auf dieses fundamentale Prinzip werden sich alle Existenzsätze der Analysis (wie z.B. diese Sorte Gleichung hat eine Lösung, diese Sorte Funktion nimmt ihr Maximum an, etc.) im Endeffekt zurückführen lassen.

Als erste Anwendung des Prinzips der Lückenlosigkeit zeigen wir die *Ordnungsvollständigkeit* von $\mathbb{R}$. Dazu brauchen wir einige Vokabeln. Eine Teilmenge[3] $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x \leq K \quad \text{für alle } x \in M.$$

Jede solche Zahl K heißt *obere Schranke* von M. Wenn K eine obere Schranke ist, ist klarerweise auch jedes $K' > K$ eine obere Schranke von M. Die kleinste obere Schranke (wenn es sie denn gibt, was a priori nicht klar ist[4]) heißt *Supremum* von M und wird mit $\sup M$ bezeichnet. (Es ist klar, dass die kleinste obere Schranke eindeutig bestimmt ist – zeigen Sie's!) Analog heißt eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ *nach unten beschränkt*, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x \geq k \quad \text{für alle } x \in M.$$

Jede solche Zahl k heißt *untere Schranke* von M. Wenn k eine untere Schranke ist, ist klarerweise auch jedes $k' < k$ eine untere Schranke von M. Die größte untere Schranke (wenn es sie denn gibt) heißt *Infimum* von M und wird mit $\inf M$ bezeichnet. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Als einfaches Beispiel betrachte $M = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 \leq x < 1\}$. Hier ist 0 eine untere Schranke und 1 eine obere Schranke. Tatsächlich gilt sogar $0 = \inf M$ und $1 = \sup M$. Ersteres ist klar, da ja $0 \in M$. Nun zum Supremum; es ist zu argumentieren, dass keine Zahl $s < 1$ eine obere Schranke von M ist, so dass 1 wirklich die kleinste obere Schranke ist. In der Tat ist für $s < 0$ die Zahl $x = 0$ ein Element von M, das größer als s ist, und für $0 \leq s < 1$ ist $x = \frac{s+1}{2}$ solch eine Zahl.

Die fundamentale Eigenschaft der reellen Zahlen, die sie von den rationalen unterscheidet, kann nun so ausgesprochen werden:

[3] In dieser Vorlesung bedeutet das Symbol $\subset$ das Enthaltensein unter Einschluss der Gleichheit, z.B. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$. Um die echte Inklusion anzudeuten, wird das Symbol $\subsetneq$ verwandt.

[4] Können Sie entscheiden, ob die Menge $\{1, 1+\frac{1}{8}, 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}, 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}, \dots\}$ eine kleinste obere Schranke besitzt?

Satz I.2.2 (Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$) *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum, und jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.*

Beachte, dass nicht behauptet ist, dass Supremum oder Infimum zur betrachteten Menge gehören.

Beweis. Wir beweisen die Existenz des Supremums; führen Sie zur Übung den analogen Beweis für die Existenz des Infimums.

Sei A eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Sei B die Menge aller oberen Schranken von A; da A nach oben beschränkt ist, ist $B \neq \emptyset$. Ferner gilt nach Definition einer oberen Schranke $a \leq b$ für alle $a \in A$, $b \in B$. Das Prinzip der Lückenlosigkeit ist also auf A und B anwendbar, und es liefert eine reelle Zahl s mit

$$a \leq s \leq b \quad \text{für alle } a \in A,\ b \in B.$$

Hier zeigt die erste Ungleichung, dass s eine obere Schranke von A ist, und die zweite Ungleichung zeigt, dass es sich um die kleinste obere Schranke handelt. Daher ist $s = \sup A$. □

Das Prinzip der Lückenlosigkeit bzw. die Ordnungsvollständigkeit garantieren, dass alle Zahlen, die „existieren sollten", auch wirklich existieren. (Natürlich kann man nicht erwarten, dass eine Zahl, die $x + 1 = x - 1$ erfüllt, existiert.) Zeigen wir das am Beispiel von $\sqrt{2}$.

Satz I.2.3 *Es gibt genau eine positive reelle Zahl x mit $x^2 = 2$.*

Der Beweis dieser für Außenstehende selbstverständlichen Tatsache aus dem Prinzip der Ordnungsvollständigkeit ist erstaunlich komplex[5]; später (Satz III.2.3) wird uns das Resultat auf andere Weise in den Schoß fallen. Man sollte den Satz jedoch nicht auf die leichte Schulter nehmen, denn was ist mit $\sqrt{\pi}$, $\sqrt[17]{e}$, $\pi^{\sqrt{2}}$ etc.: Existieren diese reellen Zahlen wirklich? Und was ist $\pi^{\sqrt{2}}$ überhaupt?

Beweis. Wir benutzen fortwährend den Schluss

$$a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 > b^2; \tag{I.2.1}$$

denn $a^2 > ab > b^2$.

Setze

$$A = \{a \in \mathbb{R}\colon a > 0,\ a^2 \leq 2\}, \quad B = \{b \in \mathbb{R}\colon b > 0,\ b^2 \geq 2\}.$$

[5] Das Problem ist, an dieser Stelle einen Beweis zu führen, ohne das Wort „Wurzelfunktion" in den Mund zu nehmen.

Wir beobachten, dass A und B nicht leer sind (z.B. ist $1 \in A$, $2 \in B$), und A ist nach oben und B nach unten beschränkt; aus (I.2.1) folgt nämlich (wie?) $a \leq b$ für alle $a \in A$, $b \in B$. Deshalb existieren die reellen Zahlen

$$\alpha := \sup A, \quad \beta := \inf B,$$

und es gilt $0 < \alpha \leq \beta$. Um das einzusehen, bemerke, dass jedes $b \in B$ eine obere Schranke von A ist; für die kleinste obere Schranke $\alpha = \sup A$ gilt also $\alpha \leq b$ für alle $b \in B$. Das wiederum bedeutet, dass α eine untere Schranke von B ist, und für die größte untere Schranke $\beta = \inf B$ folgt also $\alpha \leq \beta$.

Unser Ziel ist es nun,

$$\alpha^2 = \beta^2 = 2$$

zu beweisen. Wir zeigen zuerst, dass $\alpha^2 \geq 2$ ist. Wäre nämlich $\alpha^2 < 2$, so könnte man mit folgendem Argument eine reelle Zahl $\delta > 0$ finden, so dass $(\alpha+\delta)^2 < 2$ ist: Setze $\varepsilon = 2 - \alpha^2 > 0$. Es ist $(\alpha + \delta)^2 < 2$ genau dann, wenn $2\alpha\delta + \delta^2 < \varepsilon$, und ist $0 < \delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$, so ist diese Ungleichung wegen $2\alpha\delta + \delta^2 < 4\delta + \delta < \varepsilon$ erfüllt (im ersten Schritt haben wir $\alpha \leq \beta \leq 2$ nebst $0 < \delta < 1$ und im zweiten $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$ benutzt[6]). Mit dieser Wahl von δ ist also $(\alpha + \delta)^2 < 2$, d.h. $\alpha + \delta \in A$, was der Eigenschaft von α, obere Schranke von A zu sein, widerspricht.

Also ist $\alpha^2 \geq 2$, und ein analoges Argument zeigt $\beta^2 \leq 2$ (führen Sie es aus!). Wegen $0 < \alpha \leq \beta$ folgt insgesamt

$$2 \leq \alpha^2 \leq \beta^2 \leq 2,$$

wie gewünscht.

Schließlich zeigt eine Anwendung von (I.2.1), dass es höchstens eine positive Zahl gibt, deren Quadrat 2 ist, und Satz I.2.3 ist vollständig bewiesen. □

Das obige Argument kann zu der Aussage ausgebaut werden, dass jede positive reelle Zahl c eine eindeutig bestimmte positive n-te Wurzel $\sqrt[n]{c}$ besitzt.

Nun etwas zur Lage von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Satz I.2.4 *Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt sowohl eine rationale als auch eine irrationale Zahl.*

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Ist $x < 0 < y$, liegt die rationale Zahl 0 und für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ die irrationale Zahl $\frac{\sqrt{2}}{n}$ zwischen x und y, nämlich wenn $n > \frac{\sqrt{2}}{y}$ ist. Ist $0 \leq x < y$, setze $d = y - x$ und wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \frac{1}{d}$. Ist dann $n = \max\{\nu \in \mathbb{N}_0 \colon \frac{\nu}{m} \leq x\}$, so liegt die rationale Zahl $\frac{n+1}{m}$ zwischen x und y: Nach Konstruktion ist ja $\frac{n}{m} \leq x$, aber $\frac{n+1}{m} > x$ sowie

$$\frac{n+1}{m} \leq x + \frac{1}{m} < x + d = y.$$

[6] Die Minimumbildung ist eigentlich überflüssig, da ja $\varepsilon = 2 - \alpha^2 \leq 2$ und deswegen $\frac{\varepsilon}{5} < 1$ ist. Es hätte also gereicht, $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{5}$ zu schreiben.

Analog gilt für $n' = \max\{\nu \in \mathbb{N}_0\colon \frac{\nu}{m\sqrt{2}} \le x\}$, dass die irrationale (!) Zahl $\frac{n'+1}{m\sqrt{2}}$ zwischen x und y liegt (Beweis?). Ist schließlich $x < y \le 0$, so wissen wir bereits, dass sowohl eine rationale Zahl r als auch eine irrationale Zahl s zwischen $-y$ und $-x$ liegen. Die rationale Zahl $-r$ bzw. die irrationale Zahl $-s$ liegt dann zwischen x und y. $\square$

Man drückt den Sachverhalt von Satz I.2.4 so aus, dass sowohl $\mathbb{Q}$ als auch sein Komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \notin \mathbb{Q}\}$ *dicht* in $\mathbb{R}$ liegen.

Aus Satz I.2.4 könnte man den fehlerhaften (!) Schluss ziehen, dass es gleich viele rationale wie irrationale Zahlen gibt. Das stimmt aber nicht! Um das zu präzisieren, brauchen wir wieder ein paar Vokabeln.

Seien A und B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Funktion. Dann heißt f

- *injektiv*, wenn aus $f(x) = f(y)$ stets $x = y$ folgt,
- *surjektiv*, wenn zu jedem $z \in B$ mindestens ein $x \in A$ mit $f(x) = z$ existiert,
- *bijektiv*, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Mit anderen Worten ist f bijektiv, wenn zu jedem $z \in B$ genau ein $x \in A$ mit $f(x) = z$ existiert. Eine bijektive Funktion $f\colon A \to B$ identifiziert also die Elemente von A mit den Elementen von B; es gibt daher „genauso viele" Elemente in A wie in B.

Eine Menge A heißt *abzählbar unendlich*, wenn es eine bijektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to A$ gibt; die Elemente von A können also aufgezählt werden:

$$A = \{f(1), f(2), f(3), \dots\}.$$

Eine unendliche Menge, die nicht abzählbar unendlich ist, heißt *überabzählbar*.

Zum Beispiel ist die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen abzählbar unendlich, da

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\};$$

es ist nicht schwer, explizit eine bijektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ hinzuschreiben (tun Sie's!).

Überraschender ist der folgende Satz von Cantor.

Satz I.2.5 $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar unendlich.*

Beweis. Zuerst zählen wir $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q}\colon x > 0\}$ ab. Dazu schreiben wir die Elemente von $\mathbb{Q}^+$, also die Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, in ein unendliches quadratisches

Schema:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

Dieses Schema durchlaufen wir entlang der Nebendiagonalen:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{6}{1}, \dots$$

Streicht man Zahlen, die in dieser Liste mehrfach vorkommen, entsteht die Folge

$$1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{5}, 6, \dots,$$

woraus sich eine bijektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ ergibt; z.B. ist $f(3) = \frac{1}{2}$, $f(8) = \frac{2}{3}$ etc.

Daher ist auch $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q}\colon x < 0\}$ abzählbar unendlich; denn ist $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ bijektiv, so auch $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^-$, $g(n) = -f(n)$.

Schließlich ist dann auch $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ abzählbar unendlich, denn

$$\mathbb{Q} = \{0, f(1), g(1), f(2), g(2), \dots\},$$

vgl. die Abzählung von $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$. □

Hingegen gilt folgender Satz über $\mathbb{R}$, der ebenfalls von Cantor stammt.

Satz I.2.6 $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, $\mathbb{R}$ wäre abzählbar unendlich. Dann wäre auch das Intervall $I = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < x < 1\}$ abzählbar unendlich. Das bedeutet, dass die Elemente von I in einer Liste aufgezählt werden können:

$$I = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Wir schreiben jedes $x_k \in I$ als Dezimalbruch (Dezimalbrüche werden wir in Abschnitt II.5 genauer ansehen):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir bilden jetzt die reelle Zahl $y \in I$ mit der Dezimalbruchentwicklung

$$y = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots$$

mit $b_k = 3$, wenn $a_{kk} > 5$, und $b_k = 7$, wenn $a_{kk} \leq 5$. Die k-te Ziffer von y ist also von der k-ten Ziffer von x_k verschieden; daraus möchten wir $y \neq x_k$ schließen. Nun ist die Dezimalbruchentwicklung einer reellen Zahl nicht immer eindeutig; ein abbrechender Dezimalbruch wie 0.25 kann auch als $0.249999\ldots$ geschrieben werden. Dies ist jedoch die einzige Mehrdeutigkeit, wie in Satz II.5.2 gezeigt wird. Deshalb ist wirklich $y \neq x_k$ für alle k.

Die Zahl y kann also in der obigen Liste nicht vorkommen, und wir haben gezeigt, dass es keine bijektive Funktion von $\mathbb{N}$ auf I gibt. Deswegen ist I überabzählbar. □

Abschließend noch eine Bemerkung zu den Grundlagen der reellen und natürlichen Zahlen. Wir haben schon mehrfach einen Schluss von der Preislage „Wähle eine natürliche Zahl n mit $ny > \sqrt{2}$“ gemacht (siehe den Beweis von Satz I.2.4). Dass das geht, ist in unserer naiven Vorstellung der reellen Zahlen klar. Es ist jedoch der Definition eines angeordneten Körpers nicht in die Wiege gelegt; entsprechende Gegenbeispiele von „seltsamen“ angeordneten Körpern lernt man in der Algebra kennen. Mit der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ lässt sich dieser Schluss jedoch wasserdicht begründen.

Satz I.2.7 *Sind reelle Zahlen $x, y > 0$ gegeben, so existiert eine natürliche Zahl n mit $ny > x$.*

Beweis. Wenn es so ein n nicht gäbe, wäre die Menge $M = \{my\colon m \in \mathbb{N}\}$ nach oben durch x beschränkt. Wegen der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert dann $s = \sup M$. Wir werden zeigen, dass auch $s - y$ eine obere Schranke von M ist: Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $(m+1)y \in M$ und deshalb $(m+1)y \leq s$, d.h. $my \leq s - y$. Da m beliebig war, ist $s - y$ eine obere Schranke von M. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass s die kleinste obere Schranke war. □

Die in Satz I.2.7 beschriebene Eigenschaft drückt man so aus, dass $\mathbb{R}$ *archimedisch angeordnet* ist.

Man stellt sich eine reelle Zahl fast immer als Dezimalbruch vor (wie im Beweis von Satz I.2.6) – das werden wir jedoch erst später genau begründen (Satz II.5.1). Der Witz bei Satz I.2.7 ist, dass der Beweis eben nicht von einer Darstellung der reellen Zahlen ausgeht, sondern nur ganz grundlegende Dinge benutzt.

Bei den rationalen Zahlen hat man definitionsgemäß eine Darstellung, nämlich $\frac{p}{q}$; was $\mathbb{R}$ angeht, haben wir aber gar nicht genau gesagt, was eine reelle Zahl ist, sondern nur, was man mit ihr macht (addieren, multiplizieren, vergleichen).

Kapitel II

Konvergenz

II.1 Konvergente Folgen

Der Begriff des Grenzwerts ist der zentrale Begriff der Analysis überhaupt. Bevor wir ihn systematisch entwickeln, werfen wir einen Blick in die formalen Rechenmethoden des 18. Jahrhunderts, die zwar auf zum Teil atemberaubende Weise korrekte Resultate, aber auch nicht haltbare Schlüsse produziert haben.

Sei $q \in \mathbb{R}$. Um den Wert der Summe

$$s = 1 + q + q^2 + \cdots$$

zu bestimmen, könnte man zuerst

$$qs = q + q^2 + q^3 + \cdots$$

betrachten und anschließend

$$s - qs = (1 + q + q^2 + \cdots) - (q + q^2 + q^3 + \cdots) = 1$$

rechnen. Es ist also

$$1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \tag{II.1.1}$$

wenn $q \neq 1$ ist. Setzen wir jetzt $q = \frac{1}{2}$, so wird $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$: das sieht vernünftig aus, wenn man mit der endlichen Summe $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ (Beweis durch vollständige Induktion!) vergleicht. Setzt man jedoch $q = -1$, so erhält man die merkwürdige Formel $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \frac{1}{2}$; vollends seltsam wird es, wenn man $q = 2$ einsetzt, dann behauptet die Formel (II.1.1) nämlich $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$.

Welchen dieser Berechnungen kann man nun trauen? Das lässt sich nur beantworten, wenn man einen Begriff der Dinge hat; man muss zunächst einem Symbol wie $1 + q + q^2 + \cdots$ eine inhaltliche Bedeutung zuweisen. (Das Problem besteht natürlich in den Pünktchen.) Das geschieht mit dem mathematischen Grenzwertbegriff; auf dieser Grundlage werden wir erklären, was die linke Seite in (II.1.1) bedeutet und dass man in der Tat nur Werte von q zwischen -1 und 1 zulassen darf (vgl. Satz II.3.2).

Wir beginnen den Aufbau der Grenzwerttheorie mit konvergenten Folgen. Eine Folge von Zahlen schreiben wir als

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots);$$

genau genommen ist eine Zahlenfolge nichts anderes als eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, nur schreiben wir a_n statt $f(n)$. Zum Beispiel sind $(\frac{1}{n})$ und (2^n) Folgen reeller Zahlen. Manchmal kann es auch praktisch sein, eine Folge bei einem anderen Startindex $N \in \mathbb{N}_0$ beginnen zu lassen, z.B. $(\frac{1}{n^2-1})_{n\geq 2}$.

Weitere Beispiele für Folgen, von denen wir einige demnächst untersuchen werden, sind:

- $(a_n) = (c, c, c, c, \dots)$, eine konstante Folge. Das ist zwar ein sehr einfaches (im Jargon „triviales“) Beispiel, aber gerade deswegen wichtig.
- $(a_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$.
- $(a_n) = ((1 + 1/n)^n)$, siehe das Vorspiel zur Vorlesung.
- $a_n =$ Nachkommaanteil von $n\sqrt{2}$, also $a_1 = 0.41421\dots$, $a_2 = 0.82842\dots$, $a_3 = 0.24264\dots$, $a_4 = 0.65685\dots$, ….
- Hier ist ein Beispiel einer *rekursiv definierten* Folge: $a_0 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + 2/a_{n-1})$ für $n \geq 1$.

Hier kommt die wichtigste Definition der gesamten Vorlesung.

Definition II.1.1 Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt *konvergent* mit *Grenzwert* a, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \qquad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{II.1.2}$$

In diesem Fall schreibt man $a_n \to a$. Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt *Nullfolge*. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Wir haben hier die Symbolschreibweise mit den Quantoren $\forall$ („für alle“) und $\exists$ („es existiert“) benutzt. Ferner sei an den *Betrag* $|x|$ einer reellen Zahl x erinnert; es ist

$$|x| = x \quad \text{für } x \geq 0, \qquad |x| = -x \quad \text{für } x < 0.$$

Wichtig ist (und ständig benutzt werden wird) die *Dreiecksungleichung*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(Beweis?) sowie die Multiplikativität

$$|xy| = |x||y|$$

(Beweis?), jeweils für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Auch die *umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

ist von Belang. Um sie einzusehen, verwenden wir die Dreiecksungleichung mit $x-y$ statt x und erhalten $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$, was $|x|-|y| \leq |x-y|$ impliziert. Durch Vertauschen der Rollen von x und y ergibt sich die analoge Ungleichung $|y| - |x| \leq |x - y|$ und damit die umgekehrte Dreiecksungleichung.

Die Zahl $|x - y|$ kann als Abstand von x und y aufgefasst werden.

Statt der Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ in (II.1.2) kann man auch

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \qquad -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

schreiben; übersetzen wir dies in natürliche Sprache, lautet die Zeile so: „Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n_0, so dass für alle Indices $n \geq n_0$ die Ungleichung $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ gilt.“ (Man merkt vielleicht, dass die Quantorenschreibweise deutlich übersichtlicher ist, aber bei Novizen könnte eine solche Übersetzung hilfreich sein.)

Es ist unabdingbar, dass Sie die intuitive Bedeutung von Definition II.1.1 erfassen; eine Version ist: „Wenn man lange genug wartet, kommt a_n dem Wert a sehr nahe – so nahe, wie man möchte.“ Definition II.1.1 präzisiert, was „sehr nahe“ und „lange genug“ bedeuten. Es ist andererseits unabdingbar, dass Sie in der Lage sind, ein intuitives Vorverständnis in präzise mathematische Begriffe und Schlüsse zu übersetzen! Diese werden Sie in diesem Kapitel kennen lernen.

Statt $a_n \to a$ schreibt man auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Dazu muss man sich aber überlegen, dass eine konvergente Folge nicht zwei verschiedene Grenzwerte haben kann. Was wäre, wenn $a \neq b$ beides Grenzwerte von (a_n) wären? Dann überprüfen wir Definition II.1.1 sowohl für a als auch für b, und zwar mit $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b| > 0$. Einerseits existiert dann ein n_0 mit $|a_n-a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$, andererseits ein n_0' mit $|a_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq n_0'$. Ist nun n die größere der beiden Zahlen n_0 und n_0', so gelten beide Ungleichungen für dieses n. Daraus folgt

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|,$$

also $|a - b| < |a - b|$, was ein Widerspruch ist.

Beispiele II.1.2 (o) Unser nulltes Beispiel ist die konstante Folge $(a_n) = (c, c, c, \dots)$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. (Denn in (II.1.2) kann man für jedes

$\varepsilon > 0$ den Index $n_0 = 1$ wählen. Jedes andere n_0 würde es in diesem Beispiel auch tun!)

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Dazu ist zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \qquad \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

und das klappt, wenn man n_0 so wählt, dass $n_0\varepsilon > 1$, also $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ist. (Vgl. dazu Satz I.2.7.)

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$. Dazu ist zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \qquad \frac{n^2}{n^3+1} < \varepsilon.$$

Nun kann man beobachten, dass stets

$$\frac{n^2}{n^3+1} < \frac{1}{n}$$

gilt. Das heißt, dass jedes n_0, das in Beispiel (a) funktioniert, auch hier klappt.

(c) Sei $|q| < 1$; dann gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Wir schreiben nämlich $\frac{1}{|q|}$ (> 1) als $1 + x$ mit $x > 0$ und schätzen mit der Bernoullischen Ungleichung, Satz I.1.1, ab:

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx}.$$

Daraus liest man ab, dass die Zielungleichung $|q|^n < \varepsilon$ aus (II.1.2) garantiert dann erfüllt ist, wenn $\frac{1}{nx} < \varepsilon$ ist. Wenn also zu $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 > \frac{1}{x\varepsilon}$ gewählt wird, gilt $|q^n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. (Dass $|q^n| < \varepsilon$ möglicherweise auch noch für andere n erfüllt ist, tut nichts zur Sache – man muss nur sicherstellen, dass die Ungleichung ab einem gewissen n_0 gilt, aber man braucht nicht das kleinste n_0 zu finden.)

Im Fall $|q| \geq 1$ ist (q^n) keine Nullfolge. In Beispiel (g) besprechen wir den Fall $q = -1$, und im Fall $q = 1$ ist $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$ nach (o). Im Fall $|q| > 1$ liegt Divergenz vor, wie aus Satz II.1.3 unten folgt.

(d) $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$, falls $|q| < 1$. Wir definieren $x > 0$ durch $\frac{1}{|q|} = 1 + x$ wie in Beispiel (c); diesmal ist die Abschätzung mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung aber nicht stark genug (versuchen Sie's selbst!). Stattdessen benutzen wir für $n \geq 2$ den binomischen Satz I.2.3:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 > \frac{n(n-1)}{2} x^2.$$

(Beachte, dass alle Summanden positiv sind.) Daher ist

$$|nq^n| = \frac{n}{(1+x)^n} \leq \frac{2}{(n-1)x^2}$$

für $n \geq 2$ und deshalb $|nq^n| < \varepsilon$ garantiert dann für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ richtig, wenn

$$\frac{2}{(n-1)x^2} < \varepsilon \quad \text{und} \quad n \geq 2$$

ist. Daraus lässt sich sofort bestimmen, dass ein

$$n_0 > \max\Bigl\{2, \frac{2}{\varepsilon x^2} + 1\Bigr\}$$

den Bedingungen von Definition II.1.1 genügt.

(e) Sei $a > 0$; dann gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Der Fall $a = 1$ ist klar (siehe Beispiel (o)). Wir behandeln jetzt den Fall $a > 1$; überlegen Sie den Fall $0 < a < 1$ in Analogie dazu selbst. Sei also $a > 1$ (so dass auch $\sqrt[n]{a} > 1$); bei gegebenem $\varepsilon > 0$ müssen wir die Ungleichung

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \tag{II.1.3}$$

untersuchen. Diese ist äquivalent zu

$$a < (1 + \varepsilon)^n,$$

und nach der Bernoullischen Ungleichung ist diese Ungleichung garantiert erfüllt, wenn $a < n\varepsilon$ ist, da ja stets $n\varepsilon < 1 + n\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^n$ gilt. Ist also $n_0 > \frac{a}{\varepsilon}$ gewählt und $n \geq n_0$, so ist (II.1.3) erfüllt. Das zeigt $\sqrt[n]{a} \to 1$.

(f) Wir wollen jetzt $(\sqrt[n]{n})$ auf Konvergenz gegen 1 untersuchen. Analog zu (e) ist hierfür bei gegebenem $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$n < (1 + \varepsilon)^n \tag{II.1.4}$$

zu studieren. Diesmal reicht es aber nicht aus, die Bernoullische Ungleichung anzuwenden (versuchen Sie es trotzdem, um zu sehen, warum nicht), und man muss einen Schritt weiter gehen. Dieser besteht wie bei (d) darin, im binomischen Satz bis zum quadratischen Term zu summieren:

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

für $n \geq 2$, da $\varepsilon > 0$. Daher ist (II.1.4) garantiert erfüllt, wenn $n \geq 2$ und $n \leq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$ ist, also garantiert für $n \geq n_0 \geq \max\{2, \frac{2}{\varepsilon^2} + 1\}$. Das zeigt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(g) Hier nun das Standardbeispiel einer divergenten Folge, nämlich $(a_n) = ((-1)^n)$. Um die Divergenz zu begründen, ist zu zeigen, dass kein $a \in \mathbb{R}$ die Bedingung von (II.1.2) erfüllt. Da diese Bedingung mit „$\forall\varepsilon$“ beginnt, ist also für jedes $a \in \mathbb{R}$ ein „Versager-ε“ zu produzieren (das von a abhängen kann). Wir werden einsehen, dass $\varepsilon = 1$ für jedes a solch ein Versager-ε ist: Egal wie groß a ist, es können nicht beide Ungleichungen $|1 - a| < 1$ und $|(-1) - a| < 1$ erfüllt sein; die Ungleichung $|a_n - a| < 1$ ist daher unendlich oft verletzt und kann nicht ab einem gewissen n_0 gelten.

Im Zusammenhang mit dem letzten Beispiel ist es sinnvoll, sich die Aussage „(a_n) ist divergent“ in Quantorenschreibweise zu notieren, nämlich

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 \qquad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Es folgen einige Grenzwertsätze. Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn die Menge ihrer Folgenwerte $\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, wenn also ein $K \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|a_n| \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Analog wird erklärt, was es bedeutet, dass (a_n) nach oben bzw. nach unten beschränkt ist.

Beschränktheit ist eine notwendige Bedingung für Konvergenz.

Satz II.1.3 *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge. Wir verwenden (II.1.2) für $\varepsilon = 1$ und erhalten ein n_0 mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Für diese n ist dann

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

Daher gilt

$$|a_n| \leq K := \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Die Aussage von Satz II.1.3 darf nicht mit ihrer (falschen!) Umkehrung „~~Eine beschränkte Folge ist konvergent~~“ verwechselt werden; die Folge $((-1)^n)$ ist ein Gegenbeispiel hierfür.

Nun zu Summen und Differenzen konvergenter Folgen.

Satz II.1.4 *Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dann sind auch $(a_n + b_n)$ und $(a_n - b_n)$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon \qquad \text{für } n \geq n_1, \\ |b_n - b| &< \varepsilon \qquad \text{für } n \geq n_2. \end{aligned}$$

Sei n_0 die größere der beiden Zahlen n_1 und n_2, dann gelten diese beiden Ungleichungen simultan für $n \geq n_0$, und es folgt für $n \geq n_0$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Vergleicht man mit (II.1.2), muss man feststellen, dass man das zu erreichende Ziel um den Faktor 2 verfehlt hat. Daher muss man eine Nuance anders argumentieren.

Hier also der millimetergenaue Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wenden die Voraussetzung, dass $a_n \to a$ und $b_n \to b$ strebt, gemäß (II.1.2) an, aber nicht auf das gegebene ε, sondern auf $\frac{\varepsilon}{2}$ (beachte den $\forall$-Quantor in (II.1.2)). Dann existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für } n \geq n_1, \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für } n \geq n_2. \end{aligned}$$

Sei n_0 die größere der beiden Zahlen n_1 und n_2, dann gelten diese beiden Ungleichungen simultan für $n \geq n_0$, und es folgt für $n \geq n_0$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

quod erat demonstrandum.

Der Fall der Folge $(a_n - b_n)$ geht genauso; es ist eine gute Übung, sich die Details aufzuschreiben. □

Da die „2ε-Pleite“, die uns im letzten Beweis begegnet ist, noch häufiger auftaucht, soll ein systematischer Ausweg angegeben werden. Sei $r > 0$. Informell soll jetzt eine Folge (a_n) *r-konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$ genannt werden, wenn

$$\forall \varepsilon' > 0 \ \exists n_0' \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0' \qquad |a_n - a| < r\varepsilon'$$

gilt. In unseren Überlegungen werden wir gelegentlich auf solche Folgen geführt; z.B. zeigte der ursprüngliche Beweisansatz von Satz II.1.4, dass $(a_n + b_n)$ 2-konvergent ist. Dass man den Begriff der r-Konvergenz in keinem Lehrbuch findet, liegt an folgendem Lemma.

Lemma II.1.5 *Sei $r > 0$. Eine Folge ist genau dann r-konvergent gegen a, wenn sie konvergent gegen a ist.*

Beweis. Sei (a_n) zunächst r-konvergent gegen a; wir müssen (II.1.2) verifizieren. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wir wenden die Definition der r-Konvergenz mit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{r}$ an und erhalten ein entsprechendes n_0'. Für $n \geq n_0'$ gilt dann

$$|a_n - a| < r\varepsilon' = r\frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon,$$

also klappt (in selbsterklärender Notation) $n_0(\varepsilon) = n_0'(\frac{\varepsilon}{r})$.

Die Umkehrung (Konvergenz impliziert r-Konvergenz) wird genauso bewiesen (tun Sie's!). □

Mit Hilfe dieses Lemmas wird der Beweis des folgenden Konvergenzsatzes übersichtlicher.

Satz II.1.6 *Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$.*

(a) *Dann ist auch $(a_n b_n)$ konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Insbesondere gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a.$$

(b) *Ist $b \neq 0$ und sind alle $b_n \neq 0$, so ist auch $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. (a) Wir müssen $|a_n b_n - ab|$ abschätzen; dabei hilft der Trick, den gemischten Term $a_n b$ abzuziehen und wieder zu addieren („aktive Null“):

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\le |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wie im Beweis von Satz II.1.4 findet man ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \ge n_0$ die beiden Ungleichungen

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |b_n - b| < \varepsilon$$

erfüllt sind (wie nämlich?). Weiter hilft es zu wissen, dass nach Satz II.1.3 die Folge (a_n) beschränkt ist, also ist für ein geeignetes $K > 0$

$$|a_n| \le K \quad \text{für alle } n \ge 1.$$

Insgesamt erkennen wir nach diesen Vorarbeiten für $n \ge n_0$

$$|a_n b_n - ab| \le K|b_n - b| + |b||a_n - a| < (K + |b|)\varepsilon,$$

und Lemma II.1.5 zeigt, dass $a_n b_n \to ab$.

Für den Zusatz betrachte nur die Folge (b_n), $b_n = \lambda$ für alle n.

(b) Da man $(\frac{a_n}{b_n}) = a_n \frac{1}{b_n}$ schreiben kann, reicht es, die Folge $(\frac{1}{b_n})$ auf Konvergenz zu untersuchen. Zunächst ist

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} \quad \text{für } n \ge 1.$$

Wendet man (II.1.2) für die Folge (b_n) und $\varepsilon = \frac{1}{2}|b|$ an, erhält man ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < \frac{1}{2}|b| \quad \text{für } n \ge N,$$

also

$$|b_n| > \frac{1}{2}|b| \quad \text{für } n \geq N.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert n_0 mit

$$|b_n - b| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Setzt man $n_0' = \max\{n_0, N\}$, so gilt für $n \geq n_0'$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} < \frac{\varepsilon}{|b|^2/2} = \frac{2}{|b|^2}\varepsilon,$$

und Lemma II.1.5 zeigt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. □

Wie das Argument von (b) zeigt, hätte man gar nicht voraussetzen müssen, dass alle $b_n \neq 0$ sind; denn man erhält $b_n \neq 0$ für $n \geq N$ automatisch. Damit ist die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ zumindest für $n \geq N$ definiert.

Als Beispiel betrachte

$$a_n = \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{2n^3 + n + 5}.$$

Die Konvergenz dieser Folge kann mit den bisherigen Grenzwertsätzen nachgewiesen werden; man benötigt allerdings den Trick, den Bruch durch die höchste Nennerpotenz von n zu kürzen. Dann sieht man

$$a_n = \frac{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}} \to \frac{4 - 0 + 0}{2 + 0 + 0} = 2.$$

Satz II.1.7 *Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Es gelte $a_n \leq b_n$ für alle n. Dann ist auch $a \leq b$.*

Beweis. Nehmen wir an, es wäre $a > b$; setze dann $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(a-b)$. Wie im Beweis von Satz II.1.4 findet man ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ die beiden Ungleichungen

$$|a_n - a| < \varepsilon_0, \quad |b_n - b| < \varepsilon_0$$

gelten. Insbesondere folgt für diese n

$$a_n > a - \varepsilon_0 = \frac{a+b}{2}, \quad b_n < b + \varepsilon_0 = \frac{a+b}{2},$$

also $b_n < a_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Deshalb muss $a \leq b$ sein. □

Selbst wenn alle $a_n < b_n$ sind, braucht nicht $a < b$ zu gelten; ein Gegenbeispiel ist $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$.

Der folgende Satz wird auch *Sandwichsatz* genannt.

Satz II.1.8 *Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen; sei (c_n) eine weitere Folge. Es gelte $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: a$. Dann ist auch (c_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.*

Beachten Sie, dass die Konvergenz von (c_n) Teil der Behauptung und keine Voraussetzung ist! Wüsste man, dass (c_n) konvergiert, würde $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ sofort aus Satz II.1.7 folgen.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert n_0, so dass für $n \geq n_0$ die beiden Ungleichungen

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |b_n - a| < \varepsilon$$

gelten. Insbesondere ist für diese n

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon,$$

also

$$|c_n - a| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Das zeigt, dass (c_n) gegen a konvergiert. □

Für Anwendungen dieser Sätze ist eine kleine Ausdehnung hilfreich; es reicht nämlich, dass die vorausgesetzten Ungleichungen in Satz II.1.7 und II.1.8 nur ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ gelten (warum?).

II.2 Konvergenzkriterien

Wenn man die Konvergenz einer gegebenen Folge nachweisen will, muss man bereits wissen, was der Grenzwert ist. Manchmal kennt man den Grenzwert im Vorhinein aber gar nicht, z.B. bei der durch $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ definierten Folge. Daher ist es wünschenswert, Kriterien an der Hand zu haben, die die Konvergenz einer Folge sichern, ohne dass man ihren Grenzwert explizit kennt. (Dieses Vorgehen werden wir in Beispiel II.2.2 auf $((1 + \frac{1}{n})^n)$ anwenden.)

Das erste solche Konvergenzkriterium beruht auf der Monotonie einer Folge. Eine Folge (a_n) heißt *monoton wachsend*, wenn

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{für } n \geq 1$$

gilt; sie heißt *streng monoton wachsend*, wenn

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{für } n \geq 1$$

gilt; sie heißt *monoton fallend* bzw. *streng monoton fallend*, wenn

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{für } n \geq 1 \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} < a_n \quad \text{für } n \geq 1$$

gilt. Eine *monotone Folge* ist eine Folge, die monoton wachsend oder monoton fallend ist. Einfaches Beispiel: $(\frac{1}{n})$ ist streng monoton fallend, aber $(\frac{(-1)^n}{n})$ ist nicht monoton.

Satz II.2.1 *Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.*

Beweis. Wir betrachten den Fall einer monoton wachsenden Folge (a_n). Da (a_n) nach oben beschränkt ist, existiert die Zahl

$$s := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_1, a_2, \dots\}.$$

Wir zeigen $a_n \to s$. Da s eine obere Schranke der a_n ist, gilt stets $a_n \leq s$. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Weil s die kleinste obere Schranke der a_n ist, ist $s-\varepsilon$ keine obere Schranke; es existiert also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > s-\varepsilon$. Weil (a_n) monoton wächst, gilt also sogar $a_n > s-\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, das heißt $s - a_n < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Da wie gesagt stets $s - a_n \geq 0$ ist, folgt insgesamt

$$|a_n - s| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0,$$

und das beweist $a_n \to s$.

Bei einer monoton fallenden Folge kann man analog mit Hilfe des Infimums argumentieren (tun Sie's!), oder man betrachtet zu einer beschränkten, monoton fallenden Folge (a_n) die Folge $(-a_n)$, die monoton wächst und beschränkt ist und die nach dem eben Bewiesenen konvergiert. Wegen $a_n = (-1)(-a_n)$ konvergiert auch (a_n). □

Beispiel II.2.2 Wir betrachten die durch $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ definierte Folge und zeigen, dass sie streng monoton wachsend und beschränkt ist. Zum Beweis der Monotonie werden wir $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nachrechnen:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$$

Auf den letzten Term wenden wir die Bernoullische Ungleichung aus Satz I.1.1 an (mit $x = -\frac{1}{(n+1)^2} \geq -1$); es folgt für alle $n \geq 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Zum Nachweis der Beschränktheit (nach oben, beachte $a_n \geq 0$) benutzen wir den binomischen Satz I.1.2:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Der k-te Summand ist

$$\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot\dots\cdot n} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

für $k \geq 0$ (denn $k! \geq 2^{k-1}$; warum?). Deshalb ist für $n \geq 1$

$$\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 4 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 4.$$

(Die verwandte Formel für die Zweierpotenzen wurde schon eingangs des Kapitels erwähnt, siehe (II.3.1) für die allgemeine geometrische Reihe.)

Nach Satz II.2.1 ist $((1+\frac{1}{n})^n)$ konvergent; allerdings ist der Grenzwert keine Zahl der Grundschulmathematik. Man *definiert*

$$e := \lim_{n\to\infty} \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n;$$

es ist $e = 2.7182818\dots$. Übrigens ist das ein schönes Beispiel dafür, dass die zeitgenössische Mathematik die historische Reihenfolge oft umkehrt. In der historischen Entwicklung traten nämlich zuerst die Logarithmen auf, und Euler definierte e als die Zahl, deren natürlicher Logarithmus 1 ist: $\ln e = 1$. (Zu diesen Dingen siehe etwa E. Hairer, G. Wanner, *Analysis By Its History*, Springer 1995.)

Natürlich ist nicht jede beschränkte Folge konvergent (Beispiel?); es gilt aber das folgende Teilfolgenprinzip. Ist $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so nennt man $(a_{n_k})_k$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_n$. Offensichtliche Beispiele für Teilfolgen von $(a_n)_n$ sind

(a) $(a_2, a_4, a_6, \dots)$, also $n_k = 2k$;
(b) $(a_1, a_4, a_9, \dots)$, also $n_k = k^2$;
(c) $(a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, \dots)$, also $n_k = k$-te Primzahl.

Hier ein etwas raffinierteres Beispiel: Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Folge (s_n) mit $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ unbeschränkt ist. Wir können daher für jedes $k \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl n_k mit $s_{n_k} \geq k$ bestimmen; also $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $n_3 = 11$ etc. Für jede Folge $(a_n)_n$ ist $(a_{n_k})_k$ eine Teilfolge (warum ist (n_k) streng monoton wachsend?).

Satz II.2.3 (Satz von Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei (a_n) eine beschränkte Folge, sagen wir $A_0 \leq a_n \leq B_0$ für alle n. Im Folgenden wird es praktisch sein, die Bezeichnung

$$[A, B] = \{x \in \mathbb{R}\colon A \leq x \leq B\}$$

für ein abgeschlossenes Intervall zu verwenden.

Wir verwenden die „Teile-und-herrsche-Methode“. Sei $M_0 = \frac{A_0+B_0}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls $I_0 = [A_0, B_0]$. Wir betrachten die beiden Hälften $[A_0, M_0]$ und $[M_0, B_0]$ („teile“); $[A_0, M_0]$ oder $[M_0, B_0]$ enthält dann unendlich viele Folgenelemente. Im ersten Fall setzen wir $A_1 = A_0$, $B_1 = M_0$; wenn $[A_0, M_0]$

nur endlich viele Folgenglieder enthält, setzen wir $A_1 = M_0$, $B_1 = B_0$ („herrsche"). In jedem Fall haben wir ein Intervall $I_1 = [A_1, B_1] \subset I_0$ definiert, für das $N_1 = \{n \in \mathbb{N}\colon a_n \in I_1\}$ unendlich ist; setze $n_1 = \min N_1$.

Sei $M_1 = \frac{A_1+B_1}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls I_1. Dann enthält $[A_1, M_1]$ oder $[M_1, B_1]$ unendlich viele Folgenelemente, da ja N_1 unendlich ist. Im ersten Fall setzen wir $A_2 = A_1$, $B_2 = M_1$; wenn $[A_1, M_1]$ nur endlich viele Folgenglieder enthält, setzen wir $A_2 = M_1$, $B_2 = B_1$. In jedem Fall haben wir ein Intervall $I_2 = [A_2, B_2] \subset I_1$ definiert, für das $N_2 = \{n \in N_1\colon a_n \in I_2,\ n > n_1\}$ unendlich ist; setze $n_2 = \min N_2$ $(> n_1)$.

So fortfahrend, erhält man Intervalle $I_k = [A_k, B_k]$ und unendliche Teilmengen $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $A_0 \le A_1 \le A_2 \le \cdots \le B_0$;

(b) $B_0 \ge B_1 \ge B_2 \ge \cdots \ge A_0$;

(c) $B_k - A_k = \frac{1}{2^k}(B_0 - A_0)$;

(d) für $n_k = \min N_k$ gilt $A_k \le a_{n_k} \le B_k$ und $n_k < n_{k+1}$.

(Machen Sie sich klar, wie man I_{k+1} und N_{k+1} aus I_k und N_k erhält.) Wir werden jetzt zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ existiert.

Wegen (a) ist (A_k) monoton und beschränkt, also (Satz II.2.1) existiert $\alpha := \lim_{k\to\infty} A_k$. Aus dem gleichen Grund zeigt (b), dass $\beta = \lim_{k\to\infty} B_k$ existiert. Nach Satz II.1.4 gilt $B_k - A_k \to \beta - \alpha$; andererseits zeigt (c) $B_k - A_k \to 0$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts muss $\alpha = \beta$ sein. Nun liefert (d) mit Hilfe des Sandwichsatzes II.1.8, dass die Teilfolge (a_{n_k}) ebenfalls gegen α konvergiert. □

Ein weiteres wichtiges Konvergenzkriterium benutzt den Begriff der Cauchyfolge, der jetzt erklärt wird.

Definition II.2.4 Eine Folge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \ge n_0 \qquad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Bei Bedarf kann man hier natürlich annehmen, dass $m \ge n$ ist. Wenn die intuitive Bedeutung der Konvergenz ist, dass die Folgenglieder einer gewissen Zahl nahe kommen, so ist die intuitive Bedeutung der Cauchy-Bedingung, dass die Folgenglieder einander nahe kommen.

Beispiel II.2.5 Ein nicht ganz offensichtliches Beispiel einer Cauchyfolge ist die durch $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ definierte Folge. (Die wahre Heimat dieses Beispiels liegt bei den unendlichen Reihen im nächsten Abschnitt.) Sei $m \ge n$, dann ist[1]

$$|a_m - a_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2}.$$

[1] Man setzt generell $\sum_{k=N}^{M} a_k = 0$, wenn $M < N$ ist („leere Summe").

Um das abzuschätzen, verwendet man den Trick, dass für $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

ist. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} &< \sum_{k=n+1}^{m} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) + \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\Big) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dass von der Summe nur der erste und letzte Term übrig bleiben und sich der Rest weghebt, beschreibt man durch das Wort *Teleskopsumme.*

Jetzt ist es leicht, (a_n) als Cauchyfolge zu erkennen. Zu $\varepsilon > 0$ wähle nämlich $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$; dann gilt für $m \geq n \geq n_0$ nach den obigen Vorüberlegungen

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Die folgenden Eigenschaften einer Cauchyfolge sind leicht zu zeigen.

Satz II.2.6
(a) *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*
(b) *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

Beweis. (a) Gelte $a_n \to a$, und sei $\varepsilon > 0$. Wendet man (II.1.2) aus Definition II.1.1 für $\frac{\varepsilon}{2}$ an, erhält man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_0$. Daher gilt für $m, n \geq n_0$

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) Das geht ganz ähnlich wie bei Satz II.1.3. Zunächst wird die Definition einer Cauchyfolge für $\varepsilon = 1$ angewandt; das liefert ein n_0 mit $|a_m - a_n| < 1$ für $m, n \geq n_0$. Insbesondere ist für $n \geq n_0$ (setze $m = n_0$)

$$|a_n| = |(a_n - a_{n_0}) + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|.$$

Deshalb ist

$$|a_n| \leq K := \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$$

für alle $n \geq 1$. □

Die Pointe ist nun, dass man die Konvergenz einer Folge beweisen kann, ohne vorher ihren Grenzwert zu kennen:

Satz II.2.7 (Cauchy-Kriterium)
Jede Cauchyfolge konvergiert.

Beweis. Sei (a_n) eine Cauchyfolge. Nach Satz II.2.6(b) und dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz II.2.3) existiert eine konvergente Teilfolge, sagen wir $a_{n_k} \to a$. Wir zeigen jetzt, dass (a_n) selbst gegen a konvergiert; dazu benutzen wir die Cauchy-Bedingung.

Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \text{für } k \geq k_0,$$

und es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für } m, n \geq n_0.$$

Wähle nun $k' \geq k_0$ so groß, dass $n_{k'} \geq n_0$ ist; man darf dann in der vorigen Ungleichung $m = n_{k'}$ setzen. Zusammen ergibt sich für $n \geq n_0$

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_{k'}}) + (a_{n_{k'}} - a)| \leq |a_n - a_{n_{k'}}| + |a_{n_{k'}} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

und Lemma II.1.5 schließt den Beweis ab. □

Satz II.2.7 liefert nun, dass die Folge aus Beispiel II.2.5 konvergiert; wogegen sie konvergiert, verrät er uns nicht. Das steht auch auf einem ganz anderen Blatt; man kann mit tieferliegenden Mitteln zeigen, dass der Grenzwert $\frac{\pi^2}{6}$ ist.

II.3 Unendliche Reihen

Wir haben jetzt alle Mittel bereit gestellt, um die eingangs des Kapitels beobachteten Phänomene über die Summe $1 + q + q^2 + \cdots$ einzuordnen. Hier geht es ja darum, sämtliche Glieder einer Folge aufzusummieren. Der folgende Begriff präzisiert das.

Definition II.3.1 Sei (a_n) eine Folge, und sei (s_n) die zugehörige Folge der *Partialsummen*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Man sagt, die *unendliche Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn die Folge der Partialsummen (s_n) konvergiert. Man setzt dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Natürlich darf eine unendliche Reihe auch von einem anderen Index $N \in \mathbb{N}_0$ ab summiert werden: $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$.

Die gewiss wichtigste unendliche Reihe ist die bereits erwähnte *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$. Wir untersuchen, für welche $q \in \mathbb{R}$ Konvergenz vorliegt. Dazu bestimmen wir die Partialsummen der Reihe explizit, und das geht mit dem Trick vom Anfang des Kapitels – allerdings im sicheren Fahrwasser endlicher Summen angewandt: Es ist

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + \cdots + q^n, \\ qs_n &= q + q^2 + \cdots + q^{n+1} \end{aligned}$$

und deshalb

$$(1-q)s_n = 1 - q^{n+1}$$

sowie

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1; \tag{II.3.1}$$

ferner zeigt direktes Einsetzen

$$s_n = n+1 \quad \text{für } q = 1.$$

Daraus ergibt sich: (s_n) konvergiert für $|q| < 1$ mit Grenzwert $\frac{1}{1-q}$ (vgl. Beispiel II.1.2(c)); (s_n) ist unbeschränkt für $|q| > 1$, da dann $(|q|^n)$ unbeschränkt ist (verwende die Bernoullische Ungleichung); (s_n) ist ebenfalls unbeschränkt für $q = 1$ (siehe oben); (s_n) ist beschränkt, aber divergent für $q = -1$ (vgl. Beispiel II.1.2(g)). Zusammengefasst haben wir gezeigt:

Satz II.3.2 *Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Aus Abschnitt II.2 kennen wir bereits ein weiteres Beispiel einer konvergenten Reihe, nämlich $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (vgl. Beispiel II.2.5 und Satz II.2.7). Den Wert dieser Reihe zu bestimmen, ist aber eine ganz andere (und für diese Vorlesung zu schwierige) Aufgabe. Das ist typisch für die Reihenrechnung; wir werden viele Kriterien kennen lernen, die es gestatten, die Konvergenz einer Reihe zu zeigen, ohne ihren Wert anzugeben. Wie schon gesagt ist das Ergebnis jedenfalls

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Es sind sehr unterschiedliche Beweise dafür bekannt[2]. Ein faszinierendes physikalische Argument stammt von J. Wästlund; siehe *Summing inverse squares*

[2]Der erste Beweis stammt von Euler; vorher hatten sich die Bernoullis vergeblich um einen Beweis bemüht. Da sowohl Euler als auch die Bernoullis aus Basel stammen, ist das Problem, $\sum_k 1/k^2$ zu berechnen, als *Basler Problem* bekannt geworden.

by Euclidean geometry (`http://www.math.chalmers.se/~wastlund/Cosmic.pdf`) und das zugehörige YouTube-Video (`https://www.youtube.com/watch?v=d-o3eB9sfls`).

Wir kommen jetzt zu einfachen Rechenregeln für konvergente Reihen.

Satz II.3.3 *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ konvergent mit*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \\ \sum_{k=1}^{\infty} ca_k &= c\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

Beweis. Wir behandeln die Summe. Setze $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $u_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$. Dann gilt $u_n = s_n + t_n$, und nach Satz II.1.4 ist

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n,$$

d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Die übrigen Behauptungen des Satzes zeigt man genauso (tun Sie's!). □

Es gibt keine so einfache Aussage über das Produkt von Reihen, siehe dazu Satz II.4.3.

Es folgt ein einfaches notwendiges Kriterium für Konvergenz.

Satz II.3.4 *Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, ist (a_n) eine Nullfolge.*

Beweis. Ist s der Wert der Reihe und s_n die n-te Partialsumme, so gilt ja $s_n \to s$ und natürlich auch $s_{n-1} \to s$. (Warum eigentlich?) Es folgt

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0,$$

wie behauptet. □

Dass (a_n) eine Nullfolge ist, ist jedoch keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe; das klassische Gegenbeispiel ist die *harmonische Reihe*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Wir zeigen, dass die Partialsummenfolge unbeschränkt ist, indem wir speziell Partialsummen mit 2^m Gliedern betrachten und geschickt klammern:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\Big) + \dots + \Big(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\Big) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{m}{2}.\end{aligned}$$

Das erste abstrakte Konvergenzkriterium ist das Analogon zum Cauchy-Kriterium für Folgen (Satz II.2.7, beachte noch Satz II.2.6(a)).

Satz II.3.5 (Cauchy-Kriterium für Reihen)
Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n \geq n_0 \qquad \Big|\sum_{k=n}^m a_k\Big| < \varepsilon. \tag{II.3.2}$$

Beweis. (II.3.2) bedeutet nichts anderes, als dass die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge bildet. □

Setzt man übrigens $m = n$ in (II.3.2), erhält man erneut Satz II.3.4.

Mit vielen der folgenden Kriterien kann man nicht nur die Konvergenz von $\sum_{k=1}^\infty a_k$ nachweisen, sondern sogar die von $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$. Wenn letztere Reihe konvergiert, sagt man, $\sum_{k=1}^\infty a_k$ *konvergiert absolut*. Halten wir als erstes fest:

Satz II.3.6 *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Wenn $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolut konvergiert, existiert nach dem Cauchy-Kriterium zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit

$$\sum_{k=n}^m |a_k| < \varepsilon \quad \text{für } m \geq n \geq n_0.$$

Aber nach der Dreiecksungleichung[3] gilt stets

$$\Big|\sum_{k=n}^m a_k\Big| \leq \sum_{k=n}^m |a_k|,$$

daher ist (II.3.2) für die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ erfüllt. □

[3] Die Dreiecksungleichung für endlich viele Summanden folgt aus der mit zwei Summanden durch vollständige Induktion.

Satz II.3.7 (Majorantenkriterium)
Seien (a_n) und (c_n) zwei Folgen mit

$$|a_n| \leq c_n \quad \textit{für } n \geq 1.$$

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, und zwar absolut. Das gilt auch noch, wenn die Abschätzung $|a_n| \leq c_n$ nur für $n \geq N$ erfüllt ist.

Beweis. Wir zeigen das Cauchy-Kriterium für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, und wir benutzen das Cauchy-Kriterium für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon \quad \text{für } m \geq n \geq n_0.$$

Wegen der Voraussetzung gilt dann auch

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad \text{für } m \geq n \geq n_0.$$

Unter der schwächeren Voraussetzung des Zusatzes hat man diese Abschätzung nur für $m \geq n \geq \max\{n_0, N\}$. In jedem Fall erfüllt $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ das Cauchy-Kriterium. □

Man nennt in Satz II.3.7 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine *konvergente Majorante* für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Beispiel: Für $p \geq 2$ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante ist. Umgekehrt sieht man, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergiert, da diese Reihe eine Majorante der harmonischen Reihe ist („die harmonische Reihe ist eine divergente Minorante“).

Die schlagkräftigsten Kriterien erhält man, wenn man versucht, eine geometrische Reihe als Majorante zu gewinnen.

Satz II.3.8 (Quotientenkriterium)
Sei (a_n) eine Folge.

(a) *Falls $N \in \mathbb{N}$ und $0 \leq q < 1$ mit $a_n \neq 0$ für $n \geq N$ und*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \textit{für } n \geq N$$

existieren, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

(b) *Falls $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für $n \geq N$ und*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \textit{für } n \geq N$$

existiert, divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis. (a) Die Voraussetzung impliziert

$$|a_{N+l}| \le |a_N| q^l \quad \text{für } l \ge 0$$

bzw.

$$|a_k| \le \frac{|a_N|}{q^N} q^k \quad \text{für } k \ge N.$$

Da die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert, folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

(b) Diesmal liefert die Voraussetzung

$$|a_k| \ge |a_N| > 0 \quad \text{für } k \ge N.$$

(a_n) ist also keine Nullfolge, und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist wegen Satz II.3.4 divergent. □

Satz II.3.9 (Wurzelkriterium)
Sei (a_n) eine Folge.

(a) *Falls $N \in \mathbb{N}$ und $0 \le q < 1$ mit*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q \quad \textit{für } n \ge N$$

existieren, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

(b) *Falls*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1 \quad \textit{für unendlich viele } n$$

gilt, divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis. In (a) ist $|a_n| \le q^n$ für $n \ge N$ und deshalb die geometrische Reihe eine konvergente Majorante, und in (b) ist $|a_n| \ge 1$ für unendlich viele n und deshalb (a_n) keine Nullfolge. □

Die harmonische Reihe zeigt, dass es nicht ausreicht, in Teil (a) des Quotienten- oder Wurzelkriteriums die Bedingung $[\dots] \le q$ durch $[\dots] < 1$ zu ersetzen.

Von beiden Kriterien gibt es vereinfachte Versionen, wenn die Grenzwerte der entsprechenden Größen existieren.

Korollar II.3.10 (Vereinfachtes Quotientenkriterium)
Sei (a_n) eine Folge, für die

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

existiert.

(a) *Wenn $\rho < 1$ ist, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.*
(b) *Wenn $\rho > 1$ ist, divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*
(c) *Wenn $\rho = 1$ ist, kann man keine allgemeine Aussage treffen.*

Beweis. (a) Setze $q = \frac{\rho+1}{2} < 1$ und $\varepsilon = q - \rho > 0$. Nach Voraussetzung existiert n_0 mit

$$\left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - \rho \right| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0,$$

d.h. insbesondere

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \rho + \varepsilon = q \quad \text{für } n \geq n_0.$$

(b) Diesmal folgt wie oben, mit $\varepsilon = \rho - 1 > 0$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \rho - \varepsilon = 1 \quad \text{für } n \geq n_0.$$

(c) Für die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und die divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist jeweils $\rho = 1$. □

Korollar II.3.11 (Vereinfachtes Wurzelkriterium)
Sei (a_n) eine Folge, für die

$$\omega := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

existiert.

(a) *Wenn $\omega < 1$ ist, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.*
(b) *Wenn $\omega > 1$ ist, divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*
(c) *Wenn $\omega = 1$ ist, kann man keine allgemeine Aussage treffen.*

Beweis. Der Beweis geht genauso wie bei Korollar II.3.10; für (c) muss man $\sqrt[n]{n} \to 1$ wissen (Beispiel II.1.2(f)). □

Beispiel II.3.12 (Die Exponentialreihe)
Wir betrachten zu $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{II.3.3}$$

und fragen nach der Konvergenz. Um das (vereinfachte) Quotientenkriterium anzuwenden, beachte man nur

$$\left| \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0,$$

also konvergiert (II.3.3) für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dies wird sich als Basis für die Definition der e-Funktion erweisen (siehe Definition III.3.4).

Vorbereitend zeigen wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = \lim_{n\to\infty} \Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr)^n.$$

Wir hatten in Beispiel II.2.2 schon

$$\Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

gezeigt, so dass

$$e \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

folgt. Für die umgekehrte Abschätzung halte zunächst $\nu \in \mathbb{N}$ fest; für $n \ge \nu$ ist dann

$$\Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \ge \sum_{k=0}^{\nu} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k!} \Bigl(1 - \frac{1}{n}\Bigr) \cdots \Bigl(1 - \frac{k-1}{n}\Bigr).$$

Lässt man jetzt $n \to \infty$ streben, ergibt sich (beachte, dass rechts eine Summe mit endlich vielen Summanden steht und diese Anzahl von n unabhängig ist)

$$e \ge \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k!} \quad \text{für alle } \nu \in \mathbb{N}.$$

Ein zweiter Grenzübergang, nämlich $\nu \to \infty$, liefert

$$e \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Die beiden Darstellungen für e sind zwar qualitativ gleichwertig, aber die Konvergenz der e-Reihe ist viel schneller als die von $(1 + \frac{1}{n})^n$; z.B. ist

$$e \ge \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} = 2.7182818\ldots, \qquad \Bigl(1 + \frac{1}{10}\Bigr)^{10} = 2.593\ldots.$$

Links hat man bereits 7 korrekte Nachkommastellen und rechts keine einzige.

Das letzte Konvergenzkriterium dieses Abschnitts ist kein Kriterium für absolute Konvergenz, sondern lebt von den Vorzeichenwechseln der Summanden.

Satz II.3.13 (Leibniz-Kriterium)
Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge; insbesondere sei stets $a_n \ge 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$a_1 - a_2 + a_3 \pm \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k.$$

Beweis. Sei $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$. Für gerade n gilt

$$s_2 \leq s_4 \leq \dots$$

und für ungerade

$$s_1 \geq s_3 \geq \dots;$$

der Grund ist jeweils, dass stets $a_{m+1} \leq a_m$ ist (z.B. $s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq s_{2n}$). Ferner ist für alle n

$$s_{2n} \leq s_{2n-1}.$$

Insbesondere ist (s_{2n}) monoton wachsend und durch s_1 nach oben beschränkt, und (s_{2n-1}) ist monoton fallend und durch s_2 nach unten beschränkt. Nach Satz II.2.1 existieren $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ und $s' = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$, und es gilt

$$s_2 \leq s_4 \leq \dots \leq s_{2n} \leq s \leq s' \leq \dots \leq s_{2n-1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1.$$

Es ist aber $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \to 0$ und deshalb $s' = s$. Es folgt (wie?), dass (s_n) konvergiert mit Grenzwert s. □

Im Beweis wurde die wichtige Einschließung

$$s_{2n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \leq s_{2n-1} \tag{II.3.4}$$

mitbewiesen.

Ein Beispiel ist die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots;$$

das Leibniz-Kriterium verrät uns, dass die Reihe konvergiert, aber nicht, wogegen (der Grenzwert ist übrigens $\log 2$, siehe Satz IV.3.6(c)). Insbesondere ist die alternierende harmonische Reihe ein Beispiel einer konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihe.

II.4 Absolute Konvergenz

Im letzten Abschnitt haben Sie Kriterien kennen gelernt, die die absolute Konvergenz einer Reihe sicherstellen. In diesem Abschnitt sollen einige Aussagen vorgestellt werden, die nur unter Voraussetzung der *absoluten* Konvergenz gültig sind. Die Beweise dieser Aussagen sind technisch erheblich aufwändiger als andere Beweise dieser Vorlesung und sollen daher nicht durchgeführt werden; man findet sie jedoch in fast jedem Lehrbuch.

Beginnen wir mit dem Kommutativgesetz für unendliche Reihen. Als Beispiel betrachten wir die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \pm \cdots ,$$

deren Glieder nun in anderer Reihenfolge aufgeschrieben werden sollen:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \pm \cdots$$

(auf einen positiven Term folgen zwei negative). Wir werden jetzt zeigen, dass die untere Reihe einen anderen Grenzwert hat als die obere, so dass das Kommutativgesetz für unendliche Reihen nicht ohne weiteres gilt.

Wir setzen

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k};$$

analog bezeichne s'_n die n-te Partialsumme der umgeordneten Reihe. Wegen der Einschließung (II.3.4) ist klar, dass $\frac{7}{12} = s_4 \le s$ ist. Nun betrachten wir die Partialsummen s'_{2+3m} genauer, die wir so klammern:

$$s'_{2+3m} = 1-\frac{1}{2}+\Big(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\Big)+\Big(-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\Big)+\cdots+\Big(-\frac{1}{4m}+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{4m+2}\Big).$$

Die μ-te Klammer ist

$$-\frac{1}{4\mu} + \frac{1}{2\mu+1} - \frac{1}{4\mu+2} = \frac{1}{4\mu+2} - \frac{1}{4\mu} < 0,$$

also ist garantiert

$$s'_{2+3m} \le 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Falls die umgeordnete Reihe konvergiert, gilt demnach

$$s' = \lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{m\to\infty} s'_{2+3m} \le \frac{1}{2} < s,$$

wie behauptet.

Wenn man etwas genauer hinschaut, erkennt man tatsächlich die Existenz des Grenzwerts s'; es ist nämlich

$$s'_{2+3m} = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{m}\Big(\frac{1}{4\mu+2} - \frac{1}{4\mu}\Big) = \frac{1}{2}\bigg(1 + \sum_{\mu=1}^{m}\Big(\frac{1}{2\mu+1} - \frac{1}{2\mu}\Big)\bigg) = \frac{1}{2}s_{2m+1};$$

daher existiert $\lim_{m\to\infty} s'_{2+3m}$ und ist $= \frac{1}{2}s$. Dass auch $\lim_{n\to\infty} s'_n$ existiert (mit demselben Grenzwert $\frac{1}{2}s$) kann man jetzt aus der Konvergenz der Teilfolge

(s_{2+3m}) und der Tatsache, dass die Glieder eine Nullfolge bilden, schließen. (Wie nämlich?)

Bei absoluter Konvergenz kann so etwas nicht passieren, wie der nächste Satz lehrt. Wenn $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist, nennt man $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz II.4.1 *Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, so konvergiert auch jede Umordnung und hat denselben Wert.*

Die Umkehrung dieses Satzes ist ebenfalls richtig, und zwar in einer sehr starken Form.

Satz II.4.2 *Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, gibt es zu jedem $\sigma \in \mathbb{R}$ eine Umordnung, die gegen σ konvergiert. Ferner gibt es eine Umordnung, die divergiert.*

Bei der Reihenmultiplikation ist die absolute Konvergenz ebenfalls eine wichtige Voraussetzung. Wenn man zwei konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ formal ausmultipliziert, erhält man die Summanden $a_k b_l$, $k, l = 0, 1, 2, \dots$. Diese Summanden fassen wir nach der Indexsumme zusammen und setzen

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Satz II.4.3 *Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent und definiert man die c_n wie oben, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ebenfalls absolut, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Bigr).$$

Wir greifen jetzt Beispiel II.3.12 wieder auf und setzen für $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

In Beispiel II.3.12 wurde die absolute Konvergenz dieser Reihe gezeigt; daher können wir solche Reihen mit Hilfe von Satz II.4.3 multiplizieren. Wir setzen also $a_k = \frac{x^k}{k!}$, $b_k = \frac{y^k}{k!}$ und müssen die entsprechenden c_n bestimmen:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

letzteres wegen des binomischen Satzes. Aus Satz II.4.3 folgt daher:

Satz II.4.4 (Funktionalgleichung der exp-Funktion)
Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

II.5 Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen

Eine (nichtnegative) reelle Zahl als Dezimalbruch zu schreiben bedeutet, sie in der Form

$$x = N.a_1a_2a_3\dots \tag{II.5.1}$$

mit ganzen Zahlen $N \in \mathbb{N}_0$ und $a_k \in \{0,\dots,9\}$ anzugeben. Die Bedeutung von (II.5.1) ist

$$x = N + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Mit dem Majorantenkriterium sieht man sofort, dass diese Reihe konvergiert, da ja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$ eine konvergente Majorante ist. Um zu einer reellen Zahl $x \geq 0$ eine Dezimalbruchentwicklung zu konstruieren, definieren wir als erstes

$$N = \max\{n \in \mathbb{N}_0 \colon n \leq x\},$$

den ganzzahligen Anteil von x, und betrachten dann $x_1 = x - N$; beachte $0 \leq x_1 < 1$, da $N \leq x < N+1$. Als nächstes definiere

$$a_1 = \max\Big\{n \in \mathbb{N}_0 \colon \frac{n}{10} \leq x_1\Big\}.$$

Wegen

$$\frac{a_1}{10} \leq x_1 < \frac{a_1+1}{10}$$

und $x_1 < 1$ ist $a_1 < 10$, also $a_1 \in \{0,\dots,9\}$, und weiterhin gilt für $x_2 = x_1 - \frac{a_1}{10}$

$$0 \leq x_2 < \frac{1}{10}.$$

Dann betrachtet man

$$a_2 = \max\Big\{n \in \mathbb{N}_0 \colon \frac{n}{100} \leq x_2\Big\},$$

so dass

$$\frac{a_2}{100} \leq x_2 < \frac{a_2+1}{100},$$

und folglich erfüllt $x_3 = x_2 - \frac{a_2}{100}$

$$0 \leq x_3 < \frac{1}{100}.$$

So fortfahrend, erhält man eine Folge von ganzen Zahlen $a_n \in \{0, \dots, 9\}$, so dass

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} \\ &= x_{n-2} - \frac{a_{n-2}}{10^{n-2}} - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} \\ &= [\dots] \\ &= x_1 - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - [\dots] - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} \\ &= x - \Big(N + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} \Big) \end{aligned}$$

und die Abschätzung

$$0 \leq x_n < \frac{1}{10^{n-1}}$$

erfüllt sind. Das heißt aber

$$x = N + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = N.a_1 a_2 a_3 \dots .$$

Damit ist gezeigt:

Satz II.5.1 *Jede reelle Zahl $x \geq 0$ besitzt eine Dezimalbruchentwicklung.*

Wie sieht es mit der Eindeutigkeit aus? Im Jahr 2003 schickte die Sechstklässlerin Lina folgende Anfrage an `mathematik.de`, die Internetseite der Deutschen Mathematikervereinigung:

> Liebe MathematikerInnen,
> ich bin in der 6. Klasse und wir haben gerade periodische Dezimalbrüche durchgenommen. Wir haben gelernt: $1/9 = 0.111\dots$, $3/9 = 0.333\dots$ usw. Was aber ist dann $0.999\dots$? Unsere Lehrerin hat gesagt, das wäre $9/9$. Das kann aber doch nicht sein. Das wäre doch 1 und $0.999\dots$ ist ein Unendlichstel kleiner als 1. Gibt es $0.999\dots$ überhaupt? Aber eine Zahl, die ich mir ausdenken kann, muss es doch geben. Wie kommt man an $0.999\dots$?
> Ich würde mich über eine Antwort freuen.
>
> Lina

Wie würden Sie Linas Frage beantworten?
Wenn man beachtet, was $0.999\dots$ bedeutet, rechnet man schnell

$$0.999\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Genauso sieht man z.B.

$$0.24999\dots = \frac{1}{4} = 0.25000\dots;$$

es gibt also Zahlen mit nicht eindeutiger Dezimalbruchentwicklung. (Welche Entwicklung produziert das Argument von Satz II.5.1 für $x = \frac{1}{4}$?)

Satz II.5.2 *Eine reelle Zahl $x > 0$ hat eine eindeutig bestimmte Dezimalbruchentwicklung genau dann, wenn sie nicht von der Form $N.a_1a_2\dots a_n000\dots$ mit $a_n \neq 0$ ist; wenn doch, ist $N.a_1a_2\dots(a_n-1)999\dots$ die einzige weitere Dezimalbruchentwicklung.*

Beweis. Dass $N.a_1a_2\dots a_n000\dots$ und $N.a_1a_2\dots(a_n-1)999\dots$ dieselbe Zahl darstellen, rechnet man mit der geometrischen Reihe wie oben nach.

Nun sei $x > 0$ eine reelle Zahl mit den Dezimalbruchentwicklungen

$$N.a_1a_2a_3\dots \quad \text{und} \quad M.b_1b_2b_3\dots,$$

die verschieden sind. Indem man x durch eine geeignete Zehnerpotenz teilt, kann man ohne Einschränkung $N = M = 0$ annehmen. Ferner sei n der kleinste Index, wo sich die Darstellungen unterscheiden:

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \dots,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ a_n \neq b_n.$$

Wiederum ohne Einschränkung sei $a_n > b_n$. Nun ist einerseits

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_n}{10^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_n+1}{10^n},$$

denn

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10^n}.$$

Andererseits ist

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{a_n}{10^n}.$$

Daraus folgt $a_n \leq b_n + 1$, zusammen mit $b_n < a_n$ also $a_n = b_n + 1$, und für $k > n$ folgt $b_k = 9$ and $a_k = 0$. Damit ist gezeigt, dass die einzige Mehrdeutigkeit die im Satz genannte ist. □

Was hier über die Dezimalbruchentwicklung gesagt wurde, also über die Ziffernentwicklung zur Basis $g = 10$, kann genauso für *g-adische Entwicklungen* $\sum_{k=-s}^{\infty} \frac{a_k}{g^k}$ zu einer Basis $g \geq 2$, $g \in \mathbb{N}$, gezeigt werden. (Die Rolle der 9 übernimmt dann $g-1$.) In der Informatik sind $g = 2$ und $g = 16$ wichtig, in der reinen Mathematik auch $g = 3$: Die berühmte *Cantormenge*, eine fraktale Menge mit erstaunlichen Eigenschaften, besteht aus den Zahlen aus dem Intervall $[0,1]$, die im Dreiersystem ohne die Ziffer 1 geschrieben werden können, z.B. $\frac{1}{3}$ mit der Dreierentwicklung $0.0222\dots$ und $\frac{2}{3}$ mit der Dreierentwicklung $0.2000\dots$.

II.6 Häufungspunkte; Divergenz gegen ∞

Dieser Abschnitt enthält einige Ergänzungen zum Konvergenzbegriff.

Konvergenz einer Folge (a_n) gegen a bedeutet definitionsgemäß, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ für höchstens endlich viele n *nicht* erfüllt ist. Das ist aber nicht dasselbe wie die Aussage, dass sie für unendlich viele n erfüllt ist; wenn letzteres gilt, kann die Ungleichung trotzdem für unendlich viele n verletzt sein. Daher definiert man:

Definition II.6.1 Sei (a_n) eine Folge. Dann ist $a \in \mathbb{R}$ ein *Häufungspunkt* von (a_n), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für unendlich viele n gilt.

Klar ist, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge ein Häufungspunkt ist (und zwar der einzige), und für $a_n = (-1)^n$ sind 1 und -1 Häufungspunkte. Folgendes Kriterium ist nicht schwer einzusehen:

Satz II.6.2 *Genau dann ist $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von (a_n), wenn es eine Teilfolge (a_{n_k}) gibt, die gegen a konvergiert.*

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von (a_n). Als erstes wählen wir $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_{n_1} - a| < 1$ gilt. Dann betrachten wir die Umgebung $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ von a, die unendlich viele Folgenglieder enthält. Also können wir $n_2 > n_1$ mit $|a_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$ wählen. Da auch die Umgebung $(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3})$ unendlich viele Folgenglieder enthält, können wir $n_3 > n_2$ mit $|a_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$ wählen. So fortfahrend, erhalten wir eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ für alle k. Es folgt $a_{n_k} \to a$ nach dem Sandwichsatz II.1.8.

Umgekehrt sei (a_{n_k}) eine Teilfolge mit $a_{n_k} \to a$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein k_0 mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für $k \geq k_0$, also gilt die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ für unendlich viele n. □

Der Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz II.2.3) kann also auch so formuliert werden.

Satz II.6.3 *Jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.*

Es gilt sogar mehr.

Satz II.6.4 *Jede beschränkte Folge (a_n) hat einen kleinsten und einen größten Häufungspunkt, bezeichnet mit $\liminf_{n\to\infty} a_n$ („limes inferior“) bzw. $\limsup_{n\to\infty} a_n$ („limes superior“). Es gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1}\Bigl(\inf_{k\geq n} a_k\Bigr), \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1}\Bigl(\sup_{k\geq n} a_k\Bigr).$$

Beweis. Sei $A_n = \inf_{k\geq n} a_k$; dann ist (A_n) eine monoton wachsende beschränkte Folge, und daher existiert

$$A := \sup_n A_n = \sup_{n\geq 1}\Bigl(\inf_{k\geq n} a_k\Bigr).$$

Wir zeigen jetzt, dass A ein Häufungspunkt von (a_n) ist, dass aber keine Zahl $A' < A$ ein Häufungspunkt von (a_n) ist. Das beweist dann $A = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition eines Supremums existiert n_0 mit $A_{n_0} > A - \varepsilon$, deshalb ist $a_k > A - \varepsilon$ für alle $k \geq n_0$ nach Definition eines Infimums. Betrachte nun $A + \varepsilon$. Gäbe es nur endlich viele k mit $a_k < A + \varepsilon$, so sei n_1 das größte davon. Es wäre dann $a_k \geq A + \varepsilon$ für $k > n_1$ und deshalb $A_n \geq A + \varepsilon$ für $n > n_1$, also $A = \sup_n A_n \geq A_{n_1+1} \geq A + \varepsilon$ (Widerspruch!). Daher gilt die Ungleichung $a_k < A + \varepsilon$ unendlich oft, insbesondere gibt es unendlich viele $k \geq n_0$ mit $A - \varepsilon < a_k < A + \varepsilon$, und A ist ein Häufungspunkt der Folge (a_n).

Sei nun $A' < A$; dann ist A' keine obere Schranke der Folge (A_n), und es existiert n_2 mit $A_{n_2} > A'$. Insbesondere ist $a_n \geq A_{n_2} > A'$ für $n \geq n_2$, und für $\varepsilon' = A_{n_2} - A'$ enthält das Intervall $(A' - \varepsilon', A' + \varepsilon')$ höchstens endlich viele Glieder der Folge (a_n) (nämlich höchstens diejenigen mit $1 \leq n < n_2$). Daher ist A' kein Häufungspunkt von (a_n).

Die Aussage über den limes superior wird analog bewiesen. □

In dieser Sprache lautet die hinreichende Bedingung im Quotientenkriterium (Satz II.3.8)

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Ein anderes Thema: das Symbol ∞. Es gibt keine Zahl ∞, mit der man in der üblichen Weise rechnen kann. Trotzdem ist es manchmal praktisch, dieses Symbol zur Hand zu haben. Zum Beispiel setzt man für eine nicht nach oben beschränkte Teilmenge $A \neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$

$$\sup A = \infty$$

und für eine nicht nach unten beschränkte Teilmenge $A \neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$

$$\inf A = -\infty.$$

Ferner definiert man:

Definition II.6.5 Eine Folge (a_n) divergiert gegen ∞, wenn

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \qquad a_n \geq K;$$

in Zeichen $a_n \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Analog wird Divergenz gegen $-\infty$ erklärt (tun Sie's!). Für $a_n = n$ gilt $a_n \to \infty$, aber $a_n = (-1)^n n$ definiert eine divergente Folge, die weder gegen ∞ noch gegen $-\infty$ divergiert.

Die Grenzwertsätze II.1.4 und II.1.6 können jetzt übertragen werden; führen Sie den Beweis zur Übung.

Satz II.6.6 *Gelte $a_n \to \infty$, $b_n \to b$ mit $b \in \mathbb{R}$ oder $b = \infty$, und sei $\lambda > 0$.*

(a) *Es gilt $a_n + b_n \to \infty$.*

(b) *Es gilt $a_n b_n \to \infty$, wenn $b > 0$ oder $b = \infty$.*

(c) *Es gilt $\lambda a_n \to \infty$.*

Im Fall $b = 0$ kann man in (b) keine allgemeine Aussage treffen; vergleiche etwa $a_n = n$ und $b_n = \frac{r}{n}$ bzw. $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Analog zu Definition II.6.5 kann auch der *uneigentliche Häufungspunkt* ∞ erklärt werden (wie nämlich?).

Version vom 19. März 2021

Kapitel III

Stetige Funktionen

III.1 Grenzwerte bei Funktionen; Stetigkeit

Wir beginnen jetzt das systematische Studium von Funktionen einer reellen Veränderlichen. Eine *Funktion* $f\colon D \to W$ hat einen Definitionsbereich D, einen Wertebereich W (auch Wertevorrat genannt) und eine Abbildungsvorschrift $x \mapsto f(x)$. Bitte gewöhnen Sie sich von Anfang an an, die Funktion f und ihren Funktionswert $f(x)$ an der Stelle x zu unterscheiden! Beachten Sie, dass Funktionen mit derselben Abbildungsvorschrift, aber unterschiedlichem Definitions- oder Wertebereich verschieden sind! Zum Beispiel sind

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$$

verschiedene Funktionen, die ja auch unterschiedliche Eigenschaften haben: g ist injektiv, f aber nicht.

In dieser Vorlesung wird der Wertebereich in der Regel $\mathbb{R}$ und der Definitionsbereich ein Intervall oder eine Vereinigung von Intervallen sein. Man unterscheidet folgende Typen von Intervallen (im Folgenden sind $a, b \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R}\colon a \le x \le b\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}\colon a \le x\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R}\colon x \le b\}
\end{aligned}$$

sind abgeschlossene Intervalle, wovon das oberste beschränkt ist und die anderen beiden unbeschränkt sind;

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < b\} \\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}\colon a < x\} \\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R}\colon x < b\}
\end{aligned}$$

sind offene Intervalle, wovon das oberste beschränkt ist und die anderen beiden unbeschränkt sind;

$$\begin{aligned}(a,b] &= \{x \in \mathbb{R}\colon a < x \le b\}\\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R}\colon a \le x < b\}\end{aligned}$$

sind halboffene Intervalle. Beachten Sie $(a,a) = (a,a] = [a,a) = \emptyset$ und $[a,b] = \emptyset$ für $b < a$. Auch $\mathbb{R}$, das symbolisch als $(-\infty,\infty)$ geschrieben werden kann, ist ein offenes Intervall. In den obigen Definitionen nennt man a und b *Randpunkte* des jeweiligen Intervalls I und die übrigen Elemente von I *innere Punkte*. Beachten Sie, dass die Randpunkte nicht zum Intervall zu gehören brauchen.

Wir wollen einen Grenzwertbegriff $\lim_{x\to x_0} f(x)$ für Funktionen einführen, wobei, wie zum Beispiel bei $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, die Stelle x_0 nicht im Definitionsbereich von $f\colon D \to \mathbb{R}$ zu liegen braucht. Es reicht, dass x_0 im *Abschluss* von D liegt, d.h. es existiert eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$; wir schreiben $x_0 \in \overline{D}$. Jedes $x_0 \in D$ liegt also erst recht im Abschluss von D (wähle nämlich $x_n = x_0$ für alle n).

Definition III.1.1 Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und x_0 liege im Abschluss von D. Dann bedeutet

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0,$$

dass für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ auch $f(x_n) \to y_0$ gilt.

Beispiel III.1.2 Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Um das einzusehen, benutzen wir einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen aus der Schulmathematik. Zunächst gilt $\sin(-x) = -\sin x$ für alle x sowie für $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ (Skizze!)

$$\sin|x| \le |x| \le \tan|x| = \frac{\sin|x|}{\cos|x|}.$$

Daraus folgt für diese x

$$\cos|x| \le \frac{\sin|x|}{|x|} = \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Ferner ist für $|x| \le 1$

$$\cos|x| = \sqrt{1 - \sin^2|x|} \ge \sqrt{1 - |x|^2} \ge 1 - |x|;$$

die letzte Ungleichung sieht man durch die für $|x| \le 1$ äquivalente Umformung

$$\sqrt{1-|x|^2} \ge 1 - |x| \;\Leftrightarrow\; 1 - |x|^2 \ge (1-|x|)^2 \;\Leftrightarrow\; 2|x| \ge 2|x|^2.$$

Insgesamt hat man jetzt für $0 < |x| \leq 1$ die Abschätzung

$$1 - |x| \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1. \tag{III.1.1}$$

Ist nun (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $x_n \to 0$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $0 < |x_n| \leq 1$ für $n \geq N$; für diese x_n gilt also (III.1.1). Der Sandwichsatz II.1.8 impliziert $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$, was zu zeigen war.

Noch eine Bemerkung zu Definition III.1.1. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion; x_0 liege im Abschluss von D. Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ existiere $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Dann hängt der Grenzwert nicht von der Wahl der Folge ab: Ist nämlich $x_n \to x_0$ und $y_n \to x_0$ für zwei Folgen in D, so bilde die neue Folge $(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots)$. Dann konvergiert auch (z_n) gegen x_0, und die drei Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ und $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ existieren nach Voraussetzung. Aber $(f(x_n))$ und $(f(y_n))$ sind Teilfolgen von $(f(z_n))$; deshalb stimmen $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ und $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ beide mit $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ überein und sind deshalb gleich.

Die folgende Definition ist von zentraler Bedeutung.

Definition III.1.3 Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ (oder $f\colon D \to W \subset \mathbb{R}$) heißt *stetig bei* $x_0 \in D$, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Sie heißt *stetig auf* D, wenn sie an jeder Stelle stetig ist.

Explizit bedeutet Stetigkeit bei $x_0 \in D$ also

$$x_n \in D,\ x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0).$$

Eine intuitive Umschreibung wäre: „Wenn x nahe bei x_0 ist, liegt auch $f(x)$ nahe bei $f(x_0)$." Die Definition präzisiert, was „nahe bei" bedeutet; dazu siehe auch den Kommentar im Anschluss an Beispiel III.1.8.

Es ist außerdem zu beachten, dass die Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 nur an Stellen des Definitionsbereichs erklärt ist; daher ist die Aussage „Die durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definierte Funktion ist bei $x_0 = 0$ unstetig" sinnlos, denn 0 liegt nicht im Definitionsbereich von f.

Die ersten Beispiele stetiger Funktionen erhält man sofort mittels des nächsten Satzes.

Satz III.1.4 *Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ stetig. Dann sind die folgenden Funktionen auch bei x_0 stetig:*

(a) *$h_1 = f + g$, d.h. $h_1\colon D \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = f(x) + g(x)$;*
(b) *$h_2 = \lambda f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $h_2\colon D \to \mathbb{R}$, $h_2(x) = \lambda f(x)$;*
(c) *$h_3 = fg$, d.h. $h_3\colon D \to \mathbb{R}$, $h_3(x) = f(x)g(x)$;*
(d) *im Fall $g(x_0) \neq 0$ auch $h_4 = f/g$ mit dem Definitionsbereich $D' = \{x \in D\colon g(x) \neq 0\}$.*

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus den Konvergenzsätzen II.1.4 und II.1.6. □

In der Sprache der linearen Algebra besagen die Teile (a) und (b), dass die Funktionen von D nach $\mathbb{R}$, die bei x_0 stetig sind, einen Vektorraum bilden; speziell ist die Menge $C(D)$ aller stetigen Funktionen auf D ein Vektorraum.

Beispiele III.1.5 (a) Da die identische Funktion $x \mapsto x$ und die konstante Funktion $x \mapsto a_0$ klarerweise auf $\mathbb{R}$ stetig sind, folgt aus Satz III.1.4, dass jede Polynomfunktion

$$P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Ferner ist jede rationale Funktion, d.h. eine Funktion, die als Quotient zweier Polynomfunktionen P und Q darstellbar ist,

$$R\colon D \to \mathbb{R},\ R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

auf dem (maximalen) Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R}\colon Q(x) \neq 0\}$ stetig.

(b) In Beispiel II.3.12 und Abschnitt II.4 wurde die Funktion

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

eingeführt. Zeigen wir, dass exp auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Gelte also $x_n \to x_0$. Da für alle $k \in \mathbb{N}_0$ auch $\frac{x_n^k}{k!} \to \frac{x_0^k}{k!}$ gilt, könnte man versucht sein, Satz III.1.4(a) quasi unendlich oft anzuwenden, um $\exp(x_n) \to \exp(x_0)$ zu schließen. Dieses Argument ist aber nicht schlüssig, da Satz III.1.4(a) nur für zwei und ergo für endlich viele Summanden gilt, aber nicht unbedingt für unendlich viele. Stattdessen muss man anders argumentieren: Setze $y_n = x_n - x_0$, so dass $y_n \to 0$; insbesondere existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|y_n| < 1$ für $n \geq N$. Nun ist[1] für diese n

$$|\exp(y_n) - \exp(0)| = \Bigl|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_n^k}{k!}\Bigr| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_n|^k}{k!} \leq |y_n| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = (e-1)|y_n|. \quad \text{(III.1.2)}$$

Es folgt $\exp(y_n) \to \exp(0) = 1$. Mit Hilfe der Funktionalgleichung aus Satz II.4.4 erhält man jetzt

$$\exp(x_n) = \exp(y_n + x_0) = \exp(y_n)\exp(x_0) \to \exp(x_0),$$

und das zeigt die Stetigkeit von exp.

[1] Die folgende Rechnung benutzt die Dreiecksungleichung für unendliche Reihen (Aufgabe!): $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

(c) Für jeden mathematischen Begriff gilt, dass man ihn nur dann richtig durchdringt, wenn man auch einige auf den ersten Blick abstruse Beispiele und Gegenbeispiele kennen lernt. Das folgende Beispiel ist die *Dirichletsche Sprungfunktion*:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist an keiner Stelle stetig. Ist nämlich $x_0 \in \mathbb{Q}$, so findet man mit Hilfe von Satz I.2.4 eine Folge irrationaler Zahlen, die gegen x_0 konvergiert, aber natürlich konvergiert dann $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x_0)$. [Zur Konstruktion solch einer Folge wähle einfach irgendeine irrationale Zahl im Intervall $(x_0, x_0 + \frac{1}{n})$.] Analog argumentiert man für $x_0 \notin \mathbb{Q}$ (tun Sie's!).

(d) Eine Variante der Dirichletschen Sprungfunktion ist die folgende Funktion:

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x = 0, \\ \frac{1}{q} \text{ für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ als gekürzter Bruch}, \\ 0 \text{ für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dass g an rationalen Stellen unstetig ist, sieht man wie bei (c). Sei nun $x_0 \in [0,1]$, $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Wir untersuchen, wie weit $g(x)$ für $x \in [0,1]$ von $g(x_0)$ entfernt sein kann, genauer, für welche $x \in [0,1]$ bei gegebenem $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$|g(x) - g(x_0)| \geq \varepsilon$$

gilt. Das kann nur bei rationalen x vorkommen, und zwar genau bei solchen, bei denen in der gekürzten Darstellung $x = \frac{p}{q}$ der Nenner $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Das sind nur endlich viele q, und wegen $0 \leq x = \frac{p}{q} \leq 1$ gehören dazu auch nur endlich viele p. Daher ist

$$F = \{x \in [0,1]\colon |g(x) - g(x_0)| \geq \varepsilon\}$$

eine endliche Menge, und wir setzen $\delta = \min\{|x - x_0|\colon x \in F\} > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $\delta > 0$ wie oben gewählt. Sei (x_n) eine Folge in $[0,1]$ mit $x_n \to x_0$; dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_0| < \delta \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Konstruktionsgemäß kann ein solches x_n nicht in F liegen, also gilt

$$|g(x_n) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Das zeigt $g(x_n) \to g(x_0)$ und daher die Stetigkeit von g bei x_0.

(e) Wenngleich die uns interessierenden Definitionsbereiche Intervalle oder (endliche) Vereinigungen von Intervallen sind, ist in der Definition der Stetigkeit solch eine Einschränkung nicht vorgegeben; wir können also auch Funktionen auf $\mathbb{N}$ auf Stetigkeit untersuchen, zum Beispiel

$$\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \sigma(n) = \text{Anzahl der Teiler von } n.$$

Es ist für Novizen oft kontraintuitiv, aber trotzdem richtig, dass jede Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ stetig ist. Ist nämlich $x_0 \in \mathbb{N}$ und (x_n) eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $x_n \to x_0$, so muss (x_n) von einem gewissen n_0 ab konstant $= x_0$ sein; das sieht man sofort, wenn man die Definition der Konvergenz für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ anwendet. Daher ist auch $(f(x_n))$ schließlich konstant $= f(x_0)$, und insbesondere gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.

Eine weitere Permanenzaussage über stetige Funktionen gilt für Kompositionen. Sei allgemein $f\colon D \to W$ eine Funktion, dann ist das *Bild* einer Teilmenge $A \subset D$

$$f(A) := \{y \in W\colon \text{es existiert } x \in A \text{ mit } f(x) = y\};$$

z.B. gilt für die Dirichletsche Sprungfunktion aus Beispiel III.1.5(c) $f([0,1]) = \{0,1\}$, $f(\mathbb{Q}) = \{1\}$. Nun sei $g\colon D' \to W'$ eine weitere Funktion mit $f(D) \subset D'$. Dann ist die *Komposition* von f und g die wohldefinierte Funktion

$$g \circ f\colon D \to W',\ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Satz III.1.6 *Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig bei $x_0 \in D$, und setze $y_0 = f(x_0)$. Sei $g\colon D' \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(D) \subset D'$, und g sei stetig bei y_0. Dann ist $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig bei x_0.*

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$. Nach Voraussetzung gilt dann $f(x_n) \to y_0$. Da g stetig bei y_0 ist und $(f(x_n))$ eine Folge in D' ist, folgt $g(f(x_n)) \to g(y_0)$, d.h. $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$. □

Wir kommen zu einer wichtigen Umschreibung des Grenzwert- bzw. Stetigkeitsbegriffs.

Satz III.1.7 (ε-δ-Kriterium)
Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) *Sei $x_0 \in \overline{D}$. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - y_0| < \varepsilon. \tag{III.1.3}$$

(b) *Sei $x_0 \in D$. Dann ist f genau dann bei x_0 stetig, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{III.1.4}$$

Beweis. Da (b) aus (a) folgt, ist nur (a) zu beweisen. Es sind zwei Dinge zu zeigen („genau dann, wenn“): Aus (III.1.3) folgt die Grenzwertbeziehung, und aus der Grenzwertbeziehung folgt (III.1.3).

Ersteres ist einfacher, und wir beginnen damit. Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$; es ist $f(x_n) \to y_0$ zu zeigen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ gemäß (III.1.3). Wegen $x_n \to x_0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_0| < \delta \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Für diese n gilt nach (III.1.3) $|f(x_n) - y_0| < \varepsilon$, d.h.

$$|f(x_n) - y_0| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Das war zu zeigen.

Nun zur schwierigeren Umkehrung. Wir führen einen Beweis per Kontraposition und nehmen an, dass (III.1.3) nicht gilt. Letzteres bedeutet in Quantorenschreibweise:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in D \quad |x - x_0| < \delta, \; |f(x) - y_0| \geq \varepsilon.$$

Speziell können wir für das „Versager"-ε die δ-Werte $\frac{1}{n}$ ansetzen, die sich ergebenden x-Werte sollen x_n heißen, da sie ja von n bzw. $\frac{1}{n}$ abhängen. Also:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in D \quad |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \; |f(x_n) - y_0| \geq \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich einerseits $x_n \to x_0$, aber andererseits $f(x_n) \not\to y_0$. Daher gilt *nicht* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. □

Beispiele III.1.8 (a) Wir wissen bereits, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, bei $x_0 = 2$ stetig ist. Das soll nun auch mit dem ε-δ-Kriterium verifiziert werden. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ist also ein $\delta > 0$ gesucht mit

$$|x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Nun ist $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, und wenn $|x - 2| < 1$ ist, ist $1 < x < 3$, also $3 < x + 2 < 5$. Ist also $|x - 2| < \delta$ für ein einstweilen hypothetisches $\delta \leq 1$ erfüllt, gilt auch $|x^2 - 4| < 5\delta$. Nun ist klar, welches δ zu wählen ist, nämlich $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$ klappt: Für dieses δ folgt ja aus $|x-2| < \delta$, dass $|x^2-4| < 5\delta \leq \varepsilon$.

(b) In Beispiel III.1.5(b) wurde gezeigt, dass die exp-Funktion bei $x_0 = 0$ stetig ist, und daraus wurde die Stetigkeit an jeder anderen Stelle abgeleitet. Versuchen wir, die Stetigkeit bei $x_0 = 0$ mit dem ε-δ-Kriterium einzusehen. Die Vorarbeiten dazu wurden bereits in (III.1.2) erledigt, denn dort wurde

$$|\exp(x) - 1| \leq (e-1)|x| \quad \text{für } |x| < 1$$

gezeigt. Also ist bei $x_0 = 0$ das ε-δ-Kriterium mit $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{e-1}\}$ erfüllt.

(c) Wenn man jetzt Beispiel III.1.5(d) noch einmal ansieht, stellt man fest, dass der Beweisgang dort primär das ε-δ-Kriterium verifiziert.

Das ε-δ-Kriterium gibt die der Stetigkeit zugrundeliegende Intuition („Wenn x nahe bei x_0 ist, liegt auch $f(x)$ nahe bei $f(x_0)$.") quantitativ präzise wieder.

Ob es bei Stetigkeitsaussagen vorteilhafter ist, die Folgenversion oder das ε-δ-Kriterium anzuwenden, ist im Einzelfall zu entscheiden; In Beispiel III.1.8 ist bei (a) die Folgendefinition einfacher und bei (b) und (c) das ε-δ-Kriterium. Daher ist es wichtig, über beide Varianten zu verfügen.

Der folgende Satz wäre mit der Folgendefinition schwieriger zu zeigen; versuchen Sie's trotzdem!

Satz III.1.9 *Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig bei $x_0 \in D$; es gelte $f(x_0) > 0$. Dann existieren ein $\eta > 0$ und eine „δ-Umgebung“ $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit einem $\delta > 0$, so dass*

$$f(x) > \eta \quad \textit{für } x \in U_\delta(x_0) \cap D.$$

Beweis. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$ und bestimme $\delta > 0$ gemäß (III.1.4). Für $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ gilt dann

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) > -\varepsilon + f(x_0) = \frac{1}{2} f(x_0).$$

Die Behauptung stimmt also für $\eta = \frac{1}{2} f(x_0)$. □

Im Hinblick auf die Relevanz für die Schulmathematik betrachten wir jetzt noch einseitige Grenzwerte und Unstetigkeitsstellen. Seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass ein geeignetes Intervall (x_0, b) Teilmenge von D ist. Dann sagt man, dass der *rechtsseitige Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

existiert, wenn für alle Folgen (x_n) in (x_0, b) der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existiert. Wie vor Definition III.1.3 ausgeführt, hängt der Wert dieses Grenzwerts nicht von der Folge (x_n) ab; lautet er y_0, schreibt man

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = y_0.$$

Analog führt man den linksseitigen Grenzwert $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ein.

Als Beispiel betrachte die *Vorzeichenfunktion*

$$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x/|x| & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann gelten

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1, \quad \operatorname{sgn}(0) = 0.$$

Der Zusammenhang zum Stetigkeitsbegriff ist so (der Einfachheit halber betrachten wir Funktionen auf Intervallen):

Satz III.1.10 *Sei I ein Intervall, und sei x_0 ein innerer Punkt von I. Dann ist eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann stetig bei x_0, wenn*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Beweis. Wenn f bei x_0 stetig ist, gilt für alle Folgen in I mit $x_n \to x_0$, dass $f(x_n) \to f(x_0)$, also erst recht für solche, die stets $> x_0$ oder stets $< x_0$ sind.

Umgekehrt seien beide einseitigen Grenzwerte $= f(x_0)$, und sei (x_n) eine Folge in I mit $x_n \to x_0$. Setze

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{für } x_n > x_0, \\ x_0 & \text{für } x_n \leq x_0. \end{cases} \qquad z_n = \begin{cases} x_0 & \text{für } x_n \geq x_0, \\ x_n & \text{für } x_n < x_0. \end{cases}$$

Aus der Voraussetzung über die einseitigen Grenzwerte folgt $f(y_n) \to f(x_0)$, $f(z_n) \to f(x_0)$; beachten Sie, dass stets $y_n \geq x_0$ (aber möglicherweise nicht $y_n > x_0$, dann ist aber sowieso $f(y_n) = f(x_0)$). Daher ist

$$|f(x_n) - f(x_0)| = \begin{cases} |f(y_n) - f(x_0)| & \text{für } x_n > x_0, \\ 0 & \text{für } x_n = x_0, \\ |f(z_n) - f(x_0)| & \text{für } x_n < x_0. \end{cases}$$

Auf jeden Fall existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0,$$

was zu zeigen war. □

Genauso gilt:

Satz III.1.11 *Die Funktion f sei auf $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ erklärt. Dann existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ genau dann, wenn $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existieren und übereinstimmen.*

Jetzt können wir Unstetigkeitsstellen einer Funktion klassifizieren.

Definition III.1.12 Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall, und sei x_0 ein innerer Punkt von I.

(a) Wenn beide einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existieren und gleich, aber von $f(x_0)$ verschieden sind, also $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$, heißt x_0 eine *hebbare Unstetigkeitsstelle*.

(b) Wenn beide einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existieren und verschieden sind, also $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, heißt x_0 eine *Unstetigkeitsstelle 1. Art* oder *Sprungstelle*.

(c) Wenn einer der einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ nicht existiert, heißt x_0 eine *Unstetigkeitsstelle 2. Art*.

Es ist in der Literatur nicht ganz einheitlich, ob in (b) der Wert ∞ bzw. $-\infty$ als Grenzwert zugelassen ist. Ist f auf $I \setminus \{x_0\}$ definiert und gilt $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ sowie $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x\to x_0^-} f(x) =$

$-\infty$, nennt man x_0 auch eine *Polstelle* von f (obwohl f bei x_0 gar nicht definiert ist); Beispiel: $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = 1/x$.

Ein Beispiel für (a) ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ und $f(x) = x^2$ für $x \neq 0$. Die Unstetigkeitsstelle $x_0 = 0$ ist insofern hebbar, als die bei x_0 umdefinierte Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(x) = x^2$ für $x \neq 0$ stetig bei x_0 ist. (Das Problem der Unstetigkeit von f bei x_0 war, dass f dort gewissermaßen „falsch" definiert war.)

Ein Beispiel für (b) ist die Vorzeichenfunktion von Seite 56.

Ein Beispiel für (c) ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ und $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$. Hier existieren die einseitigen Grenzwerte bei 0 nicht; z.B. $f(\frac{1}{2\pi n}) = 0$, $f(\frac{2}{4\pi n + \pi}) = 1$. Wie sieht der Graph von f aus? – Ein weiteres Beispiel für (c) ist die Dirichletsche Sprungfunktion aus Beispiel III.1.5(c); hier ist jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Unstetigkeitsstelle 2. Art.

Zum Schluss noch zu den Grenzwerten $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; diese sind in Analogie zu Definition III.1.1 mit Hilfe der Divergenz gegen $\pm\infty$ (Definition II.6.5) erklärt. Zum Beispiel bedeutet

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0,$$

dass

$$x_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to y_0;$$

hier ist vorausgesetzt, dass f (mindestens) auf einem Intervall (a, ∞) erklärt ist. (Das schließt den Fall $y_0 = \infty$ oder $y_0 = -\infty$ ein.) Beispiel: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

III.2 Sätze über stetige Funktionen

In diesem Abschnitt werden die drei Hauptsätze für stetige Funktionen auf Intervallen bewiesen. Diese Aussagen hat man vor der strengen Begründung der Analysis durch Cauchy, Dirichlet, Weierstraß und andere als selbstverständlich angenommen; heute halten wir es für selbstverständlich, solche Aussagen zu beweisen.

Beginnen wir mit dem *Zwischenwertsatz.*

Satz III.2.1 (Zwischenwertsatz)
Seien I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \neq f(b)$. Sei c eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.

Dass c „zwischen $f(a)$ und $f(b)$" liegt, bedeutet $c \in (f(a), f(b))$, falls $f(a) < f(b)$, und $c \in (f(b), f(a))$, falls $f(a) > f(b)$. Es ist also behauptet, dass eine stetige Funktion jeden „Zwischenwert" annimmt.

Beweis. Wir benutzen die „Teile-und-herrsche-Methode" (vgl. Satz II.2.3). Ohne Einschränkung gelte $f(a) < f(b)$, also $f(a) < c < f(b)$.

Wir setzen zuerst $a_0 = a$, $b_0 = b$, $m_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$. Falls $f(m_0) = c$, sind wir fertig und setzen $\xi = m_0$. Andernfalls ist $f(m_0) < c$ oder $f(m_0) > c$. Im ersten Fall setzen wir $a_1 = m_0$, $b_1 = b_0$ und im zweiten $a_1 = a_0$, $b_1 = m_0$. In jedem Fall haben wir ein Teilintervall $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ der Länge $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$ mit $f(a_1) < c < f(b_1)$ gefunden.

Nun wiederholen wir dieses Argument, ausgehend vom Intervall $[a_1, b_1]$. Wir setzen $m_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$; sollte $f(m_1) = c$ sein, sind wir wieder fertig. Im Fall $f(m_1) < c$ setzen wir $a_2 = m_1$, $b_2 = b_1$, und im Fall $f(m_1) > c$ setzen wir $a_2 = a_1$, $b_2 = m_1$. In jedem Fall haben wir ein Teilintervall $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ der Länge $b_2 - a_2 = \frac{1}{4}(b - a)$ mit $f(a_2) < c < f(b_2)$ gefunden.

So fortfahrend definieren wir Zahlen $m_0, m_1, m_2, \dots$ sowie $a_0, a_1, a_2, \dots$ und $b_0, b_1, b_2, \dots$. Sollte man auf ein m_k mit $f(m_k) = c$ stoßen, setzt man $\xi = m_k$. Andernfalls hat man zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit folgenden Eigenschaften definiert: (a_n) ist monoton wachsend, (b_n) ist monoton fallend, und es ist stets $a_n < b_n$, $f(a_n) < c < f(b_n)$ sowie $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$. Wegen Satz II.2.1 sind (a_n) und (b_n) konvergent, und wegen $b_n - a_n \to 0$ haben sie den gleichen Grenzwert. Wir setzen

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n;$$

nun wollen wir $f(\xi) = c$ zeigen.

Wegen $a \le a_n \le b$ ist $\xi \in [a, b]$, und $f(\xi)$ ist definiert. Da f stetig bei ξ ist, folgt $f(a_n) \to f(\xi)$ und $f(b_n) \to f(\xi)$. Wegen $f(a_n) < c$ muss für den Grenzwert $f(\xi) \le c$ folgen, und wegen $f(b_n) > c$ muss für den Grenzwert $f(\xi) \ge c$ folgen (vgl. Satz II.1.7). Insgesamt ist $f(\xi) = c$ gezeigt. □

Eine etwas sorgfältigere Redaktion dieses Beweises hätte eine explizite Konstruktion der Folgen (a_n), (b_n) und (m_n) durch Induktion angegeben, statt „so fortfahrend …“ zu schreiben. Lesen Sie diese präzise Darstellung in der Literatur nach (z.B. Forster, § 11)!

Wegen der Bedeutung des Zwischenwertsatzes soll noch eine zweite Beweismethode skizziert werden. Wieder gehen wir von $f(a) < c < f(b)$ aus. Diesmal definiert man

$$Z = \{x \in [a, b] \colon f(x) \le c\}$$

und setzt $\xi = \sup Z$. Beachte, dass Z nach oben beschränkt ist (durch b) und nicht leer ist ($a \in Z$). Dann ist $\xi \in [a, b]$, und man zeigt mit Hilfe von Satz III.1.9, dass weder $f(\xi) < c$ noch $f(\xi) > c$ gilt. (Tun Sie's!) Es bleibt also nur $f(\xi) = c$ übrig.

Wenn man beide Beweismethoden vergleicht, stellt man fest, dass der erste Beweis konstruktiv ist, der zweite aber nicht. Im ersten Beweis haben wir einen Algorithmus, der eine c-Stelle nach n Schritten bis auf einen Fehler von $\frac{1}{2^n}(b-a)$ approximiert; im zweiten Beweis haben wir so etwas nicht. Dafür liefert der zweite Beweis die Existenz der größten c-Stelle. (Wie müsste man den Beweis modifizieren, um die kleinste c-Stelle zu erhalten?)

Den Zwischenwertsatz kann man griffig so umschreiben (Begründung?):

- *Eine stetige Funktion bildet Intervalle auf Intervalle ab.*

Hier ist ein wichtiger Spezialfall des Zwischenwertsatzes.

Korollar III.2.2 (Nullstellensatz)
Seien I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$, $a < b$. $f(a)$ und $f(b)$ sollen unterschiedliche Vorzeichen haben; eine dieser beiden Zahlen sei also positiv und die andere negativ. Dann besitzt f zwischen a und b eine Nullstelle.

Dies ist natürlich der Spezialfall $c = 0$ des Zwischenwertsatzes. Umgekehrt kann man übrigens den Zwischenwertsatz aus dem Nullstellensatz ableiten: Sind nämlich f und c wie im Zwischenwertsatz, braucht man den Nullstellensatz nur auf die Funktion $\tilde{f} = f - c$ anzuwenden.

Nun können wir ein in Kapitel I gemachtes Versprechen einlösen.

Satz III.2.3 *Ist $c \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so existiert genau eine Zahl $\xi \geq 0$ mit $\xi^n = c$; Bezeichnung $\xi = \sqrt[n]{c}$.*

Beweis. Zuerst zur Existenz von ξ. Die Fälle $c = 0$ oder $c = 1$ bzw. $n = 1$ sind klar; seien also $n \geq 2$, $0 < c < 1$ oder $c > 1$. Wir betrachten die stetige Funktion $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Ist $c < 1$, so ist $1^n > c$; ist $c > 1$, so ist $c^n > c$. Also ist für $b = 1$ bzw. $b = c$

$$f(0) < c < f(b),$$

und der Zwischenwertsatz garantiert die Existenz einer Stelle ξ mit $\xi^n = c$.

Die Eindeutigkeit folgt aus der Implikation („Monotonie“)

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2). \qquad \square$$

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn ihr Bild $f(D)$ nach oben beschränkt ist; sie heißt *nach unten beschränkt*, wenn ihr Bild $f(D)$ nach unten beschränkt ist; und sie heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Der nächste Satz wird auch *Satz vom Maximum und Minimum* genannt.

Satz III.2.4 *Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt, und das Supremum und das Infimum von $f(I)$ werden angenommen; mit anderen Worten existieren ξ_1 und ξ_2 in $[a, b]$ mit*

$$f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2) \quad \textit{für alle } x \in [a, b].$$

Es ist also

$$f(\xi_1) = \min\{f(x)\colon a \leq x \leq b\}, \quad f(\xi_2) = \max\{f(x)\colon a \leq x \leq b\}.$$

Beweis. Zeigen wir, dass f nach oben beschränkt ist und dass $\sup f(I)$ angenommen wird. Wäre f nicht nach oben beschränkt, gäbe es Elemente $x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) \to \infty$. Als beschränkte Folge besitzt (x_n) nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz II.2.3) eine konvergente Teilfolge; sagen wir $x_{n_k} \to x_0$. Wegen $a \le x_{n_k} \le b$ ist auch $a \le x_0 \le b$, also $x_0 \in I$. Nun ist f nach Voraussetzung bei x_0 stetig, und es folgt $f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in \mathbb{R}$; andererseits gilt nach Konstruktion auch für die Teilfolge $f(x_{n_k}) \to \infty$. Dieser Widerspruch beweist, dass f nach oben beschränkt ist.

Um zu zeigen, dass $\sup f(I)$ angenommen wird, argumentiert man ganz ähnlich. Es existiert zunächst eine Folge von Zahlen $y_n \in [a,b]$ mit $f(y_n) \to \sup f(I)$. Wieder gibt es eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $[a,b]$, etwa $y_{n'_k} \to \xi_2$. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(y_{n'_k}) \to f(\xi_2)$, und die Eindeutigkeit des Grenzwerts liefert $f(\xi_2) = \sup f(I)$.

Die Aussage über das Infimum wird analog bewiesen (tun Sie's!). Alternativ kann man auch den ersten Teil auf $-f$ anwenden; auch das sollten Sie nachvollziehen! □

Machen Sie sich durch Beispiele klar, dass die Aussagen von Satz III.2.4 nicht zu gelten brauchen, wenn das Intervall abgeschlossen, aber nicht beschränkt oder beschränkt, aber nicht abgeschlossen ist.

Der dritte Hauptsatz betrifft die Umkehrfunktion. Beginnen wir mit dem allgemeinen Begriff. Ist $f\colon D \to W$ eine bijektive Funktion, so existiert zu jedem $x \in W$ *genau ein* $x' \in D$ mit $f(x') = x$. Daher ist die Funktion

$$g\colon W \to D,\ g(x) = \text{dasjenige } x' \in D \text{ mit } f(x') = x$$

wohldefiniert; wer's lieber mit Formeln schreibt, beachte

$$g(x) = x' \quad \Leftrightarrow \quad f(x') = x.$$

Die Funktion g ist die *Umkehrfunktion* zu f; es gilt

$$(g \circ f)(x) = x \text{ für alle } x \in D, \quad (f \circ g)(x) = x \text{ für alle } x \in W.$$

Wir benötigen den Begriff der monotonen Funktion. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f *streng monoton wachsend*, wenn

$$x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2);$$

f heißt *monoton wachsend*, wenn

$$x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2);$$

f heißt *streng monoton fallend*, wenn

$$x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2);$$

und f heißt *monoton fallend*, wenn

$$x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Eine monotone Folge ist also nichts anderes als eine monotone Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$.

Wie schon im Beweis von Satz III.2.3 beobachtet, ist $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ (wobei $n \in \mathbb{N}$), ein Beispiel einer streng monoton wachsenden Funktion.

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass eine streng monotone Funktion injektiv ist; daher existiert für eine solche Funktion f die Umkehrfunktion g mit Definitionsbereich $f(D)$. Wir werden sowohl f als auch g als Funktionen mit Wertevorrat $\mathbb{R}$ auffassen: $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon f(D) \to \mathbb{R}$; das Bild $f(D)$ bzw. $g(f(D))$ braucht natürlich nicht ganz $\mathbb{R}$ zu sein.

Satz III.2.5 (Satz von der Umkehrfunktion)
Sei I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann ist $J := f(I)$ ein Intervall, die Umkehrfunktion $g\colon J \to \mathbb{R}$ existiert, und g ist stetig und im selben Sinn streng monoton wie f.

Beweis. Das einzige, was noch nicht begründet ist, ist die Stetigkeit und die strenge Monotonie von g; dass J ein Intervall ist, folgt ja aus dem Zwischenwertsatz (vgl. Seite 60).

Ohne Einschränkung sei f streng monoton wachsend; der andere Fall wird analog behandelt oder durch Betrachten von $-f$ auf diesen zurückgeführt. (Tun Sie's!) Sei $x_0 \in J$, und sei (x_n) eine Folge in J mit $x_n \to x_0$. Es existieren dann eindeutig bestimmte Elemente $x'_n \in I$ ($n \in \mathbb{N}_0$) mit $f(x'_n) = x_n$, also $g(x_n) = x'_n$. Es ist $x'_n \to x'_0$ zu zeigen.

Wäre dies falsch, gäbe es ein $\varepsilon' > 0$, so dass $|x'_n - x'_0| \geq \varepsilon'$ für unendlich viele n gilt; deshalb ist mindestens eine der Mengen $N_1 = \{n\colon x'_n - x'_0 \geq \varepsilon'\}$ bzw. $N_2 = \{n\colon x'_n - x'_0 \leq -\varepsilon'\}$ unendlich. Ohne Einschränkung soll N_1 unendlich sein; es gibt dann eine Teilfolge (x'_{n_k}) mit $x'_{n_k} \geq x'_0 + \varepsilon'$ für alle k. Dann ist aber

$$x_{n_k} = f(x'_{n_k}) \geq f(x'_0 + \varepsilon') > f(x'_0) = x_0,$$

wobei die $>$-Relation aus der strengen Monotonie folgt. Das liefert

$$x_{n_k} - x_0 \geq \varepsilon := f(x'_0 + \varepsilon') - f(x'_0) > 0 \quad \text{für alle } k$$

im Widerspruch zu $x_{n_k} \to x_0$. (Warum ist $x'_0 + \varepsilon'$ im Definitionsbereich I von f?)

Wenn f streng monoton wächst, so auch g: Seien nämlich $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$. Setze $x'_1 = g(x_1)$, $x'_2 = g(x_2)$. Wäre $x'_1 \geq x'_2$, folgte aus der Monotonie von f, dass $f(x'_1) \geq f(x'_2)$, d.h. $x_1 \geq x_2$ im Widerspruch zur Wahl von x_1 und x_2. □

Wo ging eigentlich die Stetigkeit von f in diesem Beweis ein?

In Satz III.2.3 hatten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Existenz n-ter Wurzeln bewiesen. Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^n$, ist nach Satz III.2.3 surjektiv; außerdem ist sie streng monoton wachsend, und ihre Umkehrfunktion ist $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Daher liefert Satz III.2.5 insbesondere:

Korollar III.2.6 *Die Funktion* $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$, *ist stetig und streng monoton wachsend.*

III.3 Die Exponentialfunktion

Wir haben schon in Beispiel III.1.5(b) die Stetigkeit der exp-Funktion nachgewiesen. Wir wollen jetzt die Umkehrbarkeit untersuchen und stellen folgende Eigenschaften zusammen.

Satz III.3.1

(a) $\exp(0) = 1$.

(b) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(d) exp *ist streng monoton wachsend und stetig.*

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

(f) *Das Bild von* exp *ist* $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$.

Beweis. (a) folgt durch Einsetzen von $x = 0$ in die exp definierende Reihe.

(b) Aus der Funktionalgleichung, Satz II.4.4, folgt

$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x).$$

(c) Aus der Definition von exp ist klar, dass $\exp(x) > 0$ für alle $x \geq 0$ (sogar $\exp(x) \geq 1$); wegen (b) gilt $\exp(x) > 0$ auch für $x < 0$.

(d) Die Stetigkeit wurde bereits in Beispiel III.1.5(b) bewiesen. Dass exp monoton wächst, sieht man so: Wenn $x_1 < x_2$ ist, ist

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + (x_2 - x_1)) = \exp(x_1)\exp(x_2 - x_1) > \exp(x_1);$$

im letzten Schritt wurden (c) und $\exp(x) > 1$ für $x > 0$ benutzt.

(e) Für $x_n > 0$ ist $\exp(x_n) = 1 + x_n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!} > x_n$; also folgt aus $x_n \to \infty$ auch $\exp(x_n) \to \infty$. Gilt $x_n \to -\infty$, so gilt $-x_n \to \infty$ und deshalb $\exp(-x_n) \to \infty$. Teil (b) zeigt $\exp(x_n) \to 0$. (Schreiben Sie die Details des Arguments auf!)

(f) Das folgt aus (c) und (e) mit Hilfe des Zwischenwertsatzes (wie nämlich?). □

Aus Satz III.3.1 und Satz III.2.5 folgt die Existenz der Umkehrfunktion von exp; dies ist die *Logarithmusfunktion* log (manchmal auch mit ln bezeichnet). Sie hat folgende Eigenschaften.

Definitionsgemäß ist $\log x = y$ genau dann, wenn $\exp(y) = x$ ist, sowie $\log(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\exp(\log x) = x$ für alle $x > 0$.

Satz III.3.2

(a) $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.*

(b) $\log 1 = 0$*,* $\log x > 0$ *für* $x > 1$*,* $\log x < 0$ *für* $0 < x < 1$*.*

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$*,* $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$*.*

(d) $\log(xy) = \log x + \log y$ *für alle* $x, y > 0$*.*

Beweis. (a) folgt aus Satz III.2.5.

(b) $\log 1 = 0$, da $\exp(0) = 1$. Die übrigen Behauptungen ergeben sich aus der strengen Monotonie von log.

(c) folgt wiederum aus der strengen Monotonie und daraus, dass das Bild von log der Definitionsbereich von exp ist.

(d) Setze $x' = \log x$ und $y' = \log y$. Dann ist

$$\exp(x' + y') = \exp(x')\exp(y') = xy = \exp(\log(xy)),$$

also wegen der Injektivität von exp

$$x' + y' = \log(xy).$$

Das war zu zeigen. □

Die Funktionalgleichung von exp

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$

erinnert an das Potenzgesetz

$$a^{x+y} = a^x a^y.$$

Im deduktiven Aufbau der Analysis ist zwar a^2 erklärt (das ist $a \cdot a$), aber nicht allgemein a^x (was ist $2^{\sqrt{2}}$?). Das können wir jetzt mit Hilfe der exp-Funktion nachholen.

Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ setze

$$\exp_a(x) = \exp(x \log a).$$

Satz III.3.3 *Sei* $a > 0$*.*

(a) $\exp_a$ *ist stetig und streng monoton wachsend für* $a > 1$*, aber stetig und streng monoton fallend für* $0 < a < 1$*.*

(b) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

(c) $\exp_a(0) = 1$*.*

(d) *Für* $n \in \mathbb{N}$ *ist* $\exp_a(n) = a^n$ *und* $\exp_a(-n) = \frac{1}{a^n}$*.*

(e) *Für* $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *(mit* $p \in \mathbb{Z}$ *und* $q \in \mathbb{N}$*) ist* $\exp_a(x) = \sqrt[q]{a^p}$*.*

Beweis. (a)–(c) folgen sofort aus den entsprechenden Aussagen über exp.

(d) Da $\exp_a(1) = \exp(\log a) = a$ und wegen (b) $\exp_a(-1) = \frac{1}{a}$ ist, folgt die Behauptung leicht durch vollständige Induktion. (Wie nämlich?)

(e) Nach (b) ist $[\exp_a(\frac{p}{q})]^q = \exp_a(p) = a^p$, d.h. $\exp_a(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p}$. □

Nun kommt die Pointe des Ganzen.

Definition III.3.4 Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ setze

$$a^x := \exp_a(x) = \exp(x \log a).$$

Speziell ist

$$e^x = \exp(x),$$

denn $\log e = 1$, da ja $\exp(1) = e$, siehe Beispiel II.3.12.

Mit Hilfe der Funktionen exp, log und $\exp_a$ ist es also gelungen, die „naive“ Definition von a^x für $x \in \mathbb{Q}$ aus der Schulmathematik neu zu fassen und auf beliebige reelle Exponenten auszudehnen, und dadurch ist es z.B. möglich zu sagen, was $(\sqrt{2})^\pi$ eigentlich ist (vorausgesetzt, man weiß, was π ist...). Wir beobachten noch

$$\log a^x = x \log a,$$

da $\log a^x = \log \exp(x \log a) = x \log a$.

Übrigens wirft das ein neues Licht auf Beispiel II.1.2(e), d.h. $\sqrt[n]{a} \to 1$; wegen $\sqrt[n]{a} = \exp_a(\frac{1}{n})$ folgt das nun aus der Stetigkeit von $\exp_a$.

Für $a \neq 1$ ist $\exp_a$ streng monoton, und zwar wachsend für $a > 1$ und fallend für $0 < a < 1$.

Die Umkehrfunktion von $\exp_a$ (für $a \neq 1$) wird mit $\log_a$ bezeichnet; traditionell ist $a = 10$ wichtig („dekadischer Logarithmus“; man schreibt lg statt $\log_{10}$) und in der diskreten Mathematik und Informatik $a = 2$ („dyadischer Logarithmus“).

Beachten Sie, dass Satz III.3.3 die Potenzgesetze

$$a^0 = 1, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

kodiert.

Halten wir noch ein weiteres Potenzgesetz fest.

Satz III.3.5 *Seien* $a > 0$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$*. Dann ist*

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Beweis. $(a^x)^y = \exp(y \log a^x) = \exp(yx \log a) = a^{xy}$. ☐

Der Satz impliziert noch

$$a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p,$$

denn für $b = \sqrt[q]{a}$ ist $(b^p)^q = b^{pq} = (b^q)^p = a^p$ und deshalb $(\sqrt[q]{a})^p = b^p = \sqrt[q]{a^p} = a^{p/q}$, was zu zeigen war.

Bisher haben wir a^x als Funktion von x betrachtet; wir können den Spieß auch umdrehen.

Satz III.3.6 *Für $a \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto x^a$ eine stetige Funktion auf $(0, \infty)$. Sie ist streng monoton wachsend für $a > 0$ und streng monoton fallend für $a < 0$. Es gilt*

$$\lim_{x\to\infty} x^a = \infty \textit{ für } a > 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^a = 0 \textit{ für } a < 0.$$

Beweis. Das folgt aus der Darstellung $x^a = \exp(a \log x)$; verwende Satz III.1.6. ☐

Seien $a > 1$ und $b > 0$. Dann gilt sowohl $a^x \to \infty$ als auch $x^b \to \infty$ für $x \to \infty$. Was wächst schneller?

Satz III.3.7 *Für $a > 1$ und $b > 0$ gilt*

$$\frac{a^x}{x^b} \to \infty \quad \textit{für } x \to \infty.$$

Kurz: Jede Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq b$. Dann ist für $x > 0$ wegen $\log a > 0$

$$a^x = \exp(x \log a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \log a)^k}{k!} \geq \frac{(x \log a)^{n+1}}{(n+1)!} = cx^{n+1}$$

mit einer von x unabhängigen Konstanten $c > 0$, sowie für $x \geq 1$

$$x^b = \exp(b \log x) \leq \exp(n \log x) = x^n.$$

Also ist für $x \geq 1$

$$\frac{a^x}{x^b} \geq \frac{cx^{n+1}}{x^n} = cx \to \infty \text{ für } x \to \infty.$$ ☐

III.4 Die trigonometrischen Funktionen

Im letzten Abschnitt haben Sie die moderne Einführung der e-Funktion mittels der Exponentialreihe kennen gelernt. Jetzt wollen wir uns der Sinus- und Kosinusfunktion widmen. Auch diese Funktionen werden heute – ahistorisch – durch unendliche Reihen definiert, nämlich

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \tag{III.4.1}$$

Diesen Weg wollen wir in der Analysis II gehen.

In einigen Beispielen haben wir sin und cos auf der Basis von schulmathematischem Vorwissen schon benutzt. Ausgehend davon formulieren wir drei Grundeigenschaften von sin und cos, die unsere Basis sind; alle anderen Eigenschaften sollen daraus abgeleitet werden. Es sei betont, dass man bei den trigonometrischen Funktionen immer im Bogenmaß rechnet, nie im Gradmaß (mit der möglichen Ausnahme der elementaren Dreieckstrigonometrie).

Grundeigenschaften von Sinus und Kosinus. *Es gibt zwei Funktionen* sin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, die folgende Bedingungen erfüllen.*

(a) $\cos 0 = 1$*, und es gibt eine kleinste positive Zahl* $\wp$ *mit* $\cos \wp = 0$*. Die Zahl* π *wird als das Doppelte dieser Zahl* $\wp$ *definiert, also* $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

(b) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y. \end{aligned}$$

(c) *Für* $0 < x < \pi/2$ *gelten die Ungleichungen*

$$0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{III.4.2}$$

Beachten Sie, dass (III.4.2) in Beispiel III.1.2 verwendet wurde.

In der Analysis II werden wir zeigen, dass die in (III.4.1) definierten Funktionen diesen Grundannahmen genügen; insbesondere enthält (a) die Definition der Zahl π.

Wir wollen jetzt erste Konsequenzen aus den Grundannahmen ziehen.

Satz III.4.1

(a) $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

(b) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*. Insbesondere ist stets* $-1 \le \sin x \le 1$ *und* $-1 \le \cos x \le 1$.

Man drückt (b) auch dadurch aus, dass sin eine ungerade und cos eine gerade Funktion ist. In (c) ist $\sin^2 x$ die übliche Abkürzung für $(\sin x)^2$.

Beweis. (a) Im Additionstheorem für $\cos(x+y)$ setze $x = y = 0$. Mit $\cos 0 = 1$ folgt dann $\sin 0 = 0$. Den Beweis für $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ müssen wir noch einen Moment aufschieben.

(b) Nach dem Additionstheorem gilt

$$\sin(-x) = \sin(0-x) = \sin 0 \cos x - \cos 0 \sin x = 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x = -\sin x$$

sowie

$$\cos(-x) = \cos(0-x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x = \cos x.$$

(c) erhält man, wenn man $\cos(x-x)$ mit Hilfe des Additionstheorems berechnet.

(a), Fortsetzung: zurück zu $\sin \frac{\pi}{2}$. Aus (c) und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ erhält man $|\sin \frac{\pi}{2}| = 1$. Aber als Spezialfall des Additionstheorems $(x = y)$ ist stets

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Wendet man dies für $x = \pi/4$ an und berücksichtigt man, dass wegen (III.4.2) sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ positiv sind, erhält man $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. □

Der folgende Satz ist unter anderem für den Beweis der Stetigkeit von sin und cos nützlich.

Satz III.4.2 *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten*

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Beweis. Ersetze in den Additionstheoremen x durch $x' = \frac{1}{2}(x+y)$ und y durch $y' = \frac{1}{2}(x-y)$. Dann ist $x' + y' = x$ und $x' - y' = y$ und deshalb

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= \sin(x'+y') - \sin(x'-y') \\ &= [\sin x' \cos y' + \cos x' \sin y'] - [\sin x' \cos y' - \cos x' \sin y'] \\ &= 2 \cos x' \sin y' = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung zeigt man genauso (tun Sie's!). □

Satz III.4.3 *Die Funktionen* sin *und* cos *sind auf* $\mathbb{R}$ *stetig;* sin *ist auf* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *streng monoton wachsend, und* cos *ist auf* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend.*

Beweis. Zum Beweis der Stetigkeit verwenden wir das ε-δ-Kriterium sowie die Abschätzung

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2},$$

die aus (III.4.2) und Satz III.4.1(b) folgt.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist wegen Satz III.4.2 und Satz III.4.1(c)

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\cos \frac{x+y}{2}\right|\left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|,$$

solange $|x-y| < \pi$. Das zeigt für die Sinusfunktion, dass zu gegebenem $\varepsilon > 0$ das ε-δ-Kriterium an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\delta = \min\{\pi, \varepsilon\}$ erfüllt ist.

Für die Kosinusfunktion argumentiert man genauso (tun Sie's!).

Seien nun $x_1, x_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x_1 < x_2$; wir wollen $\sin x_1 < \sin x_2$ zeigen. Es ist $0 < x_2 - x_1 \leq \pi$, und Satz III.4.2 und (III.4.2) liefern

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0.$$

Genauso ist für $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, $x_1 < x_2$, ebenfalls $0 < x_2 - x_1 \leq \pi$ und

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} < 0. \qquad \square$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme können wir weitere spezielle Werte von sin und cos berechnen:

$$\begin{aligned}
\sin\pi &= \sin\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0,\\
\cos\pi &= \cos\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = -1,\\
\sin\frac{3}{2}\pi &= \sin\Big(\pi+\frac{\pi}{2}\Big) = -1,\\
\cos\frac{3}{2}\pi &= \cos\Big(\pi+\frac{\pi}{2}\Big) = 0,\\
\sin 2\pi &= \sin(\pi+\pi) = 0,\\
\cos 2\pi &= \cos(\pi+\pi) = 1.
\end{aligned}$$

Aus diesen Werten erhält man mit dem Additionstheorem folgende Periodizitätsbeziehungen.

Satz III.4.4 *Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:*

(a) $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$,

(b) $\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$,

(c) $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$.

Man drückt (a) auch so aus, dass sin und cos jeweils 2π-*periodische Funktionen* sind.

Über das Vorzeichen und die Nullstellen der Sinusfunktion lässt sich nun Folgendes sagen. sin ist positiv auf $(0, \frac{1}{2}\pi)$ nach Grundannahme (c), negativ auf $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ nach Satz III.4.1(b), positiv auf $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ und negativ auf $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ nach Satz III.4.4(b) und schließlich negativ auf $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ nach Satz III.4.4(a). Daher sind 0, π und 2π die einzigen Nullstellen von sin in $[0, 2\pi]$. Genauso sieht man, dass $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ die einzigen Nullstellen von cos in $[0, 2\pi]$ sind. Zusammen mit der 2π-Periodizität ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar III.4.5 *Für die Nullstellen von* sin *und* cos *gilt:*

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}\colon\ \sin x = 0\} &= \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}, \\ \{x \in \mathbb{R}\colon\ \cos x = 0\} &= \{\tfrac{1}{2}\pi + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Wegen des in Satz III.4.3 ausgesprochenen Monotonieverhaltens bildet die Sinusfunktion das Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ bijektiv auf das Intervall $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion ist die *Arcussinusfunktion*

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to \mathbb{R},\ \arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x.$$

Sie ist nach Satz III.2.5 stetig, streng monoton wachsend und bildet das Intervall $[-1, 1]$ bijektiv auf das Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ ab.

Genauso ist die Kosinusfunktion auf $[0, \pi]$ umkehrbar. Ihre Umkehrfunktion, die *Arcuscosinusfunktion* arccos, ist stetig, streng monoton fallend und bildet $[-1, 1]$ bijektiv auf $[0, \pi]$ ab.

Kommen wir abschließend zur Tangensfunktion, die durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

definiert ist, solange $\cos x \neq 0$. Ihr maximaler Definitionsbereich ist also nach Korollar III.4.5 $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$. Sie hat folgende Eigenschaften.

Satz III.4.6

(a) *Es gilt* $\tan(-x) = -\tan x$ *für alle* $x \in D_{\tan}$.
(b) *Es gilt* $\tan(x + \pi) = \tan x$ *für alle* $x \in D_{\tan}$*;* tan *ist also* π*-periodisch.*
(c) tan *ist stetig auf* $D_{\tan}$.
(d) tan *ist auf* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *streng monoton wachsend.*
(e) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty$, $\lim\limits_{x \to (-\pi/2)^+} \tan x = -\infty$.

Beweis. (a) folgt aus Satz III.4.1(b), (b) folgt aus Satz III.4.4(b) und (c) aus Satz III.4.3. Derselbe Satz ist die Basis von (d). Zum Beweis von (d) seien $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x_1 < x_2$; wir wollen $\tan x_1 < \tan x_2$ zeigen. Im Fall $-\frac{\pi}{2} < x_1 \leq 0 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ ist das wegen $\tan x_1 \leq 0 < \tan x_2$ klar (beachte die Vorzeichen von sin und cos). Im Fall $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ sind sin und cos bei x_1 und x_2 positiv, daher folgt $\tan x_1 < \tan x_2$ aus der Monotonie von sin und cos. Der fehlende Fall $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 \leq 0$ wird mit (a) auf den vorigen zurückgeführt.

(e) Die zweite Grenzwertbeziehung folgt wegen (a) aus der ersten; für diese reicht es, $\sin x \to 1$ und $\cos x \to 0$ für $x \to (\frac{\pi}{2})^-$ zu beobachten (warum ist das so?) und die Positivität von cos auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ zu benutzen. □

Aus Satz III.4.6 folgt (wie?), dass die Tangensfunktion das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet. Dieser „Zweig“ der Tangensfunktion ist also umkehrbar; die Umkehrfunktion ist die *Arcustangensfunktion*

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \ \arctan x = y \Leftrightarrow \tan y = x.$$

Sie ist stetig und streng monoton wachsend.

In unserem axiomatischen Ansatz wurde die Zahl π als das Doppelte der kleinsten Nullstelle der Kosinusfunktion definiert; über die Größe von π ($= 3.14159\ldots$) haben wir jedoch noch keinerlei Aufschluss; das müssen wir noch ein wenig verschieben, vgl. (IV.3.2) auf Seite 98.

Version vom 19. März 2021

Kapitel IV

Differenzierbare Funktionen

IV.1 Der Begriff der Ableitung

Wenn ein Zusammenhang zwischen zwei Größen mittels einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben ist, also $y = f(x)$, so wird damit ausgedrückt, wie groß der y-Wert bei Vorliegen des x-Werts x_0 ist, nämlich $f(x_0)$. Physikalisch denke man zum Beispiel an ein Weg-Zeit-Gesetz, das einem sagt, wo sich ein Objekt zu einem gewissen Zeitpunkt befindet. Um die Änderung dieser Größen zu beschreiben, benötigt man die Ableitung dieser Funktion, die jetzt definiert werden soll.

Definition IV.1.1 Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Es existiere mindestens eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert. Wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{IV.1.1}$$

existiert, heißt f bei x_0 *differenzierbar* mit Ableitung $f'(x_0)$. Ist f an jeder Stelle des Definitionsbereichs differenzierbar, so heißt f auf D differenzierbar mit Ableitung (genauer Ableitungsfunktion) $f'\colon D \to \mathbb{R}$.

Beim Grenzwert in (IV.1.1) ist stillschweigend gemeint, dass $x \in D \setminus \{x_0\}$ ist. Um den Schulterschluss mit Definition III.1.1 zu vollziehen, betrachten wir

$$\Delta_f\colon D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad \Delta_f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

nach Voraussetzung von Definition IV.1.1 ist x_0 im Abschluss von $D \setminus \{x_0\}$, und es ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \Delta_f(x)$$

im Sinn von Definition III.1.1.

Die Größe $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ wird *Differenzenquotient* genannt; geometrisch gibt er die Sekantensteigung zu den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ des Graphen von f wieder, und physikalisch hat er die Bedeutung einer Durchschnittsgeschwindigkeit. Der Grenzwert $f'(x_0)$ kann entsprechend als Tangentensteigung bzw. Momentangeschwindigleit interpretiert werden; in der Tat ist die Tangentensteigung so *definiert*: Ist f bei x_0 differenzierbar, so ist die Tangente an den Graphen von f bei x_0 definitionsgemäß durch die Gleichung

$$T_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{IV.1.2}$$

gegeben.

Der geometrische Zugang zum Begriff der Ableitung ist der von Leibniz und der physikalische der von Newton.

Eine alternative Beschreibung des Differenzenquotienten und der Ableitung ist

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{IV.1.3}$$

wobei stillschweigend nur solche $h \neq 0$ betrachtet werden, für die $x_0 + h \in D$ ist.

Kommen wir zu einigen Beispielen.

Beispiele IV.1.2 (a) Für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + b$, gilt an jeder Stelle $f'(x_0) = m$, wie man sofort durch Einsetzen in (IV.1.1) nachrechnet. Insbesondere haben konstante Funktionen die Ableitung 0.

(b) Das nächstschwierigere Beispiel ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Einsetzen in (IV.1.3) liefert

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \to 2x_0$$

mit $h \to 0$; f ist daher überall differenzierbar mit $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

(c) Betrachte nun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Mit Hilfe des binomischen Satzes I.1.2 schreibe

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k} - x_0^n\right] \\
&= \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k} \\
&= \binom{n}{n-1} x_0^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-1-k} \\
&= n x_0^{n-1} + P(h),
\end{aligned}$$

wobei $P(h)$ für den zweiten Summanden in der vorletzten Zeile steht. Das ist ein Polynom in h ohne konstantes Glied, daher gilt $\lim_{h\to 0} P(h) = 0$ und deshalb $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

(d) Für $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Um die Ableitung zu finden, rechnet man

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\Bigl[\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}\Bigr] = \frac{-1}{(x_0+h)x_0} \to -\frac{1}{x_0^2}.$$

(e) Als nächstes untersuchen wir die Wurzelfunktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, auf Differenzierbarkeit. Wieder betrachten wir

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{1}{h}[\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}] = \frac{1}{h}\,\frac{(x_0+h)-x_0}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}},$$

wobei der Trick im vorletzten Schritt war, mit $\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}$ zu erweitern. Für $x_0 = 0$ sieht man jetzt, dass wegen

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

der Grenzwert in (IV.1.3) nicht existiert (z.B. $h_n = 1/n^2$); also ist f bei 0 nicht differenzierbar. Für $x_0 > 0$ gilt jedoch

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

für $h \to 0$, weil die Wurzelfunktion stetig ist (Korollar III.2.6). Ergebnis: f ist differenzierbar auf $(0,\infty)$ mit Ableitung $f'\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Beachten Sie, dass das formal dem Fall $n = \frac{1}{2}$ in Beispiel (c) entspricht (und (d) dem Fall $n = -1$), aber der Beweis von (c) funktioniert nur für $n \in \mathbb{N}$.

(f) Was ist die Ableitung der Exponentialfunktion? Es ist

$$\frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} = \exp(x_0)\frac{\exp(h)-1}{h}$$

wegen der Funktionalgleichung der exp-Funktion; um den Grenzwert für $h \to 0$ zu bestimmen, braucht man also nur den Grenzwert von $\frac{\exp(h)-1}{h}$ (der die Ableitung von exp bei 0 angibt) zu untersuchen. Hierzu beachte

$$\exp(h) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = h + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$$

und deshalb

$$\frac{\exp(h)-1}{h} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}.$$

Was passiert mit dieser Summe für $h \to 0$? Jeder Summand strebt gegen 0, aber es gibt unendlich viele davon. Um Genaueres zu erfahren, machen wir für $|h| \leq 1$

eine ähnliche Abschätzung wie im Beweis der Stetigkeit der Exponentialfunktion in Beispiel III.1.5:

$$\Bigl|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}\Bigr| \le |h| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-2}}{k!} \le |h| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = |h|(e-2).$$

Das zeigt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} = \exp(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x_0);$$

die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion: $\exp' = \exp$.

(g) Um die Ableitung von Sinus und Kosinus zu bestimmen, benutzen wir Satz III.4.2:

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{2}{h} \cos\Bigl(x_0+\frac{h}{2}\Bigr) \sin\frac{h}{2} = \cos\Bigl(x_0+\frac{h}{2}\Bigr) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to \cos x_0$$

wegen der Stetigkeit von cos und wegen Beispiel III.1.2. Genauso ist

$$\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} = -\sin\Bigl(x_0+\frac{h}{2}\Bigr) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to -\sin x_0.$$

Daher sind sin und cos differenzierbar mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

(h) Das Standardbeispiel einer nicht differenzierbaren, aber stetigen Funktion ist die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$, die bei $x_0=0$ nicht differenzierbar ist; für $h_n = (-1)^n/n$ existiert nämlich der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(f(h_n)-f(0))/h_n$ nicht.

(i) Zum Schluss noch ein etwas seltsames Beispiel, das zeigt, dass Funktionen an genau einer Stelle differenzierbar sein können. Sei

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x\in\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dass f an einer Stelle $x_0 \neq 0$ nicht differenzierbar ist, sieht man am schnellsten mit Hilfe des folgenden Satzes IV.1.3, denn dort ist f nicht stetig (Beweis?). Für $x_0=0$ gilt jedoch

$$\Bigl|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\Bigr| = \Bigl|\frac{f(h)}{h}\Bigr| \le \Bigl|\frac{h^2}{h}\Bigr| = |h|,$$

so dass f bei 0 differenzierbar ist mit Ableitung $f'(0)=0$.

Bevor wir zu Rechenregeln für differenzierbare Funktionen kommen, halten wir eine notwendige Bedingung fest.

Satz IV.1.3 *Wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ bei $x_0 \in D$ differenzierbar ist, ist f bei x_0 auch stetig.*

Beweis. Für $x \in D$, $x \neq x_0$, gilt

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

für $x \to x_0$. □

Das Beispiel der Betragsfunktion, $f(x) = |x|$, zeigt, dass die Umkehrung nicht gilt.

Es folgen die aus der Schulmathematik bereits bekannten Summen-, Produkt- und Quotientenregeln.

Satz IV.1.4 *Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in D$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) *Dann sind auch $f \pm g\colon D \to \mathbb{R}$ und $\lambda f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei x_0, und es gilt*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0), \quad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

(b) *Auch $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar bei x_0 mit*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(c) *Im Fall $g(x_0) \neq 0$ ist f/g mit dem Definitionsbereich $D' = \{x \in D\colon g(x) \neq 0\}$ differenzierbar bei x_0 mit*

$$\Bigl(\frac{f}{g}\Bigr)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Beweis. (a) beweist sich von allein, indem man in (IV.1.1) oder (IV.1.3) einsetzt und die Grenzwertsätze über Summen und skalare Vielfache benutzt.

(b) Durch Einschieben einer „aktiven Null“ erkennt man

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\to f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

mit $x \to x_0$, denn g ist stetig bei x_0 (Satz IV.1.3).

(c) Wir behandeln zunächst $1/g$. Da g insbesondere bei x_0 stetig ist, folgt aus Satz III.1.9 die Existenz einer δ-Umgebung $U_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ von x_0, so dass für $x \in U_\delta \cap D$ auch $g(x) \neq 0$ gilt[1]. Für solche x hat man

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \frac{-1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

[1] Diese Überlegung zeigt, dass x_0 im Abschluss von $D' \setminus \{x_0\}$ liegt, was bei der Definition der Differenzierbarkeit notwendig ist.

so dass

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Die allgemeine Quotientenregel ergibt sich daraus mit Hilfe der auf $f \cdot \frac{1}{g}$ angewandten Produktregel. $\square$

Die Kettenregel ist etwas heikler zu beweisen.

Satz IV.1.5 (Kettenregel)
Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in D$, und setze $y_0 = f(x_0)$. Sei $g\colon D' \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(D) \subset D'$, und g sei differenzierbar bei y_0. Dann ist $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei x_0 mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Unvollständiger Beweis. Wir versuchen, den kanonischen Ansatz zu verfolgen. Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$; wir müssen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0) \tag{IV.1.4}$$

zeigen. Man erweitert den Differenzenquotienten mit $f(x_n) - f(x_0)$ und erhält

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Da f stetig bei x_0 ist, gilt $f(x_n) \to f(x_0)$, daher strebt der erste Faktor gegen $g'(f(x_0))$ und der zweite gegen $f'(x_0)$. Das beweist (IV.1.4). $(\square)$

Das Problem bei diesem Argument ist, dass es nur funktioniert, wenn stets $f(x_n) \neq f(x_0)$ ist; also zum Beispiel, wenn f in einer Umgebung von x_0 streng monoton ist oder allgemeiner wenn f auf Intervallen $(x_0 - \delta, x_0)$ und $(x_0, x_0 + \delta)$ jeweils streng monoton ist. (Geben Sie ein Beispiel einer nicht konstanten Funktion, die diese Voraussetzung nicht erfüllt!) Einstweilen belassen wir es bei diesem Argument, das für sehr viele Funktionen klappt. Ein vollständiger Beweis der Kettenregel wird im Anschluss an Satz IV.1.8 gegeben.

Als letzte Rechenregel diskutieren wir die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion.

Satz IV.1.6 *Seien I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton und bei $x_0 \in I$ differenzierbar, $y_0 = f(x_0)$, $J = f(I)$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist, ist g differenzierbar bei y_0 mit*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis. Seien $y_n \in J$, $y_n \neq y_0$, mit $y_n \to y_0$. Dann existieren eindeutig bestimmte $x_n \in I$ mit $f(x_n) = y_n$, nämlich $x_n = g(y_n)$; wegen der strengen Monotonie ist auch $x_n \neq x_0$. Es gilt $x_n \to x$ wg. Satz III.2.5 und daher

$$\frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))},$$

wie behauptet. □

Wenn man schon wüsste, dass g differenzierbar ist, könnte man $g'(y_0)$ einfach bestimmen, indem man die Kettenregel auf $g \circ f = \mathrm{id}$ anwendet (tun Sie's!); aber die Differenzierbarkeit von g ist eine Behauptung von Satz IV.1.6, keine Voraussetzung.

Es folgen ein paar Beispiele zu diesen Sätzen.

Beispiele IV.1.7 (a) Wir suchen die Ableitung der Tangensfunktion auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dies ist ein Fall für die Quotientenregel, da $\tan = \frac{\sin}{\cos}$:

$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

was man wahlweise als

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{oder} \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x$$

darstellen kann.

(b) Da log die Umkehrfunktion von exp ist, gilt für $x > 0$

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}$$

nach Satz IV.1.6.

(c) Genauso berechnet sich für $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung des Arcustangens als

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(d) Betrachten wir $f(x) = a^x$ auf $\mathbb{R}$, wo $a > 0$ ist. Nach Definition ist $f(x) = e^{x \log a}$, und die Kettenregel liefert

$$f'(x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

(e) Betrachten wir $f(x) = x^r$ auf $(0, \infty)$, wo $r \in \mathbb{R}$ ist. Nach Definition ist $f(x) = e^{r \log x}$, und deshalb gilt

$$f'(x) = e^{r \log x} r \frac{1}{x} = r x^{r-1};$$

das umfasst die Beispiele IV.1.2(c), (d) und (e).

(f) Hier ein Beispiel einer überall differenzierbaren Funktion, deren Ableitung nicht überall stetig ist. Setze

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist an Stellen $x \neq 0$ nach der Produkt- bzw. Kettenregel differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x};$$

und bei $x_0 = 0$ hat man

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

da ja die Sinusfunktion beschränkt ist. Daher ist f überall differenzierbar, aber f' ist nicht stetig bei 0, da $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ nicht existiert, ähnlich wie im Beispiel zu Definition III.1.12(c).

Übrigens kann man zeigen, dass eine unstetige Ableitung keine Sprungstellen haben kann, sondern nur Unstetigkeitsstellen 2. Art.

Die Definition der Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten ist der übliche Weg, aber man kann und sollte die Ableitung auch aus einem anderen Blickwinkel betrachten. Das soll jetzt besprochen werden; übrigens wird so in der Analysis II die Ableitung bei Funktionen mehrerer Veränderlicher eingeführt.

Es geht um die Approximation einer gegebenen Funktion durch eine lineare; für die Zwecke dieser Diskussion soll, wie in der Schulmathematik, eine Funktion der Bauart $x \mapsto mx + b$ linear genannt werden, wenngleich sie im Sinn der linearen Algebra nur im Fall $b = 0$ linear ist.

Dass die Tangente an den Graphen einer in x_0 differenzierbaren Funktion diesen berührt, heißt doch, dass der Unterschied $\varphi(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ klein ist, in der Tat ist nach Definition der Ableitung

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \right| = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| = 0.$$

Das heißt: Approximiert man in der Nähe von x_0 die Funktion f durch die lineare Funktion $T_1\colon x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, deren Graph die Tangente an den Graphen von f bei x_0 ist, so macht man einen Fehler, nämlich $\varphi(x)$, der von kleinerer Ordnung als linear in $x - x_0$ ist. Das ist sogar äquivalent zur Differenzierbarkeit:

Satz IV.1.8 *Seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist differenzierbar bei x_0.*
(ii) *Es existieren $m \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x) \quad \textit{für } x \in D \tag{IV.1.5}$$

und

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \right| = 0. \tag{IV.1.6}$$

In diesem Fall ist $m = f'(x_0)$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) haben wir schon begründet.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Durch Umstellen folgt aus (IV.1.5)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \Bigl(m + \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \Bigr) = m,$$

so dass f bei x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) = m$. □

Satz IV.1.8 macht deutlich, wie man die Ableitung $f'(x_0)$ verstehen sollte, nämlich als *Änderungsrate* der Funktion bei x_0. Während $f(x_0)$ die Frage „Welchen Wert hat f bei x_0?“ (also „Was ist?“) beantwortet, kann man mit Hilfe von $f'(x_0)$ die Frage „Wie ändert sich f in einer Umgebung von x_0?“ (also „Was wird?“) beantworten.

Mit Satz IV.1.8 können wir jetzt einen vollständigen Beweis der Kettenregel (Satz IV.1.5) geben. Mit den dortigen Bezeichnungen können wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x) \\ g(y) &= g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + \psi(y) \end{aligned}$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0, \qquad \lim_{y \to y_0} \frac{\psi(y)}{y - y_0} = 0.$$

Setzt man $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$ ein, folgt

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + \psi(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) f'(x_0)(x - x_0) + \chi(x) \end{aligned}$$

mit

$$\chi(x) = g'(f(x_0))\varphi(x) + \psi(f(x)).$$

Im Hinblick auf Satz IV.1.8 ist nur noch zu zeigen, dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\chi(x)}{x - x_0} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\psi(f(x))}{x - x_0} = 0.$$

Wenn wir auf den letzten Grenzwert das ε-δ-Kriterium anwenden, ist also zu zeigen:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D \setminus \{x_0\} \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |\psi(f(x))| < \varepsilon|x - x_0|.$$

Zum Beweis hierfür machen wir eine Vorüberlegung, für die $\varepsilon' > 0$ vorgegeben sei. Nach Voraussetzung über ψ existiert ein $\eta > 0$ mit

$$0 < |y - y_0| < \eta \ \Rightarrow\ |\psi(y)| < \varepsilon'|y - y_0|$$

bzw.

$$|y - y_0| < \eta \ \Rightarrow\ |\psi(y)| \leq \varepsilon'|y - y_0|.$$

Nun ist f bei x_0 stetig; also existiert $\delta_1 > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0| < \eta,$$

so dass für diese x gilt

$$|\psi(f(x))| \leq \varepsilon'|f(x) - f(x_0)| = \varepsilon'|f'(x_0)|\,|x - x_0| + \varepsilon'|\varphi(x)|.$$

Ferner existiert $\delta_2 > 0$ mit

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |\varphi(x)| < |x - x_0|,$$

also erfüllen alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$|\psi(f(x))| < \varepsilon'(|f'(x_0)| + 1)|x - x_0|.$$

Um unsere ursprüngliche Implikation zu zeigen, ist diese Vorüberlegung also nur auf $\varepsilon' = \varepsilon/(|f'(x_0)| + 1)$ anzuwenden. □

Leibniz hat für die Ableitung die Differentiale ersonnen. Er schreibt für eine Funktion $y = y(x)$, betrachtet den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und lässt Δx gegen 0 streben. Dann werden in seiner Diktion Zähler und Nenner „unendlich klein, ohne 0 zu sein“: Er schreibt daher $\frac{dy}{dx}$. Diese seltsamen unendlich kleinen Größen sind heute aus der Analysis verschwunden und haben der Weierstraßschen Epsilontik Platz gemacht; es gibt die Differentiale dy und dx schlichtweg nicht. Trotzdem ist die Leibniz-Symbolik $\frac{dy}{dx}$ zumindest als Eselsbrücke wertvoll; man liest „dy nach dx“. Die Kettenregel für zusammengesetzte Funktionen $z = z(y)$ und $y = y(x)$ kann man sich dann merken, indem man die „Differentialquotienten“ wie gewöhnliche Brüche manipuliert:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

Das ist natürlich kein Beweis! Auch in der Integralrechnung wird uns die Leibniz-Notation noch gute (memotechnische) Dienste erweisen.

Ein weiteres Einsatzgebiet der Leibniz-Symbolik ist die kompakte Notation von Beispielen. Nehmen wir einmal an, es solle die Ableitung der durch $f(x) = 3x^2 + 4x$ definierten Funktion angegeben werden; dann kann man abkürzend $\frac{d}{dx}(3x^2+4x) = 6x+4$ schreiben. Und im (parameterabhängigen) Beispiel $f(x) = 3ax^2 + 4x$ sagt uns $\frac{d}{dx}(3ax^2 + 4x) = 6ax + 4$ außerdem, dass nach x und nicht nach a abgeleitet wird; vgl. $\frac{d}{da}(3ax^2 + 4x) = 3x^2$.

Wie schon bei den Grenzwerten zieht es die Schulmathematik vor, rechts- und linksseitige Ableitungen separat zu untersuchen. Die rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von f bei x_0 ist

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Aus Satz III.1.11 folgt sofort:

Satz IV.1.9 *Ist f bei x_0 rechts- und linksseitig differenzierbar und stimmen die beiden einseitigen Ableitungen überein, so ist f bei x_0 differenzierbar.*

Damit sieht man erneut, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, bei 0 nicht differenzierbar ist, denn die linksseitige Ableitung ist -1 und die rechtsseitige $+1$.

Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so kann man untersuchen, ob bzw. wo die Ableitung $f'\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Ist dies bei x_0 der Fall, sagt man, f sei bei x_0 *zweimal differenzierbar*. Diese 2. Ableitung wird mit $f''(x_0)$ (bzw. $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$ in Leibniz' Welt) bezeichnet. Zum Beispiel ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$, an allen Stellen $x_0 \neq 0$ zweimal differenzierbar, bei $x_0 = 0$ aber nur einmal (warum?). Zur Bedeutung der 2. Ableitung wird später mehr gesagt.

Allgemein definiert man höhere Ableitungen induktiv:

Definition IV.1.10 Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ n-mal auf D differenzierbar mit n-ter Ableitung $f^{(n)}$ und existiert die Ableitung $(f^{(n)})'(x_0)$, so heißt f bei x_0 $(n+1)$-mal differenzierbar.

Es wird sich in Abschnitt IV.3 als praktisch erweisen, die Funktion f als ihre nullte Ableitung aufzufassen; daher setzen wir $f^{(0)} := f$.

Der ehemalige amerikanische Präsident Nixon hat einmal gesagt: „Die Steigerung der Inflationsrate hat sich verlangsamt." Von welcher Ableitung spricht er?

IV.2 Der Mittelwertsatz

Der Mittelwertsatz ist die folgende Aussage.

Satz IV.2.1 (Mittelwertsatz)
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Wenn man eine Skizze macht, ist diese Aussage unmittelbar einleuchtend; trotzdem bedarf sie natürlich eines Beweises! Um diesen zu führen, betrachtet man zunächst den Spezialfall $f(a) = f(b)$ in Satz IV.2.1, der als Satz von Rolle bekannt ist.

Satz IV.2.2 (Satz von Rolle)
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Für konstantes f ist die Aussage klar; also nehmen wir an, dass f nicht konstant ist. Dann existiert $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a)$. O.B.d.A. soll der erste Fall zutreffen. (Überlegen Sie die Modifikationen im zweiten Fall selbst!) Als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall nimmt f sein Supremum an (Satz III.2.4), und zwar wegen $f(x_0) > f(a) = f(b)$ nicht bei a oder b. Also existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(x) \leq f(\xi) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Zeigen wir, dass für eine solche Stelle ξ die Ableitung verschwindet. Da $\xi \in (a,b)$, also im Innern des Intervalls liegt, sind sowohl die rechtsseitige als auch die linksseitige Ableitung erklärt, und sie stimmen überein. Ferner ist für $a \leq x < \xi$

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0,$$

da Zähler und Nenner ≤ 0 sind. Es folgt

$$\lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0.$$

(Die Existenz des Grenzwerts ist ja vorausgesetzt.) Analog gilt für $\xi < x \leq b$

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0,$$

da der Zähler ≤ 0, der Nenner aber positiv ist. Es folgt

$$\lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0.$$

Da bei einer differenzierbaren Funktion die linksseitige Ableitung mit der rechtsseitigen übereinstimmt, muss also $f'(\xi) \geq 0$ und $f'(\xi) \leq 0$ sein, daher ist in der Tat $f'(\xi) = 0$, wie behauptet. □

Beweis des Mittelwertsatzes. Um den Mittelwertsatz zu beweisen, werden wir zu einer Funktion wie in Satz IV.2.1 eine weitere Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ assoziieren, auf die der Satz von Rolle anwendbar ist, nämlich $g(x) = f(x) - m(x - a)$, wo

m so einzurichten ist, dass $g(a) = g(b)$ wird; eine kurze Rechnung zeigt, dass $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ funktioniert. (Machen Sie sich auch geometrisch klar, dass das das m der Wahl ist.) Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = 0$. (Warum erfüllt g alle Voraussetzungen des Satzes von Rolle?) Aber $g'(\xi) = f'(\xi) - m$, und es folgt

$$f'(\xi) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

wie gewünscht. □

Der Mittelwertsatz ist die Quelle für viele Ungleichungen; der folgende Satz liefert das Grundmuster.

Satz IV.2.3 *Sei I ein Intervall, und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei stetig und an allen Stellen mit möglicher Ausnahme der Randpunkte von I differenzierbar. Es gelte*

$$m \le f'(x) \le M \quad \textit{für alle Differenzierbarkeitsstellen } x.$$

Dann folgt

$$m(x-y) \le f(x) - f(y) \le M(x-y) \quad \textit{für alle } x, y \in I,\ x > y.$$

Ist f auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall differenzierbar mit stetiger Ableitung (man sagt, dass f *stetig differenzierbar* ist), so existieren solche m und M nach Satz III.2.4.

Beweis. Seien $x, y \in I$, $x > y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\xi \in (y, x)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Aber nach Voraussetzung ist $m \le f'(\xi) \le M$. Daraus folgt sofort die Behauptung. □

Zur Veranschaulichung betrachten wir die Sinusfunktion auf $\mathbb{R}$. Hier gilt

$$-1 \le \sin' x = \cos x \le 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

also liefert Satz IV.2.3 (wie?)

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Wurzelfunktion auf $[0, \infty)$; diese ist am Randpunkt 0 nicht differenzierbar. Satz IV.2.3 ist trotzdem anwendbar und zeigt

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \ge \frac{x - y}{2\sqrt{x}} \quad \text{für alle } 0 \le y < x,$$

denn für jedes $\xi \in (y, x)$ gilt $\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \geq \frac{1}{2\sqrt{x}}$. (Können Sie die obige Unleichung auch elementar, also ohne Verwendung des Mittelwertsatzes, beweisen?)

Wir kommen zu einer immens wichtigen Folgerung für die Integralrechnung. Ist f eine konstante Funktion, gilt trivialerweise $f' = 0$. Stimmt auch die Umkehrung? Der Mittelwertsatz (und billiger geht's nicht) liefert die Antwort.

Korollar IV.2.4 *Ist f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall mit $f' = 0$, so ist f konstant.*

Beweis. Man kann Satz IV.2.3 mit $m = M = 0$ anwenden und erhält $f(x) = f(y)$ für alle x, y. Das heißt, dass f konstant ist. □

Im nächsten Abschnitt werden wir den Mittelwertsatz zum Satz von Taylor ausbauen, zu dessen Beweis wir den auch sonst nützlichen *verallgemeinerten Mittelwertsatz* benötigen. Zuerst besprechen wir einen Spezialfall.

Satz IV.2.5 *Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Es gelte $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = g'(\xi)$.*

Wieder macht eine Skizze die Aussage augenfällig, wenn auch nicht ganz so offensichtlich wie beim Mittelwertsatz.

Beweis. Die Funktion $h = f - g$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, also existiert $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Solch ein ξ haben wir gesucht. □

Nun formulieren wir den verallgemeinerten Mittelwertsatz, der Satz IV.2.5 als Spezialfall enthält, im Gegensatz zu diesem aber keine anschauliche Interpretation erlaubt.

Satz IV.2.6 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)
Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$(g(b) - g(a))f'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi).$$

Hat g' keine Nullstelle, erfüllt ξ also

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. Diesmal betrachten wir die Hilfsfunktion

$$h\colon x \mapsto h(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)).$$

Es ist $h(a) = h(b) = 0$, und der Satz von Rolle liefert ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Solch ein ξ haben wir gesucht.

Hat g' keine Nullstelle, so muss $g(a) \neq g(b)$ sein (sonst lieferte der Satz von Rolle ja eine Nullstelle von g'), und man darf wirklich durch $g(b) - g(a)$ dividieren. □

Eine klassische Anwendung des (verallgemeinerten) Mittelwertsatzes sind die *de l'Hospitalschen*[2] *Regeln*, die sich mit Grenzwerten beschäftigen, die formal auf einen Quotienten $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ hinauslaufen. Die erste dieser Regeln lautet so:

Satz IV.2.7 *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar; dort gelte $g'(x) \neq 0$. Es gelte $f(a) = g(a) = 0$. Wenn $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Als erstes bemerken wir, dass auf $(a,b]$ auch $g(x) \neq 0$ ist, denn sonst wäre $g(a) = g(x_1) = 0$ für ein $x_1 > a$, und g' hätte nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle.

Nun zum eigentlichen Beweis. Sei (x_n) eine Folge in $(a,b]$; wir müssen den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ untersuchen. Wegen $f(a) = g(a) = 0$ ist

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

für geeignete $\xi_n \in (a, x_n)$ nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz IV.2.6. Mit $x_n \to a$ gilt auch $\xi_n \to a$, und nach Voraussetzung existiert $\lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$; also existiert auch $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ und stimmt mit dem davor genannten Grenzwert überein. Das war zu zeigen. □

Übrigens stimmt diese de l'Hospitalsche Regel auch, wenn der Grenzwert im Sinn der Divergenz gegen $\pm\infty$ existiert (Definition II.6.5); dies hat der obige Beweis gleich mitgezeigt. Eine analoge Version gilt natürlich für Grenzwerte $x \to b^-$.

Die zweite de l'Hospitalsche Regel behandelt den Fall $x \to \infty$.

Satz IV.2.8 *Seien $f, g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dort sei stets $g'(x) \neq 0$. Es gelte $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Wenn $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Wie oben darf der Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ liegen.

[2] Oder de l'Hôpitalschen.

Beweis. Ohne Einschränkung ist $a > 0$. Betrachte die Hilfsfunktionen

$$F\colon [0,1/a] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = f(1/x) \text{ für } x \neq 0, \; F(0) = 0,$$
$$G\colon [0,1/a] \to \mathbb{R}, \quad G(x) = g(1/x) \text{ für } x \neq 0, \; G(0) = 0.$$

F und G sind dann auf $[0,1/a]$ stetig und auf $(0,1/a)$ differenzierbar. Ferner ist für $x > 0$

$$F'(x) = -f'\Big(\frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x^2}, \quad G'(x) = -g'\Big(\frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x^2}.$$

Des weiteren ist

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

und die erste de l'Hospitalsche Regel ist auf F und G anwendbar. Wegen

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

liefert sie die Behauptung von Satz IV.2.8. □

Analoge Regeln gelten, wenn die Voraussetzungen „$f(a) = g(a) = 0$“ bzw. „$f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to \infty$“ ersetzt werden durch „$f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \to a^+$ bzw. $x \to \infty$“. Aus Zeitgründen sollen diese *dritte und vierte de l'Hospitalsche Regel* nicht bewiesen werden.

Beispiele IV.2.9 (a) Es gilt für $\lambda > 0$ nach der vierten de l'Hospitalschen Regel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\lambda e^{\lambda x}}{1} = \infty;$$

daraus ergibt sich erneut für $a > 1$ und $b > 0$ (vgl. Satz III.3.7)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^b} = \lim_{x\to\infty} \Big(\frac{e^{x(\log a)/b}}{x}\Big)^b = \infty.$$

(b) Terme der Form „$0 \cdot \infty$“ kann man auch mit den de l'Hospitalschen Regeln behandeln, z.B.

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

(Warum war die dritte de l'Hospitalsche Regel anwendbar?)

(c) Versucht man, die erste de l'Hospitalsche Regel auf $\frac{\sin x - x}{x^3}$ anzuwenden, landet man bei

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

und ist so schlau wie zuvor. Um die Existenz des rechten Grenzwerts einzusehen, kann man aber die de l'Hospitalsche Regel erneut anwenden und erhält

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}$$

nach Beispiel III.1.2. (Den letzten Grenzwert mit de l'Hospital zu bestimmen liefe übrigens auf einen Zirkelschluss hinaus: Um die Ableitung der Sinusfunktion zu finden, benötigt man ja diesen Grenzwert, vgl. Beispiel IV.1.2(g).)

(d) Eine blinde Anwendung der de l'Hospitalschen Regeln führt im nächsten Beispiel zu

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+\cos x} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\sin x} = 1;$$

warum ist das falsch, und wie lautet der Grenzwert wirklich?

Die de l'Hospitalsche Regel gestattet einen neuen Blick auf die 2. Ableitung. Wir wissen bereits, dass eine Funktion f in einer Umgebung einer Differenzierbarkeitsstelle x_0 durch eine lineare Funktion, nämlich die Tangentenfunktion T_1 (vgl. (IV.1.2)), gut approximiert werden kann, und zwar mit einem Fehler, der von kleinerer Ordnung als linear in $x - x_0$ ist (vgl. Satz IV.1.8). Wir werden sehen, dass zweimalige Differenzierbarkeit zu einer besseren Approximation führt, nämlich durch eine quadratische Funktion mit einem Fehler, der von kleinerer Ordnung als quadratisch in $x - x_0$ ist.

Satz IV.2.10 *Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und bei $x_0 \in D$ zweimal differenzierbar. Dann existiert ein quadratisches Polynom*

$$T_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2,$$

so dass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0;$$

und zwar ist

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2.$$

Beweis. Nach der de l'Hospitalschen Regel ist für $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{(x-x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_1'(x)}{2(x-x_0)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f''(x_0)}{2},$$

letzteres nach Definition der 2. Ableitung. (Warum war die de l'Hospitalsche Regel anwendbar?) Das zeigt die Behauptung. □

Im Unterschied zu Satz IV.1.8 ist die Eigenschaft von Satz IV.2.10 nicht äquivalent zur zweimaligen Differenzierbarkeit, wie das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

zeigt. Wie in Beispiel IV.1.7(f) sieht man, dass f überall differenzierbar ist, aber f' bei 0 nicht stetig ist, so dass $f''(0)$ nicht existiert. Es gilt trotzdem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0;$$

das quadratische Polynom[3] 0 approximiert f bei 0 also wie in Satz IV.2.10 beschrieben.

Wie geht es weiter mit den höheren Ableitungen? Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und bei x_0 dreimal differenzierbar, so vergleiche $f(x) - T_2(x)$ mit $(x - x_0)^3$. Eine mehrfache Anwendung der de l'Hospitalschen Regel liefert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-x_0)^3} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_2'(x)}{3(x-x_0)^2} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - T_2''(x)}{6(x-x_0)} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'''(x_0)}{6},\end{aligned}$$

letzteres nach Definition der 3. Ableitung. Es folgt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \bigl(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3\bigr)}{(x-x_0)^3} = 0.$$

Der allgemeinen Aussage schicken wir eine Definition voraus.

Definition IV.2.11 Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion und existiert $f^{(n)}(x_0)$, so heißt

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

das n-te *Taylor-Polynom* zu f bei x_0.

Satz IV.2.12 *Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion und existiert $f^{(n)}(x_0)$, so gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0;$$

man kann also f in einer Umgebung von x_0 so durch ein Polynom höchstens n-ten Grades approximieren, dass man einen Fehler von kleinerer Ordnung als $(x-x_0)^n$ macht.

[3] Genauer: Polynom vom Grad ≤ 2.

Beweis. Es gilt $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $k = 0, \dots, n$. (Bitte nachrechnen!) Daher zeigt eine $(n-1)$-fache Anwendung der de l'Hospitalschen Regel

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T'_{n-1}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \\
&\vdots \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_{n-1}^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} \\
&= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

IV.3 Der Satz von Taylor

Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ bei x_0 stetig, so wissen wir, dass $f(x)$ „ungefähr“ $f(x_0)$ ist, wenn x „ungefähr“ x_0 ist – das ist die intuitive Bedeutung der Stetigkeit. Dies ist jedoch ein rein qualitatives Ergebnis (präzise: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$), das keine quantitative Information enthält. Die bekommt man unter stringenteren Voraussetzungen, nämlich, wenn f differenzierbar ist. Der Mittelwertsatz sagt dann ja, dass man die Differenz $f(x) - f(x_0)$ für ein geeignetes ξ zwischen x_0 und x als $f'(\xi)(x-x_0)$ darstellen kann. Satz IV.2.3 hat das ausgenutzt, um mit Hilfe von oberen und unteren Schranken von f' diese Differenz abzuschätzen.

Ein Beispiel: Wir betrachten $f(x) = \log(1+x)$ für $x \geq 0$. Die Stetigkeit von f bei 0 sagt uns, dass $f(x) \approx 0$ ist, wenn $x \approx 0$ ist. Mit dem Schrankensatz IV.2.3 erhält man die genauere Information $0 \leq \log(1+x) \leq x$ für $x \geq 0$, denn wegen $f'(x) = \frac{1}{1+x} \leq 1$ für $x \geq 0$ ist dort $M = 1$.

Gehen wir einen Schritt weiter. Satz IV.1.8 enthält qualitative Informationen über die Approximation einer differenzierbaren Funktion durch eine lineare, nämlich das erste Taylorpolynom T_1:

$$f(x) = T_1(x) + R_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x),$$

wobei der Fehlerterm $R_1(x)$ kleiner als linear in $x - x_0$ ist:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = 0.$$

In unserem Beispiel $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 0$ lautet diese Approximation

$$\log(1+x) = x + R_1(x) \quad \text{mit } \lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0.$$

Das liefert die gegenüber der Stetigkeit genauere qualitative Information, dass $\log(1+x) \approx x$ für $x \approx 0$ ist. Um quantitative Abschätzungen für den Fehler zu erhalten, den man dabei macht, benötigt man die 2. Ableitung.

Das soll jetzt allgemein formuliert werden. Was im folgenden Satz „zwischen" bedeutet, wurde im Zusammenhang mit dem Zwischenwertsatz III.2.1 erläutert.

Satz IV.3.1 *Seien I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x, x_0 \in I$. Dann gibt es ein ξ zwischen x_0 und x mit*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

Man hat daher die Darstellung

$$f(x) = T_1(x) + R_1(x) \quad \text{mit } R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

Beweis. Betrachte die Hilfsfunktion $h = f - T_1$; beachte $h(x_0) = 0$. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz mit der Zählerfunktion h und der Nennerfunktion $x \mapsto (x - x_0)^2$ existiert eine Stelle ξ_1 zwischen x_0 und x mit

$$\frac{h'(\xi_1)}{2(\xi_1 - x_0)} = \frac{h(x) - h(x_0)}{(x - x_0)^2}.$$

Nun ist aber auch $h'(x_0) = 0$, und wir können den verallgemeinerten Mittelwertsatz erneut im Teilintervall zwischen x_0 und ξ_1 anwenden, um eine Stelle ξ zwischen x_0 und ξ_1 (und daher zwischen x_0 und x) mit

$$\frac{h''(\xi)}{2} = \frac{h'(\xi_1) - h'(x_0)}{2(\xi_1 - x_0)}$$

zu finden. Beachtet man noch $h'' = f''$, so folgt aus diesen Gleichungen

$$\frac{f''(\xi)}{2} = \frac{h(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{f(x) - T_1(x)}{(x - x_0)^2}.$$

Das war zu zeigen. □

Wenden wir Satz IV.3.1 auf unser Beispiel $f(x) = \log(1 + x)$, $x_0 = 0$ und $x > 0$ an, erhält man ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$\log(1 + x) = x - \frac{1}{2(1 + \xi)^2}x^2 = x + R_1(x).$$

Das Restglied $R_1(x)$ erfüllt daher

$$-\frac{x^2}{2} \le R_1(x) \le 0,$$

denn egal wo ξ in $(0,x)$ liegt, es ist $(1+\xi)^2 \geq 1$. Wenn man also z.B. $\log 1.1$ durch 0.1 approximiert, weiß man, dass dieser Wert zu groß ist, aber um höchstens 0.005 falsch liegt.

Satz IV.2.12 legt nahe, dass man eine bessere Approximationsgüte mit Hilfe von höheren Taylorpolynomen (siehe Definition IV.2.11) erhält. Der folgende *Satz von Taylor* kann als quantitative Version von Satz IV.2.12 angesehen werden; die untenstehende Formel (IV.3.1) wird *Taylorsche Formel* genannt.

Satz IV.3.2 *Seien I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und $x, x_0 \in I$. Dann existiert ein ξ zwischen x_0 und x mit*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{IV.3.1}$$

Man hat daher die Darstellung

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad \text{mit } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};$$

diese Darstellung des Restglieds R_n heißt *Lagrangesches Restglied*. (In der Literatur finden sich auch andere Darstellungen, die für unsere Zwecke nicht so nützlich sind.) Hier ist unbedingt zu beachten, dass ξ von x und n abhängt und keine Konstante ist!

Alternativ lässt sich die Taylorsche Formel in der Form

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

notieren, wobei $x_0 + h \in I$ und $\vartheta = \vartheta(h,n)$ eine geeignete Zahl in $(0,1)$ ist.

Beweis. Wir wenden dieselbe Strategie wie im Beweis von Satz IV.3.1 an, nur öfter. Schon im Beweis von Satz IV.2.12 wurde $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $k = 0,\dots,n$ beobachtet. Wir betrachten die Hilfsfunktion $h = f - T_n$, für die also $h^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 0,\dots,n$ ist. Durch sukzessive Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes findet man ξ_1 zwischen x_0 und x, ξ_2 zwischen x_0

und $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ zwischen x_0 und ξ_n mit

$$\begin{aligned}
\frac{h'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} &= \frac{h(x)-h(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{h(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \\
\frac{h''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} &= \frac{h'(\xi_1)-h'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{h'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \\
\frac{h'''(\xi_3)}{(n+1)n(n-1)(\xi_3-x_0)^{n-2}} &= \frac{h''(\xi_2)-h''(x_0)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} = \frac{h''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} \\
&\vdots \\
\frac{h^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} &= \frac{h^{(n)}(\xi_n)-h^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)} = \frac{h^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)}.
\end{aligned}$$

Setzt man $\xi = \xi_{n+1}$ und beachtet man $h^{(n+1)} = f^{(n+1)}$, so ergibt sich aus den obigen Gleichungen

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{h(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}};$$

das war zu zeigen. □

Beispiele IV.3.3 (a) Seien $f = \exp$ und $x_0 = 0$. Da alle Ableitungen mit f übereinstimmen, hat man $f^{(k)}(0) = 1$ für alle k und daher

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \quad \text{und} \quad R_n(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Die n-te Taylorapproximation stimmt daher mit der n-ten Partialsumme der exp definierenden Reihe (II.3.3) überein; der Reihenrest wird durch $R_n(x)$ dargestellt.[4]

(b) Seien $f = \cos$ und $x_0 = 0$. Die 1., 2., 3. etc. Ableitung von f sind $-\sin$, $-\cos$, $\sin$, $\cos$ und da capo. Bei 0 hat man $f(0) = f^{(4)}(0) = f^{(8)}(0) = \cdots = 1$, $f''(0) = f^{(6)}(0) = f^{(10)}(0) = \cdots = -1$, $f'(0) = f^{(3)}(0) = f^{(5)}(0) = \cdots = 0$. Daher sieht die Taylorapproximation so aus:

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \pm \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

mit

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

[4] Das Taylorpolynom T_n bezieht sich auf eine gegebene Funktion f und einen gegebenen Entwicklungspunkt x_0; daher müsste man präziser T_n^{f,x_0} statt T_n schreiben. Es sollte jedoch aus dem Kontext immer klar sein, zu welcher Funktion und welchem Entwicklungspunkt das Taylorpolynom gebildet wird.

(c) Analoge Überlegungen für die Sinusfunktion liefern

$$T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \pm \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

mit

$$R_{2n}(x) = \frac{(-1)^n \cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

(d) Als letztes Beispiel betrachte $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1+x)$ mit $x_0 = 0$. Für die Ableitungen gilt $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!/(1+x)^k$, also $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Deshalb ist

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

mit

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}.$$

Für $x > 0$ hat man also wegen $1 + \xi > 1$

$$|\log(1+x) - T_n(x)| \le \frac{x^{n+1}}{n+1};$$

um $\log 1.1$ auf n Dezimalstellen zu approximieren, braucht man also nur $T_{n-1}(0.1)$ zu berechnen.

Aus diesem Beispiel können wir eine erste Konsequenz über die Größe von π ziehen, über die wir ja noch gar nichts wissen. (Zur Erinnerung: In Grundeigenschaft (a) der trigonometrischen Funktionen in Abschnitt III.4 wurde $\pi/2$ als kleinste positive Nullstelle der Kosinusfunktion definiert.) Jetzt können wir Folgendes sagen.

Korollar IV.3.4 *Die Kosinusfunktion besitzt im Intervall* $(0,2)$ *genau eine Nullstelle. Daher ist* $0 < \pi < 4$.

Beweis. Wir benutzen zuerst die Darstellung

$$\cos x = T_3(x) + R_3(x) = T_2(x) + R_3(x)$$

für $x = 2$. Es ist $T_2(2) = 1 - \frac{2^2}{2} = -1$ und $R_3(2) = \frac{\cos\xi}{4!}2^4$ für ein $\xi \in (0,2)$, also insbesondere $|R_3(2)| \le \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}$. Daraus folgt $\cos 2 \le -\frac{1}{3}$. Da die Kosinusfunktion stetig ist, besitzt sie wegen $\cos 0 = 1$ nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0,2)$.

Jetzt zeigen wir die Eindeutigkeit dieser Nullstelle, indem wir zeigen, dass cos in $[0, 2]$ streng monoton fällt. Wie im Beweis von Satz III.4.3 ist für $x_1, x_2 \in [0, 2]$, $x_1 < x_2$,

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2};$$

und sowohl $\frac{x_1+x_2}{2}$ als auch $\frac{x_2-x_1}{2}$ liegen in $(0, 2)$. Daher bleibt zu begründen, warum $\sin u > 0$ für $0 < u < 2$ ist. Hierbei hilft die Taylorentwicklung der Sinusfunktion mit $n = 4$. Es ist

$$\sin u = T_4(u) + R_4(u) = T_3(u) + R_4(u)$$

mit

$$|R_4(u)| = \frac{|\cos \xi|}{5!} u^5 \leq \frac{u^5}{5!}$$

für ein geeignetes $\xi \in (0, u)$. Daher ist für $0 < u < 2$

$$\begin{aligned} \sin u &= u - \frac{u^3}{3!} + R_4(u) \geq u - \frac{u^3}{3!} - \frac{u^5}{5!} \\ &= u\Big(1 - \frac{u^2}{6} - \frac{u^4}{120}\Big) > u\Big(1 - \frac{2^2}{6} - \frac{2^4}{120}\Big) = \frac{1}{5} u > 0. \end{aligned}$$

□

Genauere Informationen über π werden wir in (IV.3.2) erzielen.

Wenn f beliebig häufig differenzierbar ist, d.h. wenn die höheren Ableitungen $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren, liegt die Versuchung nahe, in der Taylorschen Formel $n \to \infty$ streben zu lassen. Das führt formal auf die *Taylorreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

einer solchen Funktion. Hier können zwei Pleiten passieren:

1) Die Taylorreihe konvergiert für kein $x \neq x_0$.

2) Die Taylorreihe konvergiert, aber nicht gegen $f(x)$.

(Beispiele für diese Phänomene sind allerdings nicht leicht zu finden.)

Der folgende Satz gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Taylorreihe gegen $f(x)$ an.

Satz IV.3.5 *Seien I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ beliebig häufig differenzierbar und $x, x_0 \in I$. Dann konvergiert die Taylorreihe von f genau dann bei x gegen $f(x)$, wenn $R_n(x) \to 0$.*

Beweis. Das ist klar, da $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. □

Untersuchen wir die Funktionen aus Beispiel IV.3.3. Der Entwicklungspunkt ist wie dort $x_0 = 0$.

Satz IV.3.6

(a) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ *für* $-\frac{1}{2} \le x \le 1$. *Insbesondere ist*

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots .$$

Beweis. In jedem Fall ist nach Satz IV.3.5 zu zeigen, dass das Restglied $R_n(x)$ in der Taylorformel gegen 0 strebt. Wir schreiben für das in R_n auftauchende ξ lieber ξ_n, da es ja von n abhängt.

(a) Hier ist

$$|R_{2n}(x)| = |R_{2n+1}(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi_{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, denn $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$ konvergiert für jedes $u \in \mathbb{R}$, also bilden die Glieder der Reihe eine Nullfolge.

(b) Hier ist

$$|R_{2n-1}(x)| = |R_{2n}(x)| = \left| \frac{(-1)^n \sin \xi_{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, Begründung siehe oben.

(c) Hier ist

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{x}{1+\xi_n} \right|^{n+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Im Fall $0 \le x \le 1$ ist $1 + \xi_n \ge 1$ und deshalb $|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \to 0$. Im Fall $-\frac{1}{2} \le x \le 0$ ist $1 + \xi_n \ge \frac{1}{2}$ und deshalb $|\frac{x}{1+\xi_n}| \le 1$. Wieder folgt $|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \to 0$. □

Die obige Taylorentwicklung des Logarithmus ist sogar für $-1 < x \le 1$ gültig, aber unser Beweis hat das nicht gezeigt. Das Argument dafür wird am Ende von Abschnitt VII.2 nachgeliefert.

Warum taucht die Exponentialfunktion in diesem Satz nicht auf? Ganz einfach: Die Taylorentwicklung

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

war ja die *Definition* der Exponentialfunktion! Trotzdem ist es eine gute Übung zu verifizieren, dass auch hier stets $R_n(x) \to 0$ gilt: Es ist ja $R_n(x) = \frac{\exp(\xi_n)}{(n+1)!} x^{n+1}$ mit ξ_n zwischen 0 und x; für $x > 0$ hat man also $|R_n(x)| \le \exp(x) \frac{x^n}{n!} \to 0$, und für $x < 0$ hat man $|R_n(x)| \le \frac{|x|^n}{n!} \to 0$.

Für Sinus und Kosinus zeigt Satz IV.3.6, dass man ausgehend von den Grundeigenschaften aus Abschnitt III.4 notwendig bei den in (III.4.1) genannten Funktionen landet, womit sich der Kreis schließt.

Zurück zu π. Wir wissen bereits, dass $\pi/2$ zwischen 0 und 2 liegt und dass cos dort streng monoton fällt. Die Kosinusreihe ist eine alternierende Reihe, und für $0 \le x \le 2$ bilden die Beträge der Terme (mit Ausnahme des nullten) eine monoton fallende Nullfolge, da ja für $n \ge 1$

$$\frac{\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}} = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \le \frac{4}{3 \cdot 4} < 1$$

für $0 < x \le 2$. Man kann also $1 - \cos x$ als alternierende Reihe mit einer monoton fallenden Nullfolge darstellen. Die Einschließungsabschätzung (II.3.4) des Leibniz-Kriteriums zeigt daher

$$\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \le 1 - \cos x \le \frac{x^2}{2!},$$

so dass

$$1 - \frac{x^2}{2!} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \text{für } 0 \le x \le 2.$$

Deshalb liegt die kleinste Nullstelle des Kosinus zwischen $\sqrt{2}$ und der kleinsten positiven Nullstelle von $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$; diese ist $\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$ (warum?). Also muss

$$2.828\ldots = 2\sqrt{2} \le \pi \le 2\sqrt{6 - 2\sqrt{3}} = 3.184\ldots \tag{IV.3.2}$$

sein.

Im Buch von O. Forster wird gezeigt, wie man mit Hilfe der Taylorschen Formel für die Kosinusfunktion die Zahl $\pi/2$ auf viele Stellen genau berechnen kann; in der 1. Auflage verwendet er das Taylorpolynom T_{14} auf einem Taschenrechner und erhält 9 Nachkommastellen, in neueren Auflagen benutzt er seine Software `Aribas`, um 15 Stellen mit T_{20} zu berechnen.

IV.4 Monotonie, Konvexität und Extremwertaufgaben

Wir wollen studieren, was man mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung einer Funktion über diese schlussfolgern kann. Diese Aufgabenstellung wird in der Schulmathematik *Kurvendiskussion* genannt; sie spielt auch sonst in der Mathematik eine wichtige Rolle.

Der folgende Satz beschreibt die Rolle der 1. Ableitung.

Satz IV.4.1 *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall.*

(a) *f ist genau dann monoton wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ gilt.*

(b) *f ist streng monoton wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in I$ gilt, aber die Umkehrung ist falsch.*

Beweis. (a) Sei f monoton wachsend und $x \in I$. Dann gilt $f(x+h) \geq f(x)$ für alle $h > 0$, für die $x+h$ in I liegt. Für diese h ist $\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \geq 0$, und es folgt $f'(x) \geq 0$.

Es gelte nun $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Seien $x_2 > x_1$ in I. Dann ist nach dem Mittelwertsatz für ein $\xi \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0.$$

Es folgt $f(x_2) \geq f(x_1)$, und f ist monoton wachsend.

Der Fall, dass f monoton fällt bzw. $f' \leq 0$ ist, wird analog bewiesen oder durch Betrachten von $-f$ auf den bewiesenen Fall zurückgeführt. (Führen Sie beide Argumente aus!)

(b) Die erste Behauptung wird wie unter (a) bewiesen. Das Beispiel $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ist ein Gegenbeispiel zur Umkehrung: f ist streng monoton wachsend, aber f' ist nicht überall > 0. □

Als einfaches Beispiel betrachte $f(x) = 2x - \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$. Wegen $f'(x) = 2 - \cos x \geq 1$ ist f streng monoton wachsend.

Die 2. Ableitung einer Funktion ist mit dem Krümmungsverhalten des Graphen verknüpft. Um das zu präzisieren, nennen wir eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall *konvex*, wenn

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2,\ 0 < r < 1 \ \Rightarrow\ f(rx_1 + (1-r)x_2) \leq rf(x_1) + (1-r)f(x_2);$$

sie heißt *strikt konvex*, wenn

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2,\ 0 < r < 1 \ \Rightarrow\ f(rx_1 + (1-r)x_2) < rf(x_1) + (1-r)f(x_2);$$

sie heißt *konkav*, wenn

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2,\ 0 < r < 1 \ \Rightarrow\ f(rx_1 + (1-r)x_2) \geq rf(x_1) + (1-r)f(x_2);$$

und sie heißt *strikt konkav*, wenn

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2,\ 0 < r < 1 \ \Rightarrow\ f(rx_1 + (1-r)x_2) > rf(x_1) + (1-r)f(x_2).$$

Diese Bedingungen können so interpretiert werden: f ist strikt konvex, wenn für je zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in I$ das Sekantensegment, das die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ verbindet, oberhalb des Graphen von f verläuft; ist f nur konvex, darf der Graph von f auch Strecken enthalten. (Beachten Sie dazu, dass $[x_1, x_2] = \{rx_1 + (1-r)x_2 \colon 0 \le r \le 1\}$.)

Eine Skizze suggeriert, dass der Graph einer (strikt) konvexen Funktion „nach links" gekrümmt ist und der Graph einer (strikt) konkaven Funktion „nach rechts" gekrümmt ist. Der Begriff der Krümmung wird quantitativ in der Analysis II gefasst.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit konvexen Funktionen; die entsprechenden Aussagen über konkave Funktionen sind analog zu formulieren und beweisen.

Lemma IV.4.2 *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall ist genau dann konvex (bzw. strikt konvex), wenn für alle $a < b < c$ in I gilt:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \qquad \text{(IV.4.1)}$$

(bzw. strikte Ungleichungen).

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Seien $a < b < c$ Elemente von I. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, die lineare Funktion, die die Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ beschreibt. Die erste in (IV.4.1) behauptete Ungleichung ist dann zu $g(c) \le f(c)$ äquivalent, wie man durch Umstellen erkennt.

Sei nun f konvex; seien $a < b < c$ wie oben. Schreibe $b = ra + (1-r)c$ mit $0 < r < 1$; $r = \frac{c-b}{c-a}$ tut's. Um mit den obigen Bezeichnungen $g(c) \le f(c)$ zu beweisen, beobachten wir einerseits

$$f(b) = g(b) = g(ra + (1-r)c) = rg(a) + (1-r)g(c) = rf(a) + (1-r)g(c)$$

und andererseits wegen der Konvexität von f

$$f(b) \le rf(a) + (1-r)f(c).$$

Da $1 - r > 0$, folgt $g(c) \le f(c)$. Die zweite Ungleichung in (IV.4.1) wird ausgehend von der Sekante durch $(b, f(b))$ und $(c, f(c))$ genauso bewiesen (tun Sie's!).

Nun sei (IV.4.1) vorausgesetzt. Seien $a < c$ Elemente von I und $0 < r < 1$; setze $b = ra+(1-r)c$. Ist g wie oben, so ist jetzt $g(c) \le f(c)$ nach Voraussetzung (IV.4.1); die Rechnung oben zeigt hier

$$f(b) = rf(a) + (1-r)g(c) \le rf(a) + (1-r)f(c).$$

Also ist f konvex[5].

[5]Der Beweis zeigt, dass bereits die erste Ungleichung in (IV.4.1) die Konvexität von f impliziert.

Der strikte Fall wird genauso bewiesen. □

Es geht ein bisschen besser.

Satz IV.4.3 *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall ist genau dann konvex (bzw. strikt konvex), wenn für alle $a < b < c$ in I gilt:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \tag{IV.4.2}$$

(bzw. strikte Ungleichung).

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass (IV.4.2) die Ungleichungen (IV.4.1) impliziert. Dazu schreibe

$$\begin{aligned}\frac{f(c)-f(a)}{c-a} &= \frac{c-b}{c-a}\frac{f(c)-f(b)}{c-b} + \frac{b-a}{c-a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\ &= r\frac{f(c)-f(b)}{c-b} + (1-r)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\end{aligned}$$

mit $0 < r = \frac{c-b}{c-a} < 1$. Deshalb liegt der mittlere Term in (IV.4.1) zwischen den beiden äußeren. □

Jetzt können wir folgendes Konvexitätskriterium beweisen; für konkave Funktionen drehen sich die Ungleichungen natürlich um.

Satz IV.4.4 *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion auf einem Intervall.*

(a) *f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$ ist.*
(b) *f ist strikt konvex, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist; die Umkehrung gilt nicht.*

Beweis. (a) Es gelte $f''(x) \ge 0$ auf I; zeigen wir (IV.4.2). Nach dem Mittelwertsatz existieren für $a < b < c$ in I Stellen $\xi_1 \in (a,b)$ und $\xi_2 \in (b,c)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Es ist $\xi_1 < \xi_2$ und nach Satz IV.4.1 $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, da $f'' \ge 0$ ist. Das zeigt (IV.4.2).

Umgekehrt sei f konvex. Nach Satz IV.4.1 ist zu zeigen, dass f' monoton wächst. Seien dazu $x_1 < x_2$ in I. Wähle ferner x_1', x_2' mit $x_1 < x_1' < x_2' < x_2$. Da f konvex ist, folgt nach Satz IV.4.3 (der zweimal angewendet wird)

$$\frac{f(x_1')-f(x_1)}{x_1'-x_1} \le \frac{f(x_2')-f(x_1')}{x_2'-x_1'} \le \frac{f(x_2)-f(x_2')}{x_2-x_2'}$$

Geht man jetzt zu den Grenzwerten $x_1' \to x_1$ und $x_2' \to x_2$ über, erhält man $f'(x_1) \le f'(x_2)$, und f' ist monoton wachsend.

(b) Die erste Behauptung wird wie unter (a) bewiesen, und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, ist ein Gegenbeispiel für die Umkehrung. $\square$

Tatsächlich hat der Beweis von Satz IV.4.4 sogar Folgendes gezeigt; jetzt haben wir auch in Teil (b) eine Äquivalenz.

Satz IV.4.5 *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall.*

(a) *f ist genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist.*

(b) *f ist genau dann strikt konvex, wenn f' strikt monoton wachsend ist.*

Beweis. Das einzige, das noch nicht im obigen Beweis abgedeckt ist, ist die Rückrichtung in (b). Sei also f strikt konvex; dann wissen wir bereits, dass f' monoton wächst. Wäre f' nicht strikt wachsend, wäre f' auf einem Teilintervall $J \subset I$ konstant. Es folgt, dass f auf J die Gestalt $f(x) = mx + \beta$ hat und deshalb nicht strikt konvex ist. $\square$

Auch die Konvexität oder Konkavität einer Funktion kann genutzt werden, um Ungleichungen zu beweisen. Betrachte zum Beispiel die Logarithmusfunktion. Ihre 2. Ableitung ist $x \mapsto -1/x^2 < 0$ auf $(0,\infty)$, also ist die Logarithmusfunktion nach (dem Gegenstück von) Satz IV.4.4 konkav (sogar strikt). Das bedeutet für $0 < x, y$ und $0 \le r \le 1$

$$\log(rx + (1-r)y) \ge r\log x + (1-r)\log y = \log(x^r y^{1-r}),$$

und das liefert

$$x^r y^{1-r} \le rx + (1-r)y.$$

Speziell ist für $r = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}.$$

Diese Ungleichung kann zur Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel ausgebaut werden. Wir schicken eine allgemeine Beobachtung voraus.

Satz IV.4.6 (Jensensche Ungleichung)
Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion auf einem Intervall, seien $x_1, \dots, x_n \in I$ und $r_1, \dots, r_n \ge 0$ mit $\sum_{k=1}^n r_k = 1$. Dann gilt

$$f\Bigl(\sum_{k=1}^n r_k x_k\Bigr) \le \sum_{k=1}^n r_k f(x_k).$$

Beweis. Das sieht man mit vollständiger Induktion ein. Der Fall $n = 1$ ist trivial, und der Fall $n = 2$ ist die Definition der Konvexität. Nun wollen wir den Induktionsschluss von n auf $n+1$ durchführen. Seien also $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$, $r_1, \dots, r_{n+1} \geq 0$ mit $\sum_{k=1}^{n+1} r_k = 1$. Setze $r = \sum_{k=1}^{n} r_k = 1 - r_{n+1}$ und $x = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{r} x_k$. (Der Fall $r = 0$ ist trivial und darf ausgeschlossen werden.) Beachte, dass x in I liegt und $\sum_{k=1}^{n+1} r_k x_k = rx + (1-r)x_{n+1}$. Daher ist nach Definition der Konvexität bzw. nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} f\Bigl(\sum_{k=1}^{n+1} r_k x_k\Bigr) &= f(rx + (1-r)x_{n+1}) \\ &\leq r f(x) + (1-r) f(x_{n+1}) \\ &\leq r \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{r} f(x_k) + r_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} r_k f(x_k), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Diesen Satz (bzw. sein Gegenstück) wenden wir auf die konkave Logarithmusfunktion an.

Satz IV.4.7 (Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel) *Seien $x_1, \dots, x_n > 0$. Dann gilt*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n};$$

das geometrische Mittel dieser Zahlen ist also höchstens so groß wie das arithmetische.

Beweis. Die zu zeigende Ungleichung ist äquivalent zur Ungleichung

$$\frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n} = \log \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \log\Bigl(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\Bigr);$$

das ist aber ein Spezialfall der Jensenschen Ungleichung mit $r_1 = \dots = r_n = \frac{1}{n}$, angewandt auf die konvexe Funktion $-\log$. □

Das letzte Thema des Abschnitts sind Extremwerte.

Definition IV.4.8 Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Bei $x_0 \in D$ liegt ein *lokales Maximum* vor, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|x - x_0| < \delta,\ x \in D \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Es liegt ein *striktes lokales Maximum* vor, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in D \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_0).$$

Analog erklärt man (*strikte*) *lokale Minima*. Ein (*striktes*) *lokales Extremum* ist ein (striktes) lokales Minimum oder Maximum.

Beachten Sie, dass für eine konstante Funktion jede Stelle eine lokale Minimum- und Maximumstelle ist, die natürlich nicht strikt ist.

Die Differentialrechnung liefert einfache Kriterien zum Auffinden lokaler Extremalstellen. Beginnen wir mit einer notwendigen Bedingung.

Satz IV.4.9 *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall. Ist x_0 ein innerer Punkt von I und liegt dort ein lokales Extremum von f vor, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir den Fall eines lokalen Maximums an. Dann existiert ein Intervall $I' = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ mit

$$x \in I' \quad \Rightarrow \quad f(x) \le f(x_0).$$

Dasselbe Argument wie im Satz von Rolle (Satz IV.2.2) liefert $f'(x_0) = 0$. □

Natürlich stimmt die Aussage dieses Satzes nicht, wenn x_0 ein Randpunkt von I ist (Beispiel?).

Wie aus der Schulmathematik bekannt, erhält man hinreichende Bedingungen mit Hilfe der 2. Ableitung.

Satz IV.4.10 *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall, die an der Stelle $x_0 \in I$ zweimal differenzierbar ist. Es gelte $f'(x_0) = 0$; hier darf x_0 auch ein Randpunkt von I sein.*

(a) *Wenn $f''(x_0) > 0$ ist, liegt bei x_0 ein striktes lokales Minimum vor.*

(b) *Wenn $f''(x_0) < 0$ ist, liegt bei x_0 ein striktes lokales Maximum vor.*

(c) *Wenn $f''(x_0) = 0$ ist, ist keine Aussage möglich.*

Beweis. Wir verwenden Satz IV.2.10. Das zweite Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt x_0 ist $T_2(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$, da $f'(x_0) = 0$. Satz IV.2.10 impliziert unter Voraussetzung (a)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2} f''(x_0) > 0.$$

Wäre x_0 keine strikte lokale Minimalstelle, gäbe es eine Folge in I mit $x_n \to x_0$ und $f(x_n) \le f(x_0)$, und es wäre

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{(x_n - x_0)^2} \le 0.$$

Damit ist (a) bewiesen, und (b) geht genauso.

Für (c) betrachte $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = -x^4$ und $f_3(x) = x^3$ jeweils bei $x_0 = 0$. Es ist $f_k'(0) = f_k''(0) = 0$ für $k = 1, 2, 3$; aber f_1 hat bei 0 ein striktes lokales Minimum, f_2 hat bei 0 ein striktes lokales Maximum, und f_3 hat überhaupt kein lokales Extremum auf $\mathbb{R}$. □

Wir wollen noch zwei weitere Argumente für diesen für die Schulmathematik (und nicht nur sie!) zentralen Satz angeben, allerdings unter der *zusätzlichen Voraussetzung*, dass f'' auf ganz I existiert und bei x_0 stetig ist. (Diese Voraussetzung ist in Anwendungen praktisch immer erfüllt, und man mag die obige schwächere Voraussetzung, dass f differenzierbar ist und bloß $f''(x_0)$ existiert, für akademisch halten.)

Dann können wir für (a) auch so argumentieren: Nach Satz III.1.9 existiert ein $\delta > 0$ mit $f''(x) > 0$ für $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ (überlegen Sie die Modifikationen für einen Randpunkt selbst!). Nach Satz IV.4.1 ist f' auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ streng monoton wachsend; insbesondere ist wegen $f'(x_0) = 0$ die Ableitung negativ auf $(x_0 - \delta, x_0)$ und positiv auf $(x_0, x_0 + \delta)$. Das impliziert (wiederum nach Satz IV.4.1), dass f auf $(x_0 - \delta, x_0)$ streng monoton fällt und auf $(x_0, x_0 + \delta)$ streng monoton wächst. Da f bei x_0 stetig ist, liegt bei x_0 ein striktes lokales Minimum vor.

Ein alternatives Argument unter der obigen Zusatzvoraussetzung benutzt den Satz von Taylor. Wieder existiert ein $\delta > 0$ wie oben; in der Taylorschen Formel ist $T_1(x) = f(x_0)$ wegen $f'(x_0) = 0$ und $R_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 > 0$ für $0 < |x - x_0| < \delta$. Daher ist $f(x) = T_1(x) + R_1(x) > f(x_0)$ für diese x.

Tatsächlich ist Teil (c) in Satz IV.4.10 nicht das letzte Wort.

Satz IV.4.11 *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion auf einem Intervall, für die an einer Stelle $x_0 \in I$ die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ existiert. Es gelte $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

(a) *Wenn n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist, liegt bei x_0 ein striktes lokales Minimum vor.*

(b) *Wenn n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist, liegt bei x_0 ein striktes lokales Maximum vor.*

(c) *Wenn n ungerade und x_0 ein innerer Punkt von I ist, liegt bei x_0 keine lokale Extremalstelle vor.*

Beweis. (a) und (b) zeigt man genauso wie Satz IV.4.10, wenn man jetzt von Satz IV.2.12 ausgeht.

(c) Satz IV.2.12 liefert nun

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} =: \alpha \neq 0.$$

Nehmen wir ohne Einschränkung $\alpha > 0$ an. Wenden wir das ε-δ-Kriterium auf den obigen Grenzwert mit $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha$ an, erhält man ein δ, das so klein gewählt werden kann, dass $I' := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ ist (x_0 ist ja ein innerer Punkt von I), mit

$$x \in I' \quad \Rightarrow \quad \Big| \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} - \alpha \Big| < \frac{\alpha}{2}.$$

Also ist für $x \in I'$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Da n ungerade ist, hat der Nenner dasselbe Vorzeichen wie $x - x_0$; daher ist $f(x) > f(x_0)$ für $x > x_0$, $x \in I'$, und $f(x) < f(x_0)$ für $x < x_0$, $x \in I'$. Es liegt demnach bei x_0 keine lokale Extremalstelle vor. □

In der Schulmathematik werden extensiv Extremwertaufgaben für quadratische Polynome behandelt. Dafür ist die Differentialrechnung jedoch nicht entwickelt worden, denn solche Extremalprobleme können elementar durch quadratische Ergänzung gelöst werden, da ja

$$x^2 + bx + c = \Big(x + \frac{b}{2}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

(Wir sind ohne Einschränkung von einem quadratischen Polynom mit dem führenden Koeffizienten 1 ausgegangen.) Diese Darstellung impliziert sofort, dass bei $x_0 = -\frac{b}{2}$ ein globales Minimum der Funktion vorliegt.

Mit etwas mehr Aufwand lassen sich auch kubische Extremalprobleme elementar lösen. Wir suchen die lokalen Extremalstellen eines kubischen Polynoms, dessen Leitkoeffizient wieder 1 sei: $x^3 + bx^2 + cx + d$. Der erste Trick ist, die Koordinatentransformation $t = x + \frac{b}{3}$ vorzunehmen; drückt man das Polynom durch t statt x aus, erhält man

$$\Big(t - \frac{b}{3}\Big)^3 + b\Big(t - \frac{b}{3}\Big)^2 + c\Big(t - \frac{b}{3}\Big) + d.$$

Beim Ausmultiplizieren fällt der quadratische Term weg, und man erhält ein Polynom der Form $t^3 + pt + q$, das zu optimieren ist. Das ist äquivalent dazu, $t^3 + pt$ zu optimieren. Für $p \geq 0$ ist $t \mapsto t^3 + pt$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, und es gibt keine lokalen Extrema. Für $p < 0$ schreibe $p = -r^2$ für ein $r > 0$, und die Koordinatentransformation $s = \frac{\sqrt{3}}{r} t$ überführt $t^3 + pt$ in $\frac{r^3}{3\sqrt{3}}(s^3 - 3s)$. Es bleibt daher, die lokalen Extrema von $f(s) = s^3 - 3s$ zu untersuchen. Da diese Funktion ungerade ist, reicht es, sich auf das Intervall $[0, \infty)$ zu beschränken. Wir untersuchen f auf Monotonie (natürlich ohne die Ableitung zu verwenden): Es ist für $0 \leq s_1 < s_2$

$$f(s_2) - f(s_1) = (s_2^3 - s_1^3) - 3(s_2 - s_1) = (s_2 - s_1)(s_2^2 + s_1 s_2 + s_1^2 - 3).$$

Daraus folgt: f ist auf $[0, 1]$ streng monoton fallend, denn für $0 \leq s_1 < s_2 \leq 1$ ist die letzte Klammer < 0, und auf $[1, \infty)$ ist f streng monoton wachsend, denn für $1 \leq s_1 < s_2$ ist die letzte Klammer > 0. Deshalb besitzt f bei $x_0 = 1$ ein striktes lokales Minimum und bei $x_0 = -1$ ein striktes lokales Maximum, und das sind die einzigen Extremalstellen. Wenn man alle Koordinatentransformationen rückgängig macht, erhält man die Extremalstellen des ursprünglichen Polynoms.

Natürlich ist es viel einfacher (und fast narrensicher), kubische Extremalprobleme mit Satz IV.4.10 zu lösen.

Version vom 19. März 2021

Kapitel V

Integralrechnung

V.1 Das Integral für stetige Funktionen

Der Entwicklung der Integralrechnung liegt das Problem zugrunde, den Flächeninhalt krummliniger Bereiche zu berechnen, sagen wir den Inhalt der Fläche unter dem Graphen einer (positiven) Funktion über dem Intervall $[a, b]$. Ein strikter Integralbegriff wurde aber erst im 19. Jahrhundert entworfen, und dieses *Riemannsche Integral* wird in der Regel in der Analysis II im Detail vorgestellt, was aber coronabedingt dieses Jahr ausfällt. Hier wollen wir nur eine Kurzversion besprechen, die es gestattet, stetige Funktionen zu integrieren, was für die Schulmathematik und viele Anwendungen ausreicht.

Um den Flächeninhalt unter einem (krummlinigen) Graphen zu approximieren, liegt es nahe, diesen durch horizontale Stücke zu ersetzen. Diesen Weg werden wir versuchen zu gehen; leider sind unterwegs ein paar spitzfindige Bemerkungen zu machen, wenn wir auf selbstverständlich erscheinende Aussagen treffen, die aber doch einer (länglichen) Begründung bedürfen.

Die oben erwähnten horizontalen Stücke werden sich als Graphen ganz einfacher Funktionen erweisen, die wir jetzt definieren.

Definition V.1.1 Eine Funktion $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es Zahlen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gibt, so dass φ auf jedem Teilintervall (x_{k-1}, x_k) konstant ist; an die Werte $\varphi(x_k)$ wird keine spezielle Forderung gestellt. Die Menge der Treppenfunktionen auf $[a, b]$ wird mit $T[a, b]$ bezeichnet.

Die erste wichtige Beobachtung an dieser Stelle ist, dass die *Zerlegungspunkte* x_k einer Treppenfunktion φ nicht eindeutig bestimmt sind; zum Beispiel kann die konstante Funktion $\varphi = \mathbb{1}$ auf $[0, 1]$ sowohl durch die offensichtliche Zerlegung $0 = x_0 < x_1 = 1$, aber auch mit Hilfe von $0 = y_0 < y_1 = \frac{1}{2} < y_2 = 1$ als Treppenfunktion dargestellt werden.

Ist $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit den Zerlegungspunkten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, so ist ein naheliegender Kandidat für den Flächeninhalt unter dem Graphen durch die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \tag{V.1.1}$$

gegeben, wenn c_k der Wert von φ im Intervall (x_{k-1}, x_k) ist.

Wir wollen begründen, dass die Zahl in (V.1.1) tatsächlich nur von φ und nicht von der betrachteten Zerlegung abhängt – dies ist eine der angekündigten spitzfindigen Bemerkungen. Zur Abkürzung schreiben wir $I(\varphi, X)$ für die Summe in (V.1.1), wobei $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ ist. Als erstes überlegen wir, was passiert, wenn man zur Darstellung von φ einen weiteren Punkt y hinzunimmt. Da y nicht in X liegen soll, gibt es ein offenes Teilintervall, das y enthält, sagen wir $x_{j-1} < y < x_j$. Dann hat φ die Darstellungen

$$\varphi(x) = c_k \quad \text{für } x_{k-1} < x < x_k,\ k = 1, \ldots, n$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= c_k \quad \text{für } x_{k-1} < x < x_k,\ k = 1, \ldots, n,\ k \neq j,\\
\varphi(x) &= c_j \quad \text{für } x_{j-1} < x < y,\\
\varphi(x) &= c_j \quad \text{für } y < x < x_j.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$I(\varphi, X) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

und

$$\begin{aligned}
I(\varphi, X \cup \{y\}) &= \sum_{k=1}^{j-1} c_k(x_k - x_{k-1}) + c_j(y - x_{j-1}) + c_j(x_j - y)\\
&\qquad + \sum_{k=j+1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})\\
&= \sum_{k=1}^{j-1} c_k(x_k - x_{k-1}) + c_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{k=j+1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})\\
&= I(\varphi, X).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass sich $I(\varphi, X)$ nicht ändert, wenn man (künstlich) endlich viele Punkte zu X hinzunimmt.

Nun sei φ gemäß einer weiteren Zerlegung $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b$ dargestellt; setze $Y = \{y_0, \ldots, y_m\}$. Geht man zur „gemeinsamen Verfeinerung“

$Z = X \cup Y$ über, so zeigt die obige Überlegung, dass sowohl $I(\varphi, X) = I(\varphi, Z)$ als auch $I(\varphi, Y) = I(\varphi, Z)$ ist. Daher ist $I(\varphi, X) = I(\varphi, Y)$, und die Summe in (V.1.1) ist in der Tat unabhängig von der verwendeten Darstellung von φ. Das gestattet es, die folgende Definition auszusprechen.

Definition V.1.2 Ist $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, so setze

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}),$$

wenn $\varphi(x) = c_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$.

Das ist eine Billigversion des Integrals, das durch I für ganz einfache Funktionen erklärt ist. Es hat folgende Eigenschaften.

Satz V.1.3 *Seien $\varphi, \psi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) *Auch $\varphi + \psi$ und $\lambda\varphi$ sind Treppenfunktionen.*

(b) *Es gilt*
$$I(\varphi + \psi) = I(\varphi) + I(\psi), \quad I(\lambda\varphi) = \lambda I(\varphi).$$

(c) *Ist $\varphi \le \psi$ (d.h. $\varphi(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$), so gilt*
$$I(\varphi) \le I(\psi).$$

Beweis. (a) Wie oben argumentiert, können wir mittels der gemeinsamen Verfeinerung φ und ψ über derselben Zerlegung darstellen. Dann ist die Behauptung aber klar.

(b) Auch das ist jetzt klar, denn in der gemeinsamen Verfeinerung $a = z_0 < z_1 < \ldots < z_p = b$ ist ja für $z_{k-1} < x < z_k$

$$\varphi(x) = c_k,\ \psi(x) = c'_k,\ \varphi(x) + \psi(x) = c_k + c'_k,\ \lambda\varphi(x) = \lambda c_k.$$

Aufsummieren liefert die Behauptung.

(c) Nach Definition ist $I(\chi) \ge 0$ für $\chi \ge 0$. Daraus ergibt sich mit (b) der allgemeine Fall:

$$I(\psi) = I(\psi - \varphi + \varphi) = I(\psi - \varphi) + I(\varphi) \ge I(\varphi). \qquad \square$$

In der Sprache der Linearen Algebra besagt dieser Satz, dass die Menge $T[a, b]$ aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$ einen Vektorraum bildet, auf dem I ein lineares und isotones Funktional ist.

Das nächste Ziel ist es, das elementare Integral I durch Approximation auf eine größere Funktionenklasse auszudehnen. Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige, aber beschränkte Funktion. Wir betrachten folgende Mengen von Treppenfunktionen:

$$\begin{aligned} T_f &= \{\varphi \in T[a, b]\colon \varphi \le f\}, \\ T^f &= \{\psi \in T[a, b]\colon \psi \ge f\}. \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: $\varphi \leq f$ bedeutet $\varphi(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

Diese Mengen sind nicht leer, da für $-M \leq f(x) \leq M$ für alle x die Treppenfunktionen $-M\mathbb{1}$ in T_f und $M\mathbb{1}$ in T^f liegen; $\mathbb{1}$ bezeichnet die konstante Funktion $\mathbb{1}(x) = 1$ für alle x. Weiter gilt für $\varphi \in T_f$ auch $\varphi \leq M\mathbb{1}$ und deshalb (Satz V.1.3)

$$I(\varphi) \leq I(M\mathbb{1}) = MI(\mathbb{1}) = M(b-a).$$

Daher ist die Menge $\{I(\varphi)\colon \varphi \in T_f\}$ nach oben beschränkt; wir setzen

$$I_*(f) = \sup\{I(\varphi)\colon \varphi \in T_f\}.$$

Genauso sieht man, dass $\{I(\psi)\colon \psi \in T^f\}$ nach unten beschränkt ist (prüfen Sie's nach!), und man setzt

$$I^*(f) = \inf\{I(\psi)\colon \psi \in T^f\}.$$

Da für $\varphi \in T_f$, $\psi \in T^f$ nach Satz V.1.3 $I(\varphi) \leq I(\psi)$ gilt, folgt stets $I_*(f) \leq I^*(f)$.

Idealerweise wäre $I_*(f) = I^*(f)$, aber das braucht nicht zu stimmen; für die Dirichletsche Sprungfunktion aus Beispiel III.1.5(c) ist nämlich $I_*(f) = 0$ und $I^*(f) = 1$ (warum?). Daher trifft man folgende Definition.

Definition V.1.4 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt f *integrierbar* (genauer *Riemann-integrierbar*), wenn $I_*(f) = I^*(f)$. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_*(f) = I^*(f).$$

Die Bezeichnung $\int_a^b f(x)\,dx$ für das Integral ist seit über 300 Jahren eingeführt. Das $\int$ ist ein langgestrecktes S, das für *summa* steht; die Differenz $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ aus (V.1.1) wurde bei Leibniz im Grenzübergang zu dx. Obwohl wir heute wissen, dass es Leibniz' „unendlich kleines" dx gar nicht gibt, hat sich diese Integralnotation erhalten, und wie schon bei der Ableitung kann sie gelegentlich als Eselsbrücke nützlich sein (z.B. bei der Substitutionsregel, Satz V.2.7). Man kann natürlich x durch einen anderen Variablennamen ersetzen: $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$ etc.

Als weitere spitzfindige Bemerkung halten wir fest, dass jede Treppenfunktion φ_0 integrierbar ist mit

$$\int_a^b \varphi_0(x)\,dx = I(\varphi_0).$$

Ist nämlich $\varphi \in T_{\varphi_0}$, so ist ja $\varphi \leq \varphi_0$, und nach Satz V.1.3 folgt $I(\varphi) \leq I(\varphi_0)$ und deshalb $I_*(\varphi_0) = \sup\{I(\varphi)\colon \varphi \in T_{\varphi_0}\} \leq I(\varphi_0)$. Andererseits liegt die Treppenfunktion φ_0 selbst in T_{φ_0}, deshalb ist $I(\varphi_0) \leq I_*(\varphi_0)$ und somit $I_*(\varphi_0) = I(\varphi_0)$. Genauso sieht man $I^*(\varphi_0) = I(\varphi_0)$.

Es ist üblicherweise der Analysis II vorbehalten, die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen genauer zu studieren; wie gesagt, fällt das dieses Jahr aus. Hier wollen wir uns nur mit stetigen Funktionen beschäftigen und folgenden Satz beweisen.

Satz V.1.5 *Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist integrierbar.*

Dieser Satz ist alles andere als selbstverständlich, und sein Beweis ist erstaunlich schwierig. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen. Zuerst ein einfaches hinreichendes Kriterium für die Integrierbarkeit:

Lemma V.1.6 *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$\varphi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x) \quad \textit{und} \quad \psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) \le \varepsilon \quad \textit{für alle } x.$$

Dann ist f integrierbar.

Beweis. Es ist

$$I(\varphi_\varepsilon) \le I_*(f) \le I^*(f) \le I(\psi_\varepsilon) \le I(\varphi_\varepsilon) + I(\varepsilon\mathbb{1}) \le I_*(f) + \varepsilon(b - a),$$

da $\psi_\varepsilon \le \varphi_\varepsilon + \varepsilon\mathbb{1}$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $I_*(f) = I^*(f)$ sein. □

Funktionen mit der im Lemma genannten Eigenschaft werden *Regelfunktionen* genannt; wir werden zeigen, dass jede stetige Funktion eine Regelfunktion ist.[1] Dazu sei an das ε-δ-Kriterium erinnert, das wir für eine stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ so formulieren:

$$\forall x \in [a, b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x' \in [a, b] \quad |x' - x| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Insbesondere hängt δ nicht nur von ε, sondern auch von der betrachteten Stelle x ab.

Erstaunlicherweise kann man für stetige Funktionen auf abgeschlossenen, beschränkten Intervallen das δ im ε-δ-Kriterium unabhängig von x wählen; diese Eigenschaft nennt man die *gleichmäßige Stetigkeit* der Funktion.

Lemma V.1.7 *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in [a, b] \quad |x' - x| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

[1] Man kann sogar zeigen, dass eine Funktion auf $[a, b]$ genau dann eine Regelfunktion ist, wenn an jeder Stelle $x_0 \in [a, b]$ die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existieren (bei a natürlich nur der rechtsseitige und bei b der linksseitige).

Beweis. Wäre das nicht so, gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit:

$$\forall\delta > 0\ \exists x_\delta, x'_\delta \in [a,b]\colon\ |x'_\delta - x_\delta| < \delta,\ |f(x'_\delta) - f(x_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Insbesondere gäbe es für $\delta = \frac{1}{n}$ solche x_δ und x'_δ, die wir mit x_n und x'_n bezeichnen:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, x'_n \in [a,b]\colon\ |x'_n - x_n| < \frac{1}{n},\ |f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

Als Folge in $[a,b]$ besitzt (x_n) nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $\xi \in [a,b]$; wegen $|x'_n - x_n| < \frac{1}{n}$ gilt auch $x'_{n_k} \to \xi$. Nun ist f bei ξ stetig; deshalb folgt sowohl $f(x_{n_k}) \to f(\xi)$ als auch $f(x'_{n_k}) \to f(\xi)$. Insbesondere muss $\lim_{k\to\infty} |f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})| = 0$ sein im Widerspruch zu $|f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ für alle n.

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Jetzt ist es nicht mehr schwer, den *Beweis von Satz V.1.5* zu führen. Sei also $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir zeigen das Kriterium von Lemma V.1.6. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ wie in Lemma V.1.7 und dann $n \in \mathbb{N}$ mit $h := \frac{b-a}{n} < \delta$. Seien $x_k = a + kh$, $k = 0,\dots,n$; also $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Setze $m_k = \inf\{f(x)\colon x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ und $M_k = \sup\{f(x)\colon x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$; beachten Sie, dass f ja nach Satz III.2.4 eine beschränkte Funktion ist und deshalb $-\infty < m_k \leq M_k < \infty$ gilt. Schließlich definiere

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x) &= m_k \text{ für } x_{k-1} \leq x < x_k,\ k = 1,\dots,n;\quad \varphi_\varepsilon(b) = f(b) \\ \psi_\varepsilon(x) &= M_k \text{ für } x_{k-1} \leq x < x_k,\ k = 1,\dots,n;\quad \psi_\varepsilon(b) = f(b). \end{aligned}$$

Dann gilt $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ nach Konstruktion. Um die zweite Bedingung aus Lemma V.1.6 einzusehen, verwende erneut Satz III.2.4 und schreibe

$$m_k = f(y_k),\ M_k = f(z_k)$$

für geeignete $y_k, z_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Wegen $|z_k - y_k| \leq x_k - x_{k-1} = h < \delta$ ist nach Wahl von δ (siehe Lemma V.1.7) $M_k - m_k = |f(z_k) - f(y_k)| < \varepsilon$. Das zeigt $\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) < \varepsilon$ für alle x.

Das beweist, dass f eine Regelfunktion und deshalb integrierbar ist. □

Daher ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, das manchmal auch bestimmtes Integral genannt wird, für stetige Funktionen definiert.

Der obige Beweis gibt sogar eine (theoretische) Möglichkeit, das Integral von f zu berechnen; effektive Methoden werden wir erst im nächsten Abschnitt kennen lernen. Setze nämlich in der Notation von eben

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}); \tag{V.1.2}$$

das ist ein Beispiel einer *Riemannschen Summe.*[2] Mit der Notation des letzten Beweises ist

$$I(\varphi_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq S_n(f) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = I(\psi_\varepsilon)$$

sowie

$$I(\varphi_\varepsilon) \leq I_*(f) = \int_a^b f(x)\,dx = I^*(f) \leq I(\psi_\varepsilon).$$

Da $I(\psi_\varepsilon) - I(\varphi_\varepsilon) \leq \varepsilon(b-a)$, liegen $S_n(f)$ und $\int_a^b f(x)\,dx$ beide in einem Intervall der Länge $\leq \varepsilon(b-a)$, sofern $n > \frac{b-a}{\delta}$ (siehe oben) ist. Das heißt aber

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \varepsilon(b-a) \quad \text{für } n > \frac{b-a}{\delta}.$$

Wir haben gezeigt:

Satz V.1.8 *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt für die Riemannschen Summen aus* (V.1.2)

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{V.1.3}$$

Allgemein, d.h. für nicht notwendig äquidistante Zerlegungen, nennt man eine Summe der Form $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ für alle k eine Riemannsche Summe. Satz V.1.8 gilt dann entsprechend, wenn die *Feinheit* der Zerlegung, das ist $\max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})$, mit $n \to \infty$ gegen 0 strebt.

In Analogie zu Satz V.1.3 gelten folgende Eigenschaften für das Integral stetiger Funktionen.

Satz V.1.9 *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) *Es gilt*

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \\ \int_a^b \lambda f(x)\,dx &= \lambda \int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

(b) *Im Fall $f \leq g$ gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

[2] Hier erkennt man nochmals den Hintergrund der Schreibweise $\int_a^b f(x)\,dx$: Im Grenzübergang $n \to \infty$ wird aus der „richtigen" Summe $\sum_k$ eine „kontinuierliche" Summe $\int$, und $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ wird zu dx.

(c) *Speziell ist*
$$\Bigl|\int_a^b f(x)\,dx\Bigr| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis. Wir verwenden die Riemannschen Summen aus (V.1.2). (a) folgt jetzt aus (V.1.3), da $S_n(f+g) = S_n(f) + S_n(g)$ und $S_n(\lambda f) = \lambda S_n(f)$ ist (mit anderen Worten, S_n ist ein lineares Funktional auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen), und für (b) beachte $S_n(f) \le S_n(g)$. Für (c) bemerke, dass $|f|$ ebenfalls stetig, also integrierbar ist, sowie
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,\ -\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (-f(x))\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$
denn $f \le |f|$ und $-f \le |f|$. □

Auch dieser Satz lässt sich kompakt zusammenfassen: $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ ist ein lineares, isotones Funktional auf dem Vektorraum $C[a,b]$ der stetigen Funktionen auf $[a,b]$.

Wir benötigen noch eine weitere Eigenschaft des Integrals, nämlich die Additivität bzgl. des zugrundeliegenden Intervalls.

Satz V.1.10 *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $a < c < b$. Dann gilt*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Für eine Funktion $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ schreiben wir h^l bzw. h^r für den „linken“ bzw. „rechten“ Teil von h, d.h., $h^l\colon [a,c] \to \mathbb{R}$, $h^l(x) = h(x)$, $h^r\colon [c,b] \to \mathbb{R}$, $h^r(x) = h(x)$. (h^l bzw. h^r ist die *Einschränkung* von h auf $[a,c]$ bzw. $[c,b]$.)

Natürlich sind f^l und f^r stetig und deswegen über $[a,c]$ bzw. $[c,b]$ integrierbar. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Treppenfunktion φ auf $[a,b]$ mit $\varphi \le f$ und $\int_a^b f(x)\,dx \le I(\varphi) + \varepsilon$; das ist so nach Definition von $I_*(f)$. Nun ist $\varphi^l \le f^l$ und $\varphi^r \le f^r$ und deshalb
$$I(\varphi^l) \le I_*(f^l) = \int_a^c f^l(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \quad\text{sowie}\quad I(\varphi^r) \le \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ferner ist $I(\varphi) = I(\varphi^l) + I(\varphi^r)$, wie man sofort nachrechnet. Das ergibt zusammen
$$\int_a^b f(x)\,dx \le I(\varphi) + \varepsilon = I(\varphi^l) + I(\varphi^r) + \varepsilon \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \varepsilon$$
und, da $\varepsilon > 0$ beliebig war,
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Wendet man diese Ungleichung auf $-f$ statt f an, erhält man auch

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Damit ist Satz V.1.10 bewiesen. $\square$

Abschließend sei bemerkt, dass sich die Sätze V.1.5, V.1.9 und V.1.10 leicht auf *stückweise stetige Funktionen* ausdehnen lassen; das sind Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, für die $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ existieren, so dass f auf allen offenen Teilintervallen (x_{k-1}, x_k) stetig ist und alle einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_k^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_k^-} f(x)$ existieren. Eine stückweise stetige Funktion kann als Summe einer stetigen Funktion und einer Treppenfunktion geschrieben werden. Aus Zeitgründen müssen wir die Details übergehen.

V.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Riemannschen Summen aus (V.1.2) geben eine theoretische Möglichkeit, ein Integral zu berechnen; siehe Satz V.1.8. Mehr zur Abschreckung als zur Einübung soll jetzt ein Beispiel durchgerechnet werden. Gesucht ist $\int_1^2 x^2\,dx$; wir setzen dazu die Riemannschen Summen

$$S_n = \sum_{k=1}^n \Bigl(1+\frac{k}{n}\Bigr)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n 1 + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2$$

zu der äquidistanten Zerlegung $x_k = 1 + \frac{k}{n}$ an. Die mittlere Summe wurde in (I.1.1) berechnet; auch für die Summe der Quadratzahlen kann man eine explizite Formel entwickeln und durch vollständige Induktion bestätigen, die $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ lautet. Setzt man alles ein, erhält man

$$\int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\frac{1}{n}n + \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Bigr) = \frac{7}{3}.$$

Während dieses Berechnungsverfahren für dieses Beispiel noch durchführbar ist, scheitert man bei $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Beide Beispiele werden jedoch ganz einfach mit Hilfe des *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung* berechnet, den wir jetzt besprechen.

Im Folgenden werden wir auf natürliche Weise auf Integrale geführt, wo die obere Grenze kleiner als die untere ist; so etwas muss erstmal definiert werden:

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0, \qquad \int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx \text{ für } b < a.$$

Wir beobachten zuerst, dass Satz V.1.10 entsprechend gilt.

Lemma V.2.1 *Sei I ein Intervall, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Für alle $a, b, c \in I$ gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Die Aussage ist nach Definition äquivalent zu

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0,$$

und diese Gleichung ist invariant unter Permutationen von a, b und c. (Bei zyklischen Permutationen ändert sich nichts, bei den übrigen ändert jedes Integral sein Vorzeichen.) Ist α die kleinste dieser drei Zahlen, also $\alpha = \min\{a, b, c\}$, β die größte, also $\beta = \max\{a, b, c\}$, und γ die mittlere, also $\gamma = a + b + c - \alpha - \beta$, so ist die letzte Zeile äquivalent zu

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\alpha f(x)\,dx = 0$$

bzw.

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx.$$

Das ist aber klar, falls $\alpha = \gamma$ oder $\beta = \gamma$, und Satz V.1.10 zeigt die Behauptung, falls $\alpha < \gamma < \beta$. □

Nun zum Hauptsatz.

Satz V.2.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Version 1) *Sei I ein Intervall, sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $a \in I$. Setze für $x \in I$*

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dann ist die so definierte Funktion $F_0\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $F_0' = f$.

Beweis. Sei $x_0 \in I$. Wir müssen

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_0(x_0 + h) - F_0(x_0)}{h} = f(x_0)$$

zeigen und benutzen dafür das ε-δ-Kriterium. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f stetig bei x_0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta,\ x \in I \quad\Rightarrow\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nun ist nach Lemma V.2.1 für $x_0 + h \in I$

$$F_0(x_0 + h) - F_0(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

(beachten Sie, dass $h < 0$ oder $x_0 < a$ sein kann) und deshalb für $h \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{F_0(x_0+h) - F_0(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)\\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt.\end{aligned}$$

Jetzt sei zusätzlich $|h| < \delta$. Für die t zwischen x_0 und $x_0 + h$ gilt dann $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$, und mit Satz V.1.9(c) folgt

$$\Bigl|\frac{F_0(x_0+h) - F_0(x_0)}{h} - f(x_0)\Bigr| \leq \Bigl|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt\Bigr| < \varepsilon.$$

Das war zu zeigen. □

Satz V.2.2 gilt nicht mehr, wenn f bloß stückweise stetig ist. Beispiel: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ (vgl. Seite 56), $a = 0$; dann ist $F_0(x) = |x|$.

Um die nächste Version des Hauptsatzes zu formulieren, benötigen wir eine wichtige Vokabel.

Definition V.2.3 Eine Funktion $F\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von $f\colon D \to \mathbb{R}$, wenn $F' = f$ ist.

Satz V.2.2 besagt also, dass jede stetige Funktion auf einem Intervall (mindestens) eine Stammfunktion besitzt, nämlich die dort betrachtete Funktion F_0. Nicht jede Funktion hat eine Stammfunktion (warum hat zum Beispiel die Vorzeichenfunktion sgn keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}$?); und eine Stammfunktion ist nie eindeutig bestimmt, aber die Mehrdeutigkeit lässt sich genau eingrenzen.

Satz V.2.4 *Ist I ein Intervall und sind $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f\colon I \to \mathbb{R}$, so ist $F - G$ eine konstante Funktion.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$; also ist $F - G$ nach Korollar IV.2.4 konstant. □

Satz V.2.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Version 2)
Seien I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. Sei F_0 wie in Satz V.2.2, dann ist definitionsgemäß

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_0(b) = F_0(b) - F_0(a).$$

Andererseits ist nach Satz V.2.4 $F - F_0$ eine Konstante; es folgt $F_0(b) - F_0(a) = F(b) - F(a)$, und der Beweis ist erbracht. $\square$

Diese Version macht klar, dass man jedes Integral berechnen kann, wenn man eine Stammfunktion des Integranden kennt oder errät. Daher kann man das Integrieren als Umkehroperation zum Differenzieren auffassen.

Das einführende Beispiel kann man jetzt im Kopf nachrechnen; für $f(x) = x^2$ definiert nämlich $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion, und daher ist

$$\int_1^2 x^2\,dx = F(2) - F(1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Auch das zweite Beispiel fällt uns jetzt in den Schoß, da die Logarithmusfunktion eine Stammfunktion des Integranden ist:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

Ein Katalog von Stammfunktionen ist daher zur Integralberechnung sehr hilfreich. Man notiert solche Stammfunktionen gern als *unbestimmte Integrale*:

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{V.2.1}$$

bedeutet dann einfach, dass F eine Stammfunktion von f ist. Allerdings darf man solche Formeln nicht bedenkenlos manipulieren; es ist ja auch $F + \mathbb{1}$ eine Stammfunktion von f, so dass $\int f(x)\,dx = F(x) + 1$ mit demselben Recht geschrieben werden kann. Subtraktion beider Gleichungen würde $0 = 1$ liefern. Das Problem ist, dass wir $\int f(x)\,dx$ als solches überhaupt nicht definiert haben und daher (V.2.1) als Gleichung zwischen zwei mathematischen Objekten sinnlos ist. Man darf (V.2.1) nur als Kurzschreibweise für $F' = f$ lesen. Mit dieser Vorsichtsmaßnahme können wir nun folgende Stammfunktionen aus unserer Kenntnis von Beispielen für Ableitungen angeben.

$$\begin{aligned}
\int x^r\,dx &= \frac{1}{r+1}x^{r+1} \quad (\text{falls } r \neq -1)\\
\int e^x\,dx &= e^x\\
\int \sin x\,dx &= -\cos x\\
\int \cos x\,dx &= \sin x\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \log x
\end{aligned}$$

Beim letzten Beispiel ist nochmals Vorsicht geboten, da z.B. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$ immer noch unzugänglich ist, weil ja $\log x$ nur für $x > 0$ definiert und deshalb die Logarithmusfunktion auch nur dort eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist. Gesucht ist nun eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $(-\infty, 0)$. Raten hilft: $x \mapsto \log(-x)$ tut's, da nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} \log(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Man schreibt daher gern

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| \quad (x \neq 0)$$

und meint damit, dass $x \mapsto \log|x|$ auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält, eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist.

Wir haben gerade $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ mit Hilfe des Hauptsatzes berechnet, und am Anfang des Abschnitts haben wir beobachtet, dass der Grenzwert der zugehörigen Riemannschen Summen nicht elementar bestimmt werden kann. Jetzt können wir den Spieß aber umdrehen und diesen Grenzwert, der nicht ganz uninteressant ist, mit Hilfe des Integrals berechnen: In diesem Beispiel ist

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k};$$

also ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \log 2.$$

Raffiniertere Integrationsregeln erhält man durch Rückwärtslesen von Differentiationsregeln.

Satz V.2.6 (Regel von der partiellen Integration)
Es seien f und g stetig differenzierbare Funktionen[3] *auf einem Intervall I. Dann gilt für $a, b \in I$*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx.$$

Beweis. Beachten Sie, dass alle Integranden nach Voraussetzung stetig sind. Die Behauptung ist äquivalent zu

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

und das stimmt nach Satz V.2.5, da fg nach der Produktregel eine Stammfunktion von $f'g + fg'$ ist. $\square$

[3] D.h. f' und g' existieren und sind stetig.

Satz V.2.7 (Substitutionsregel)
Seien I und J Intervalle, $\varphi\colon I \to J$ sei eine stetig differenzierbare Funktion, $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

Beweis. Beachten Sie wieder, dass alle Integranden nach Voraussetzung stetig sind. Sei F eine Stammfunktion von f; dann ist nach der Kettenregel $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Also ist nach Satz V.2.5

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

$\square$

Die Leibnizsche Differential-Symbolik erklärt, warum Satz V.2.7 Substitutionsregel genannt wird; man substituiert im linken Integral nämlich $u = \varphi(x)$ und muss dann aber auch alle anderen Terme durch u ausdrücken. Aus $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$ wird dann $\varphi'(x)dx = du$, und wenn x zwischen a und b läuft, läuft u zwischen $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$.

Beispiele V.2.8 (a) $\int_0^1 xe^x\,dx$ berechnet man mit partieller Integration; setze dort nämlich $f'(x) = e^x$, $f(x) = e^x$ sowie $g(x) = x$, $g'(x) = 1$. Das ergibt mit der praktischen Notation

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

sofort

$$\int_0^1 xe^x\,dx = e^x x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1.$$

Was hätte man eigentlich bekommen, wenn man die Regel von der partiellen Integration mit $f'(x) = x$ und $g(x) = e^x$ angewandt hätte?

(b) $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$ berechnet man mit der Substitutionsregel; setze dort nämlich $f(u) = e^u$ und $\varphi(x) = x^2$. Das ergibt

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du = \frac{1}{2}e^u\Big|_0^4 = \frac{e^4 - 1}{2}.$$

(c) Auch $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$ berechnet man mit der Substitutionsregel, man muss nur ein wenig umformen, bevor man $u = \cos x$ substituieren kann:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{u}\,du = \log 1 - \log\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\log 2}{2}.$$

(d) Schließlich ist $\int_1^2 \log x \, dx$ ein Fall für die partielle Integration, obwohl es sich auf den ersten Blick nicht dafür anbietet. Mit einer „aktiven 1“ erhält man aber

$$\int_1^2 \log x \, dx = \int_1^2 1 \cdot \log x \, dx = x \log x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} \, dx = 2 \log 2 - 1 = \log \frac{4}{e}.$$

(e) Für die Integration rationaler Funktionen, das sind Funktionen der Bauart P/Q mit Polynomen P und Q, gibt es eine spezielle Methode, genannt *Partialbruchzerlegung.* Diese soll nun an einem sehr einfachen Beispiel illustriert werden. Sei Q ein quadratisches Polynom mit zwei verschiedenen Nullstellen x_1 und x_2, dann kann Q gemäß $Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ faktorisiert werden. Die Aufgabe, $1/Q$ über einem Intervall ohne Nullstellen von Q zu integrieren, löst man dann, indem man versucht, $1/Q(x)$ als Linearkombination von $1/(x - x_1)$ und $1/(x - x_2)$ zu schreiben, also

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{1}{a}\Big(\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2}\Big) \qquad (x \neq x_1,\ x \neq x_2).$$

Hat man A_1 und A_2 bestimmt, ist es ein Leichtes, $1/Q$ zu integrieren. Zur Bestimmung von A_1 nimmt man die obige Gleichung mit $x - x_1$ mal, wo $x \neq x_1$ ist. Das führt zu

$$\frac{1}{x - x_2} = A_1 + A_2 \frac{x - x_1}{x - x_2} \qquad (x \neq x_1,\ x \neq x_2).$$

Der Grenzübergang $x \to x_1$ zeigt dann $A_1 = 1/(x_1 - x_2)$. (Das sieht genauso aus, als hätte man in der letzten Gleichung $x = x_1$ eingesetzt, was aber nicht erlaubt ist, da $x = x_1$ in besagter Gleichung ausgeschlossen ist.) Analog findet man A_2.

Wir können noch eine dritte Version des Hauptsatzes aussprechen.

Satz V.2.9 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Version 3)
Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall I, und sei $a \in I$. Dann gilt

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \, dt \quad \textit{für alle } x \in I.$$

Beweis. Das folgt sofort aus der 2. Version (Satz V.2.5), da f eine Stammfunktion von f' ist. (Die Stetigkeit der Ableitung wurde vorausgesetzt, um sicherzustellen, dass f' integrierbar ist.) □

Satz V.2.9 zeigt, wie man eine stetig differenzierbare Funktion aus ihrer Ableitung zurückgewinnen kann. Der Satz gestattet zum Beispiel einen neuen Beweis des Monotoniekriteriums aus Satz IV.4.1 bei stetigen Ableitungen: Ist $f' \geq 0$, so gilt für $x_2 > x_1$

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x) \, dx \geq 0.$$

V.3 Uneigentliche Integrale

Für den Integralbegriff aus Definition V.1.4 ist es notwendig, dass die zu integrierende Funktion auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall definiert und dort beschränkt ist. Es ist jedoch eine Erweiterung auf unbeschränkte Funktionen oder Intervalle denkbar. Hier ist die entsprechende Definition, die der Einfachheit halber nur für stetige Funktionen formuliert wird, die ja über abgeschlossenen, beschränkten Intervallen integrierbar sind.

Definition V.3.1

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Wenn $\lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$ existiert, heißt f über $(a,b]$ *uneigentlich integrierbar*, und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

Analog wird der Fall $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ behandelt.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$, und $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ sei stetig. Wenn $\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,dx$ existiert, heißt f über $[a,\infty)$ *uneigentlich integrierbar*, und man setzt

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Analog wird der Fall $f\colon (-\infty,b] \to \mathbb{R}$ behandelt.

Bei Integralen, die an beiden Intervallgrenzen uneigentlich sind, muss man beide Grenzen separat betrachten; z.B. existiert das Integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ genau dann, wenn sowohl $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ als auch $\int_0^\infty f(x)\,dx$ existieren. Man darf nicht den Trugschluss machen, dass $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ existiert, sobald $\lim_{\beta\to\infty} \int_{-\beta}^\beta f(x)\,dx$ existiert; $f(x) = x$ liefert ein schlagendes Gegenbeispiel.

Es folgen die üblichen Beispiele.

Beispiele V.3.2 (a) Es sei $r > 0$ und $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^r$. Dann ist für $r \neq 1$

$$\int_\alpha^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{-r+1} x^{-r+1}\Big|_\alpha^1 = \frac{1}{-r+1}(1 - \alpha^{-r+1}).$$

Daher ist f für $0 < r < 1$ über $(0,1]$ uneigentlich integrierbar mit

$$\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r};$$

für $r > 1$ ist f nicht uneigentlich integrierbar und für $r = 1$ auch nicht (warum?).

(b) Es sei $r > 0$ und $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^r$. Dann ist für $r \neq 1$

$$\int_1^\beta \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{-r+1} x^{-r+1}\Big|_1^\beta = \frac{1}{-r+1}(\beta^{-r+1} - 1).$$

Daher ist f für $r > 1$ über $[1,\infty)$ uneigentlich integrierbar mit

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{r-1};$$

für $r < 1$ ist f nicht uneigentlich integrierbar und für $r = 1$ auch nicht (warum?).

(c) Es ist

$$\int_0^\beta e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\beta = 1 - e^{-\beta}$$

und deshalb

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

(d) Wir wollen $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ untersuchen. Leider funktioniert die Technik der übrigen Beispiele hier nicht, da man für e^{-x^2} keine explizit beschreibbare Stammfunktion ermitteln kann.[4] Stattdessen ziehen wir ein wichtiges Kriterium für die Existenz uneigentlicher Integrale heran, das als nächstes besprochen wird.

Satz V.3.3 (Majorantenkriterium)
Seien $f, g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und es gelte $|g(x)| \le f(x)$ für alle $x \in [a,\infty)$. Wenn $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existiert, existieren auch $\int_a^\infty g(x)\,dx$ und $\int_a^\infty |g(x)|\,dx$, und es gilt

$$\Big|\int_a^\infty g(x)\,dx\Big| \le \int_a^\infty |g(x)|\,dx \le \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Beweis. Aus der Voraussetzung ergibt sich $f \ge 0$. Nun setze für $\beta \in [a,\infty)$

$$F(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx, \qquad G(\beta) = \int_a^\beta g(x)\,dx.$$

Wir zeigen, dass $\lim_{\beta\to\infty} G(\beta)$ existiert und weisen dazu zuerst nach, dass für jede Folge mit $\beta_n \to \infty$ die Folge $(G(\beta_n))$ eine Cauchy-Folge ist. Das sieht man so: Für zwei Zahlen $\beta \ge \alpha$ ist

$$|G(\beta) - G(\alpha)| = \Big|\int_\alpha^\beta g(x)\,dx\Big| \le \int_\alpha^\beta |g(x)|\,dx \le \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha);$$

daher ist stets $|G(\beta_n) - G(\beta_m)| \le |F(\beta_n) - F(\beta_m)|$, woraus die behauptete Cauchy-Eigenschaft folgt. Es ist nämlich $(F(\beta_n))$ nach Voraussetzung konvergent und deshalb eine Cauchy-Folge; zu $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|F(\beta_n) - F(\beta_m)| < \varepsilon$ für $m, n \ge n_0$. Also gilt für diese m und n auch $|G(\beta_n) - G(\beta_m)| < \varepsilon$.

[4] Einen Beweis dieser Unmöglichkeit findet man im 2. Band des Analysis-Buchs von E. Behrends. Natürlich besitzt die stetige Funktion $x \mapsto e^{-x^2}$ eine Stammfunktion – sie lässt sich bloß nicht mit Hilfe der handelsüblichen Funktionen ausdrücken.

Deshalb existiert für jede Folge mit $\beta_n \to \infty$ der Grenzwert $\lim_n G(\beta_n)$. Wir müssen noch begründen, dass dieser Grenzwert nicht von der betrachteten Folge abhängt. Dazu nehmen wir zwei solche Folgen (β'_n) und (β''_n) und die zugehörigen Grenzwerte $\gamma' = \lim_n G(\beta'_n)$ und $\gamma'' = \lim_n G(\beta''_n)$. Um $\gamma' = \gamma''$ zu schließen, definieren wir die „Reißverschlussfolge“

$$(\beta_n) = (\beta'_1, \beta''_1, \beta'_2, \beta''_2, \beta'_3, \dots),$$

für die ja $\gamma = \lim_n G(\beta_n)$ ebenfalls existiert. Nun sind $(G(\beta'_n))$ und $(G(\beta''_n))$ jeweils Teilfolgen von $(G(\beta_n))$; deshalb ist $\gamma' = \gamma$ und $\gamma'' = \gamma$, also $\gamma' = \gamma''$.

Das zeigt, dass das uneigentliche Integral $\int_a^\infty g(x)\,dx$ existiert, und da man das obige Argument genauso auf $|g|$ anwenden kann, existiert auch $\int_a^\infty |g(x)|\,dx$. Schließlich ergibt sich die Abschätzung der Integrale aus

$$\Big|\int_a^\beta g(x)\,dx\Big| \le \int_a^\beta |g(x)|\,dx \le \int_a^\beta f(x)\,dx$$

durch den Grenzübergang $\beta \to \infty$. □

Offenbar reicht es für die Existenz von $\int_a^\infty g(x)\,dx$, dass die Abschätzung $|g(x)| \le f(x)$ nur für $x \ge A$ ($\ge a$) gilt; die Integralabschätzung braucht dann jedoch nicht mehr zu stimmen.

Ein analoges Majorantenkriterium gilt für die übrigen Typen uneigentlicher Integrale.

Um nun Beispiel V.3.2(d) abzuschließen, reicht es, $e^{-x^2} \le e^{-x}$ für $x \ge 1$ zu beobachten (also $A = 1$ im Zusatz) und Beispiel V.3.2(c) anzuwenden. Daher existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, aber wir können es nicht explizit berechnen. Der einfachste Weg dazu führt über die mehrdimensionale Integralrechnung der Analysis III; dort zeigt man

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Dieses Beispiel ist von fundamentaler Bedeutung in der Wahrscheinlichkeitstheorie, Stichwort Normalverteilung („Gaußsche Glockenkurve“).

Wir schlagen am Schluss noch eine Brücke von den uneigentlichen Integralen zu den unendlichen Reihen.

Satz V.3.4 (Integralvergleichskriterium)
Sei $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ *eine monoton fallende stetige Funktion. Genau dann konvergiert die unendliche Reihe* $\sum_{k=1}^\infty f(k)$, *wenn das uneigentliche Integral* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *existiert.*

Beweis. Da f monoton fällt, gilt für alle k

$$f(k) \le f(x) \le f(k-1) \qquad \text{für } k-1 \le x \le k.$$

Integriert man diese Ungleichung zwischen $k-1$ und k (mit den konstanten Funktionen $x \mapsto f(k)$ bzw. $x \mapsto f(k-1)$), erhält man

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1).$$

Summation dieser Ungleichungen führt zu

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_{1}^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \tag{V.3.1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner beobachten wir, dass wegen $f \geq 0$ die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ und die Funktion $F\colon u \mapsto \int_1^u f(x)\,dx$ monoton wachsen. Daher ist nur die Beschränktheit der Folge (s_n) bzw. der Funktion F zu diskutieren.

Existiert das uneigentliche Integral, so folgt aus (V.3.1)

$$s_n \leq f(1) + \int_{1}^{n} f(x)\,dx \leq f(1) + \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx,$$

und (s_n) ist beschränkt. Konvergiert die Summe, so folgt aus (V.3.1)

$$F(u) \leq F(m+1) \leq s_m \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k),$$

wobei m die größte natürliche Zahl bezeichnet, die $\leq u$ ist; und F ist beschränkt. $\square$

Aus diesem Satz erhalten wir erneut mittels Beispiel V.3.2, dass $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergiert. Mehr noch: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^r$ konvergiert für jedes $r > 1$, da das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} 1/x^r\,dx$ für diese r existiert.

Außerdem erhält man aus (V.3.1), dass $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ von der Größenordnung $\log n = \int_1^n 1/x\,dx$ ist. Diese Aussage kann man noch präzisieren.

Satz V.3.5 *Die Folge* $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n)_n$ *konvergiert.*

Beweis. Wir wissen bereits aus (V.3.1), dass $(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \log n)$ nach unten beschränkt ist (und zwar durch 0); also ist auch die hier betrachtete Folge wegen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \log n$$

nach unten beschränkt. Zeigen wir, dass diese Folge monoton fällt. Durch Umstellen sieht man sofort, dass die Behauptung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \geq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \log(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

äquivalent ist zu

$$\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \geq \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Durch Taylorentwicklung sieht man

$$\log(1+x) = T_2(x) + R_2(x) \geq T_2(x) = x - \frac{x^2}{2},$$

denn $R_2(x) \geq 0$, weil die 3. Ableitung der Logarithmusfunktion positiv ist, vgl. Beispiel IV.3.3(d). Daher gilt

$$\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \geq T_2\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} = \frac{2n-1}{2n^2} \geq \frac{1}{n+1},$$

denn die letzte Ungleichung ist zu $2n^2 \leq (2n-1)(n+1) = 2n^2+n-1$ äquivalent, was für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. $\square$

Die Zahl

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = 0.57721\ldots$$

heißt *Euler-Mascheronische Konstante*; es ist bis heute unbekannt, ob γ rational ist oder nicht. (Vgl. dazu J. Havil, *Gamma. Exploring Euler's Constant.* Princeton University Press 2009.)

Kapitel VI

Die komplexen Zahlen

VI.1 Der Körper $\mathbb{C}$

In der Welt der reellen Zahlen existiert keine Wurzel aus -1, da das Quadrat einer reellen Zahl nichtnegativ ist. Seit mehr als 400 Jahren operiert man jedoch erfolgreich mit einer „imaginären Zahl“ $i = \sqrt{-1}$, die das Quadrat -1 haben soll. Es ist zunächst vielleicht einen Kommentar wert, warum solche „imaginären“ Größen als nützlich erachtet wurden.

Im 16. Jahrhundert wurden von italienischen Mathematikern, namentlich von N. Tartaglia, Methoden entwickelt, um kubische Gleichungen der Form $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ zu lösen. Die Substitution $x = t - a_2/3$ eliminiert den quadratischen Term und führt zur standardisierten Form $t^3 = 3pt + 2q$ (mit gewissen reellen Koeffizienten p und q), für die Tartaglia die Lösung

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \tag{VI.1.1}$$

angab. Wendet man diese Formel im Beispiel $t^3 = 15t + 4$ an, ergibt sich $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$, also eine Größe, die in der Welt der reellen Zahlen nicht handhabbar ist. Und doch hat jede kubische Gleichung nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine reelle Lösung, in unserem Beispiel $t = 4$. Das lässt einen Kalkül wünschenswert erscheinen, in dem die Rechenregeln von $\mathbb{R}$ gelten, aber eine „imaginäre Einheit“ $i = \sqrt{-1}$ existiert, so dass man (VI.1.1) auswerten kann.

Schreibt man i für die hypothetische Wurzel aus -1, kann man Zahlen der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, bilden, und mit ihnen wie üblich zu rechnen bedeutet, dass Addition und Multiplikation den aus der Schule bekannten Rechenregeln genügen. Wir wollen nun begründen, dass das wirklich möglich ist.

Auf der Menge der Paare reeller Zahlen führen wir eine Addition und eine

Multiplikation ein, nämlich

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x',y+y')\\ (x,y)\cdot(x',y') &= (xx'-yy',xy'+x'y)\end{aligned}$$

(Wenn man sich hier (x,y) durch $x+iy$ und (x',y') durch $x'+iy'$ ersetzt vorstellt und formal ohne viel Federlesens ausmultipliziert, erhält man $(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$, was das Paar $(xx'-yy',xy'+x'y)$ symbolisiert.) Man kann nun verifizieren, dass man im $\mathbb{R}^2$ mit diesen Operationen genauso rechnen kann wie in der Schulmathematik. Für $v=(x,y)$ sei $-v=(-x,-y)$ und $v^{-1}=(x/(x^2+y^2),-y/(x^2+y^2))$, wenn $v\neq(0,0)$; siehe unten. Im Einzelnen gelten für Paare $v,w,z\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(v+w)+z &= v+(w+z)\\ v+w &= w+v\\ (0,0)+v &= v\\ v+(-v) &= (0,0)\\ (v\cdot w)\cdot z &= v\cdot(w\cdot z)\\ v\cdot w &= w\cdot v\\ (1,0)\cdot v &= v\\ v\cdot v^{-1} &= (1,0)\quad \text{für } v\neq(0,0)\\ v\cdot(w+z) &= v\cdot w+v\cdot z\end{aligned}$$

(Diese Liste wurde für reelle Zahlen am Anfang von Abschnitt I.2 aufgestellt.) In der Sprache der Algebra bildet $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ einen *Körper*[1].

Das multiplikativ Inverse zu $(x,y)\neq(0,0)$ ist $(x/(x^2+y^2),-y/(x^2+y^2))$; informelle Eselsbrücke hierfür:

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

Der Körper $\mathbb{R}^2$ enthält via ρ: $r\mapsto(r,0)$ die reellen Zahlen als Teilkörper, und für das Element $(0,1)\in\mathbb{R}^2$ gilt $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$; also kann man $(0,1)\in\mathbb{R}^2$ als Wurzel aus -1 auffassen. Setzt man $(1,0)=\underline{1}$ und $(0,1)=i$, kann man $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ als $a\underline{1}+bi$ repräsentieren. (Beachten Sie, dass wir erst an dieser Stelle i präzise definieren; vorher war i in der Eselsbrücke mehr ein Wunschtraum als ein mathematisches Objekt.) Da $\underline{1}\in\mathbb{R}^2$ der reellen Zahl 1 via ρ entspricht, schreibt man $x+iy$ statt (x,y).

Der hier beschriebene Körper wird der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* genannt. Ist $z=x+iy\in\mathbb{C}$ $(x,y\in\mathbb{R})$, nennt man $x=\operatorname{Re}z$ den *Realteil* und $y=\operatorname{Im}z$ den *Imaginärteil* von z; beachten Sie, dass der Imaginärteil von z eine

[1] Um die Wortwahl zu verstehen, denke man an Körperschaft, nicht an Körper im Sinn von Leib. Auf Englisch heißt Körper *field*.

reelle Zahl ist. Ferner nennt man $\overline{z} = x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*; es gelten

$$\operatorname{Re}(w+z) = \operatorname{Re} w + \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im}(w+z) = \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z$$

sowie

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\overline{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}), \quad \overline{w+z} = \overline{w}+\overline{z}, \quad \overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}.$$

Für $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

der *Betrag* von z. Der Betrag hat folgende Eigenschaften:

Lemma VI.1.1 *Für $w, z \in \mathbb{C}$ gelten:*

(a) $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$.
(b) $|z| = |\overline{z}|$, $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.
(c) $|zw| = |z|\,|w|$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ $(w \neq 0)$.
(d) (Dreiecksungleichung) $|z+w| \leq |z| + |w|$.
(e) (Umgekehrte Dreiecksungleichung) $|z-w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

Beweis. (a) und (b) sind klar, (c) folgt aus

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = zw\overline{z}\,\overline{w} = |z|^2|w|^2 \quad \text{sowie} \quad w \cdot \frac{z}{w} = z,$$

und (d) folgt aus

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re} z\overline{w} + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2. \end{aligned}$$

Für (e) wende man die Dreiecksungleichung auf $|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w|+|w|$ an, so dass $|z-w| \geq |z| - |w|$ folgt. Vertauschen der Rollen von z und w liefert die Behauptung. □

VI.2 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Wir werden jetzt die Begriffe Konvergenz und Stetigkeit auf komplexe Folgen und Funktionen übertragen. Das geht fast mechanisch, denn die Definitionen im Reellen basierten hauptsächlich auf Eigenschaften des Betrags, die für den komplexen Betrag genauso gelten (siehe Lemma VI.1.1).

Beginnen wir mit (vgl. Definition II.1.1):

Definition VI.2.1 Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen heißt *konvergent* mit Grenzwert z, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \qquad |z_n - z| < \varepsilon.$$

Schreibweise: $z_n \to z$.

Betrachten wir als einfaches Beispiel $z_n = n/(n + i^n)$ und zeigen wir, dass (z_n) gegen 1 konvergiert. Es ist

$$|z_n - 1| = \left| \frac{n}{n + i^n} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - i^n}{n + i^n} \right| = \left| \frac{i^n}{n + i^n} \right| = \frac{1}{|n + i^n|} =: a_n.$$

Hier ist (a_n) eine *reelle* Zahlenfolge, und wir müssen $a_n \to 0$ zeigen; das ist eine Aufgabe, die eigentlich nichts mehr mit komplexen Zahlen zu tun hat. Um sie zu lösen, muss man aber noch eine komplexe Abschätzung machen, nämlich (umgekehrte Dreiecksungleichung)

$$|n + i^n| \geq \big| n - |i^n| \big| = n - 1;$$

es folgt für $n \geq 2$

$$|z_n - 1| = a_n \leq \frac{1}{n - 1},$$

so dass in der Tat zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wie in Definition VI.2.1 gefordert angegeben werden kann.

Die folgenden Resultate können wörtlich wie im Reellen bewiesen werden.

Satz VI.2.2

(a) *Eine konvergente Folge (z_n) ist beschränkt, d.h.* $\sup_n |z_n| < \infty$.

(b) *Für $z_n \to z$ und $w_n \to w$ gelten*

$$z_n + w_n \to z + w, \quad z_n - w_n \to z - w, \quad z_n w_n \to zw, \quad \frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w};$$

letzteres unter der Voraussetzung, dass $w \neq 0$ und alle $w_n \neq 0$.

Die enge Kopplung reeller und komplexer Konvergenz dokumentiert der folgende Satz.

Satz VI.2.3 *Sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen.*

(a) *Aus $z_n \to z$ folgt $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.*

(b) *Falls $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ konvergieren, etwa $\operatorname{Re} z_n \to x$ und $\operatorname{Im} z_n \to y$, so konvergiert auch (z_n), und zwar $z_n \to x + iy$.*

Kurz: Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile konvergieren.

Beweis. (a) folgt aus

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z|$$

und analog für den Imaginärteil, und (b) aus

$$|z_n - (x+iy)| = |(\operatorname{Re} z_n - x) + i(\operatorname{Im} z_n - y)| \leq |\operatorname{Re} z_n - x| + |\operatorname{Im} z_n - y|. \quad \square$$

Als Korollar erhalten wir sofort:

Korollar VI.2.4 *Eine konvergente Folge komplexer Zahlen hat genau einen Grenzwert; d.h. $z_n \to z$ und $z_n \to z'$ implizieren $z = z'$.*

Beweis. Schreibe[2] $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$. Nach Satz VI.2.3 gilt $\operatorname{Re} z_n \to x$ und $\operatorname{Re} z_n \to x'$, also $x = x'$ und genauso $y = y'$, d.h. $z = z'$. $\square$

Alternativ kann man das Korollar auch wörtlich wie im Reellen beweisen (tun Sie's!). Jedenfalls ist eine Konsequenz des Korollars, dass man statt $z_n \to z$ auch $\lim_n z_n = z$ schreiben darf.

Ein weiteres Korollar ist der *Satz von Bolzano-Weierstraß* für komplexe Folgen.

Korollar VI.2.5 *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (z_n) eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Wegen $|\operatorname{Re} z_n| \leq |z_n|$ und $|\operatorname{Im} z_n| \leq |z_n|$ sind auch die reellen Folgen $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, Satz II.3.3, hat $(\operatorname{Re} z_n)$ eine konvergente Teilfolge, etwa $\operatorname{Re} z_{n_k} \to x$. Es gibt zwar keinen Grund, dass $(\operatorname{Im} z_{n_k})$ konvergiert, aber diese Teilfolge besitzt, wiederum nach Bolzano-Weierstraß, eine konvergente Teilteilfolge, etwa $\operatorname{Im} z_{n_{k_l}} \to y$. Für diese Teilteilfolge gilt nach wie vor $\operatorname{Re} z_{n_{k_l}} \to x$. Satz VI.2.3 liefert $z_{n_{k_l}} \to x + iy$. $\square$

Auch der Begriff der Cauchyfolge überträgt sich.

Definition VI.2.6 Eine Folge komplexer Zahlen (z_n) heißt *Cauchyfolge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq n_0 \qquad |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Wörtlich wie im Reellen (Satz II.2.7) zeigt man das *Cauchy-Kriterium.*

[2] Wann immer $z = x + iy$ etc. geschrieben wird, ist implizit $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$ gemeint!

Satz VI.2.7 *Jede Cauchyfolge komplexer Zahlen konvergiert.*

Unendliche Reihen werden im Komplexen wie im Reellen definiert.

Definition VI.2.8 Sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen, und sei (s_n) die zugehörige Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

Man sagt, dass die *unendliche Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergiert, wenn die Folge der Partialsummen (s_n) konvergiert. Man setzt dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Eine unendliche Reihe heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ konvergiert.

Wie im Reellen (Satz II.3.6) folgt aus dem Cauchy-Kriterium:

Satz VI.2.9 *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beispiel VI.2.10 (Die komplexe Exponentialreihe)
Der Schnellkurs über unendliche Reihen dient hauptsächlich dazu, für $z \in \mathbb{C}$ die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

zu diskutieren; vgl. Beispiel II.3.12. Wir beobachten, dass diese Reihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, denn

$$\Bigl|\frac{z^k}{k!}\Bigr| = \frac{|z|^k}{k!},$$

und bekanntlich konvergiert die reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k/k!$. Mit Satz VI.2.9 existiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ die komplexe Zahl

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Weiter sei mitgeteilt, dass wie in Satz II.4.3 für absolut konvergente komplexe Reihen die Multiplikationsformel

$$\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} w_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} z_k\Bigr) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \qquad \text{mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} w_r z_{k-r}$$

gilt. Wenn wir das auf die Exponentialreihe anwenden, also $w_k = w^k/k!$ und $z_k = z^k/k!$, zeigt dieselbe Rechnung wie im Reellen (vgl. Beispiel II.3.12)

$$c_k = \frac{(w+z)^k}{k!}.$$

Zur Beachtung: Dort wurde der binomische Satz verwendet. Dessen Beweis wurde in Abschnitt I.2 für reelle Zahlen formuliert, aber es wurden nur die üblichen Rechenregeln reeller Zahlen verwandt, die in $\mathbb{C}$ genauso gelten; daher darf der binomische Satz hier angewandt werden. (Für Freunde der Algebra: Der binomische Satz gilt in jedem Körper, sogar in jedem kommutativen Ring.)

Es folgt:

Satz VI.2.11 (Funktionalgleichung der exp-Funktion)
Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z).$$

Wie Sie gesehen haben, lässt sich fast die gesamte Konvergenztheorie von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ übertragen, und zwar entweder durch Betrachtung von Real- und Imaginärteil, oder weil der Betrag über $\mathbb{C}$ denselben Regeln wie über $\mathbb{R}$ genügt (am wichtigsten: die Dreiecksungleichung). Was sich nicht übertragen lässt, sind alle Aussagen, die auf die Ordnung in $\mathbb{R}$ Bezug nehmen; es gibt kein komplexes Analogon zu „Monotone beschränkte Folgen sind konvergent“, da Monotonie über $\mathbb{C}$ nicht definiert (nicht einmal definierbar) ist.

VI.3 Stetige Funktionen auf $\mathbb{C}$

Als nächstes nehmen wir uns den Stetigkeitsbegriff vor. Genauso wie im Reellen (Definition III.1.3) definieren wir:

Definition VI.3.1 Sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ (oder $f\colon D \to W \subset \mathbb{C}$) heißt *stetig bei* $z_0 \in D$, wenn

$$z_n \in D,\ z_n \to z_0 \quad\Rightarrow\quad f(z_n) \to f(z_0).$$

Sie heißt *stetig auf* D, wenn sie an jeder Stelle stetig ist.

Man beachte, dass mit $W = \mathbb{R}$ der Fall reellwertiger Funktionen eingeschlossen ist.

Die Aussagen aus Abschnitt III.1 über stetige Funktionen (Summen, Produkte, Quotienten, ε-δ-Kriterium) gelten genauso mit demselben Beweis für komplexe Funktionen. Allerdings ergibt es keinen Sinn, vom Maximum einer komplexwertigen Funktion zu sprechen; die Sätze aus Abschnitt III.2 können im neuen Kontext nicht formuliert werden.

Unser Ziel ist es, die Stetigkeit der in Beispiel VI.2.10 definierten exp-Funktion zu zeigen. Zuvor beobachten wir:

Satz VI.3.2 *Die folgenden Funktionen sind stetig:*
(a) $f_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_1(z) = \operatorname{Re} z$;
(b) $f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_2(z) = \operatorname{Im} z$;
(c) $f_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_3(z) = \overline{z}$;
(d) $f_4\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ f_4(z) = |z|$.

Beweis. (a) und (b) folgen aus Satz VI.2.3, und (c) ergibt sich aus dem Summensatz und $f_3 = f_1 - i f_2$; man kann auch direkt mit

$$|\overline{z_n} - \overline{z_0}| = |\overline{z_n - z_0}| = |z_n - z_0| \to 0 \qquad \text{für } z_n \to z_0$$

argumentieren.

(d) Aus $z_n \to z_0$ folgt wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\big||z_n| - |z_0|\big| \le |z_n - z_0| \to 0,$$

was zu zeigen war. Alternativbeweis: $f_4 = \sqrt{\ } \circ (f_1^2 + f_2^2)$. □

Satz VI.3.3 *Die Funktion*

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist stetig.

Beweis. (Vgl. Beispiel III.1.5(b).) Gelte $z_n \to z_0$. Setze $w_n = z_n - z_0$, so dass $w_n \to 0$; insbesondere existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|w_n| < 1$ für $n \ge N$. Nun ist für diese n (wir benutzen die Dreiecksungleichung für unendliche Reihen; Aufgabe!)

$$|\exp(w_n) - \exp(0)| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_n^k}{k!}\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|w_n|^k}{k!} \le |w_n| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = |w_n|(e-1) \to 0.$$

Es folgt $\exp(w_n) \to \exp(0) = 1$. Mit Hilfe der Funktionalgleichung aus Satz VI.2.11 erhält man jetzt

$$\exp(z_n) = \exp(w_n + z_0) = \exp(w_n)\exp(z_0) \to \exp(z_0),$$

und das zeigt die Stetigkeit von exp. □

Wie in der reellen Analysis schreibt man

$$e^z = \exp(z).$$

Ausblick. Man kann auch den Begriff der Differenzierbarkeit übertragen; die Ableitung einer komplexen Funktion ist dann wie üblich durch

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

definiert. Allerdings sind die Konsequenzen der komplexen Differenzierbarkeit so dramatisch von der reellen Theorie verschieden, dass diesem Thema eine eigene Vorlesung gewidmet ist („Funktionentheorie"). Zwei dieser Konsequenzen sind:

- *Ist* $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < r\}$ *ein Kreis in der komplexen Ebene, so ist jede differenzierbare Funktion* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *beliebig häufig differenzierbar.*

- (Satz von Liouville) *Ist* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *auf ganz* $\mathbb{C}$ *differenzierbar und beschränkt, so ist* f *konstant.*

Natürlich sind diese Aussagen im Reellen falsch; $f\colon \{x \in \mathbb{R}\colon |x| < 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x|$, ist genau ein Mal differenzierbar, und die Sinusfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und beschränkt, aber nicht konstant.

VI.4 Nochmals Sinus und Kosinus

Im Abschnitt III.4 haben wir uns mit der Sinus- und der Kosinusfunktion beschäftigt. Wir hatten drei Grundannahmen postuliert (siehe unten), die wir der elementargeometrischen Anschauung entnommen hatten, und daraus sämtliche Eigenschaften von sin und cos abgeleitet, insbesondere hatten wir die Reihenentwicklungen

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \tag{VI.4.1}$$

bestimmt (siehe Satz IV.3.6). Die Schwäche dieses Ansatzes ist es, dass wir a priori nicht sicher sind, ob es überhaupt Funktionen gibt, die den Grundannahmen genügen; wir wissen allerdings, dass es nur die Funktionen aus (VI.4.1) sein können. Es soll nun gezeigt werden, dass diese Funktionen wirklich das Gewünschte leisten.

Einem bekannten Bonmot zufolge ist häufig der schnellste Weg, Aussagen über reelle Funktionen zu beweisen, der Umweg über das Komplexe[3]; das ist hier auch so. Wir *definieren* jetzt für $x \in \mathbb{R}$

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k};$$

die Bezeichnung S bzw. C soll natürlich an sin bzw. cos erinnern, aber auch betonen, dass unser Standpunkt ist, an dieser Stelle sin und cos noch nicht zu kennen. Dass diese Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, kann man sofort mit dem Quotientenkriterium zeigen.

Unser Ziel ist, Folgendes zu beweisen.

[3]Ein Buch, das dieser Maxime gewidmet ist, ist *P.D. Lax, L. Zalcman*, Complex Proofs of Real Theorems. Amer. Math. Soc. 2012.

(a) $C(0) = 1$, *und es gibt eine kleinste positive Zahl* $\wp$ *mit* $C(\wp) = 0$. *Die Zahl* π *wird als das Doppelte dieser Zahl* $\wp$ *definiert, also* $C(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(b) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\begin{aligned} S(x \pm y) &= S(x)C(y) \pm C(x)S(y), \\ C(x \pm y) &= C(x)C(y) \mp S(x)S(y). \end{aligned}$$

(c) *Für* $0 < x < \pi/2$ *gelten die Ungleichungen*

$$0 < S(x) < x < \frac{S(x)}{C(x)}. \tag{VI.4.2}$$

Das wird durch den Umweg über das Komplexe gelingen. Die Kernbeobachtung ist:

Lemma VI.4.1 *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$S(x) = \operatorname{Im} e^{ix}, \qquad C(x) = \operatorname{Re} e^{ix}.$$

Beweis. Für jede komplexe Zahl z ist

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \qquad \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}.$$

Ferner ist für $x \in \mathbb{R}$

$$\overline{e^{ix}} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{(ix)^k}}{k!},$$

da nach Satz VI.3.2(c) die Funktion $z \mapsto \overline{z}$ stetig (und additiv) ist, und weiter

$$\overline{(ix)^k} = (\overline{ix})^k = (-ix)^k.$$

Es folgt

$$\overline{e^{ix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ix)^k}{k!} = e^{-ix}$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} e^{ix} &= \frac{e^{ix} - \overline{e^{ix}}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k - (-i)^k}{k!} x^k = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} \\ &= S(x), \end{aligned}$$

da $i^k - (-i)^k = 0$ für gerades k und $i^k - (-i)^k = (-1)^l \cdot 2i$ für ungerades $k = 2l + 1$.

Das Argument für $C(x)$ ist analog. □

Wir entnehmen der obigen Rechnung noch

$$S(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad C(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{VI.4.3}$$

Da die exp-Funktion stetig ist, erhalten wir aus Lemma VI.4.1 sofort die Stetigkeit von S und C. Ferner folgt:

Lemma VI.4.2
(a) *Es gilt* $S(x)^2 + C(x)^2 = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Insbesondere ist stets* $-1 \leq S(x) \leq 1$ *und* $-1 \leq C(x) \leq 1$.
(b) $C(2) < 0$.

Beweis. (a) Es ist

$$S(x)^2 + C(x)^2 = |e^{ix}|^2 = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1.$$

(b) Es ist

$$C(2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}.$$

Das ist eine alternierende Reihe; da sie konvergiert, bilden die Glieder eine Nullfolge. Wir werden begründen, dass die Glieder ab $k = 1$ betragsmäßig monoton fallen:

$$\frac{2^{2k+2}/(2k+2)!}{2^{2k}/(2k)!} = \frac{4}{(2k+1)(2k+2)} < 1 \quad \text{für } k \geq 1.$$

Damit ist

$$1 - C(2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}}{(2k)!}$$

eine alternierende Reihe wie im Leibniz-Kriterium (Satz II.3.13), und die Einschließung (II.3.4) zeigt mit $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \geq \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}}{(2k)!} = \frac{4}{2} - \frac{16}{24} = \frac{4}{3},$$

daher $C(2) \leq -\frac{1}{3} < 0$. □

Jetzt können wir Grundeigenschaft (a) begründen. $C(0) = 1$ ergibt sich sofort durch Einsetzen. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt die stetige Funktion C eine Nullstelle im Intervall $(0, 2)$, da ja $C(2) < 0$. Sei nun M die nichtleere Menge $M = \{x \in [0, 2]\colon C(x) = 0\}$ und $\wp = \inf M$. Dann ist $\wp$ eine Nullstelle von C (und offensichtlich die kleinste positive): Seien nämlich $x_n \in M$, $x_n \to \wp$;

da $C(x_n) = 0$ und C stetig ist, ist auch $C(\wp) = 0$ (insbesondere ist $\wp > 0$). [Tatsächlich besteht M nur aus einer einzigen Zahl, aber das ist an dieser Stelle noch nicht begründet.] $(\Box)$

Der Beweis der Grundeigenschaft (b) fällt uns dank der Funktionalgleichung der komplexen exp-Funktion fast in den Schoß. Einerseits gilt nach Lemma VI.4.1

$$e^{i(x+y)} = C(x+y) + iS(x+y)$$

und andererseits

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} &= (C(x) + iS(x))(C(y) + iS(y)) \\ &= [C(x)C(y) - S(x)S(y)] + i[S(x)C(y) + C(x)S(y)]; \end{aligned}$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile zeigt das Additionstheorem für die Summe. Für die Differenz muss man als Konsequenz der Definitionen noch $C(-x) = C(x)$ und $S(-x) = -S(x)$ heranziehen. $(\Box)$

Nun zum Beweis der Grundeigenschaft (c). Es sind drei Ungleichungen für $0 < x < \pi/2$ zu zeigen; zuerst zu $S(x) > 0$. Wir zeigen, dass die S definierende Reihe dem Einschließungssatz aus dem Leibniz-Kriterium, (II.3.4) auf Seite 39, genügt. Dazu ist für $0 < x < \pi/2$

$$\frac{x^{2k+3}/(2k+3)!}{x^{2k+1}/(2k+1)!} < 1 \tag{VI.4.4}$$

zu zeigen. Dieser Quotient ist

$$Q := \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)}$$

und daher $Q \leq \frac{4}{6} < 1$ für $k \geq 0$ und $0 < x \leq 2$, erst recht für $0 < x < \pi/2$ (denn wir wissen ja bereits $\pi/2 < 2$). Deshalb ist nach (II.3.4)

$$S(x) \geq x - \frac{x^3}{6} = \frac{x}{6}(6 - x^2) > 0$$

für $0 < x < \sqrt{6}$; beachte nochmals $\pi/2 < 2 < \sqrt{6}$.

Die nächste Ungleichung, $S(x) < x$, folgt sofort aus (II.3.4); das „$<$"-Zeichen ergibt sich, weil die Folge $(x^{2k+1}/(2k+1)!)$ nach (VI.4.4) streng monoton fällt.

Für die dritte Abschätzung beobachten wir, dass $C(x) > 0$ für $0 < x < \pi/2$, denn $\pi/2$ ist die kleinste positive Nullstelle von C. Für diese x ist also zu zeigen

$$xC(x) < S(x),$$

und wir zeigen diese Ungleichung für $0 < x < 2$. Einsetzen der Reihen liefert

$$\begin{aligned} S(x) - xC(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Big(\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!} \Big) x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{-2k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Die Koeffizientenfolge ist eine Nullfolge, da die Reihe konvergiert, und sie ist im Bereich $0 < x < 2$ monoton fallend, da

$$\frac{(2k+2)x^{2k+3}/(2k+3)!}{2kx^{2k+1}/(2k+1)!} = \frac{2k+2}{2k(2k+2)(2k+3)} x^2 = \frac{x^2}{2k(2k+3)} \le \frac{4}{10}$$

für $k \ge 1$ und $0 < x < 2$. Also gilt für diese x die Einschließung

$$S(x) - xC(x) \ge \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \frac{2k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{2}{6}x^3 - \frac{4}{120}x^5 = \frac{x^3}{30}(10 - x^2) > 0,$$

was zu zeigen war. ($\square$)

Wir haben gezeigt, dass die Funktionen S und C die Grundeigenschaften von sin und cos erfüllen, daher können wir schreiben

$$\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}, \qquad \cos x = \operatorname{Re} e^{ix},$$

was zur *Eulerschen Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

führt. Setzt man speziell $x = \pi$ ein, erhält man $e^{\pi i} = -1$ bzw.

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

eine Formel, die 5 fundamentale mathematische Größen in Beziehung setzt.

Vor der Universität in Granada

VI.5 Die Polardarstellung

Wir kennen komplexe Zahlen gemäß ihrer kartesischen Zerlegung in Real- und Imaginärteil: $z = x + iy$. Diese Darstellung ist maßgeschneidert, um Additionen durchzuführen, aber nicht ganz so gut für Multiplikationen und Divisionen geeignet; man denke an die Aufgabe, $z^{-3} = (x + iy)^{-3}$ als $a + ib$ darzustellen. Daher wollen wir jetzt eine weitere Darstellung komplexer Zahlen kennenlernen.

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$; dann hat $e^{i\varphi}$ den Betrag 1 (Lemma VI.4.2). Nun sei umgekehrt $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gegeben. Dann ist $x \in [-1, 1]$, und es existiert ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in [0, \pi]$ mit $x = \cos\varphi$, nämlich $\varphi = \arccos x$; zur Erinnerung: cos bildet $[0, \pi]$ streng monoton fallend auf $[-1, 1]$ ab. Es ist $1 = |z|^2 = x^2 + y^2$; also im Fall $y \geq 0$

$$y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sin\varphi,$$

denn $\sin\varphi \geq 0$ für $0 \leq \varphi \leq \pi$. Im Fall $y < 0$ ist

$$y = -\sqrt{1 - x^2} = -\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = -\sin\varphi,$$

und ersetzt man φ durch $\varphi' = -\varphi$, erhält man

$$x = \cos\varphi', \quad y = \sin\varphi';$$

beachte $-\pi < \varphi' < 0$, denn $x \neq \pm 1$ für $y < 0$. Außerdem ist φ' in diesem Intervall eindeutig bestimmt, denn sonst wäre $\varphi = -\varphi'$ nicht der einzige Winkel in $[0, \pi]$ mit $x = \cos\varphi$.

Damit haben wir gezeigt:

Satz VI.5.1 *Zu $|z| = 1$ existiert ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit*

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Außerhalb des Intervalls $(-\pi, \pi]$ gibt es natürlich noch weitere Winkel ψ mit $e^{i\psi} = z$; wegen der Periodizität von sin und cos sind solche ψ genau die von der Form $\psi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Der in Satz VI.5.1 bestimmte Winkel heißt das *Argument*[4] von z, in Zeichen $\varphi = \arg(z)$.

Nun sei $0 \neq z \in \mathbb{C}$ beliebig. Setze $r = |z| > 0$ und $w = z/r$. Dann hat w den Betrag 1 und daher die Form $e^{i\varphi}$. Das liefert:

Satz VI.5.2 (Polardarstellung)
Jedes $z \in \mathbb{C}$ kann in der Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Hier ist r eindeutig bestimmt, und im Fall $z \neq 0$ ist auch φ im Intervall $(-\pi, \pi]$ eindeutig bestimmt.

[4] Manchmal auch *Hauptwert des Arguments* genannt.

Beweis. $z = 0$ hat die Darstellung $0 \cdot e^{i\varphi}$ mit beliebigem φ. Ferner ist wegen $|re^{i\varphi}| = r|e^{i\varphi}| = r$ die Polardarstellung einer komplexen Zahl nur mit $r = |z|$ möglich. Die übrigen Aussagen wurden bereits gezeigt. □

In der Polardarstellung ist die eingangs gestellte Aufgabe, z^{-3} zu bestimmen, einfach, nämlich

$$z^{-3} = (re^{i\varphi})^{-3} = r^{-3}e^{-3i\varphi}.$$

Hingegen sind Additionen hier komplizierter als in der kartesischen Darstellung.

Version vom 19. März 2021

Kapitel VII

Funktionenfolgen und -reihen

VII.1 Gleichmäßige Konvergenz

Wir haben bereits Situationen kennengelernt, wo eine Funktion als Grenzwert von einfacheren Funktionen auftritt. Das Paradebeispiel ist die Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

die als Grenzwert von Polynomen dargestellt ist. Auch die Taylorentwicklungen aus Satz IV.3.6 können so interpretiert werden. Das dem zugrundeliegende Konvergenzkonzept isz das der *punktweisen Konvergenz*, das wir jetzt formal definieren.

Definition VII.1.1 Seien f und $f_1, f_2, \dots$ reellwertige Funktionen auf einer Menge X; $f, f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Man sagt, dass (f_n) *punktweise* gegen f konvergiert, und schreibt $f_n \to f$ punktweise, wenn

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Beispiele VII.1.2 (a) Für $s_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$, gilt definitionsgemäß $s_n \to \exp$ punktweise.

(b) Seien $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Dann ist stets $f_n(1) = 1$ und $f_n(x) \to 0$ für $0 \le x < 1$. Also konvergiert (f_n) punktweise gegen die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Man beachte, dass alle f_n stetig sind, f aber nicht.

(c) Seien $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) \to \sqrt{x^2} = |x|,$$

da die Wurzelfunktion stetig ist. Also konvergiert (f_n) punktweise gegen die Betragsfunktion. Man beachte, dass alle f_n differenzierbar sind, die Grenzfunktion aber nicht.

(d) Seien $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n(1-x)x^n$. Da stets $f_n(1) = 0$ und $f_n(x) \to 0$ für $0 \le x < 1$, konvergiert (f_n) punktweise gegen die Nullfunktion[1].

(e) Wegen der letzten Fußnote konvergiert auch die Folge der $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = n^2(1-x)x^n$, punktweise gegen die Nullfunktion. Man beachte, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_n(x)\,dx &= n^2 \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx \\ &= n^2\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \\ &\to 1 \neq \int_0^1 0\,dx.\end{aligned}$$

(f) Mit Hilfe der punktweisen Konvergenz kommt man sehr schnell von sehr regulären zu sehr irregulären Funktionen. Als Beispiel betrachten wir die „Doppelfolge“

$$f_{mn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{mn}(x) = \cos^{2m}(n!\pi x).$$

Vorbereitend bemerken wir, dass $\cos^2 t = 1$ genau dann eintritt, wenn $\sin^2 t = 0$ ist, und das passiert genau dann, wenn t ein ganzzahliges Vielfaches von π ist (Korollar III.4.5). Ist also $x \notin \mathbb{Q}$, so ist $n!\pi x$ kein ganzzahliges Vielfaches von π und deshalb $0 \le \cos^2(n!\pi x) < 1$. Für diese x folgt

$$\lim_{m\to\infty} \cos^{2m}(n!\pi x) = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos^{2m}(n!\pi x) = 0.$$

Ist hingegen $x = p/q$ rational ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$), so ist $n!x$ für $n \ge q$ ganzzahlig. Also folgt für $n \ge q$ und $m \in \mathbb{N}$

$$\cos^{2m}(n!\pi x) = 1.$$

Da der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \cos^{2m}(n!\pi x)$ auch für $n < q$ existiert, erhalten wir für rationale x

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos^{2m}(n!\pi x) = 1.$$

Zusammengefasst gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_{mn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases};$$

[1] Dass $nx^n \to 0$ für $|x| < 1$ gilt, haben wir zuerst in Beispiel II.1.2(d) gesehen; es folgt auch aus Satz III.3.7. Allgemeiner zeigt dieser Satz $n^p x^n \to 0$ für $p > 0$ und $|x| < 1$; das kann man auch daraus folgern, dass $\sum_{k=1}^{\infty} k^p x^k$ wegen des Quotientenkriteriums für $|x| < 1$ konvergiert.

das ist die Dirichletsche Sprungfunktion aus Beispiel III.1.5(c). Hier darf die Reihenfolge bei der Grenzwertbildung nicht vertauscht werden, da für irrationale x der innere Grenzwert in $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_{mn}(x)$ nicht existiert (das ist aber nicht offensichtlich).

Diese Beispiele illustrieren insbesondere, dass die Vertauschung von Grenzprozessen problematisch ist: In (b) ist

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} f_n(x) \neq \lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} f_n(x);$$

in (d) ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \bigl(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\bigr)\,dx;$$

in (f) wurde schon beobachtet, dass man die Reihenfolge von $\lim_n$ und $\lim_m$ nicht vertauschen darf; und (c) schlägt in dieselbe Kerbe.

Positive Resultate können häufig erzielt werden, wenn man einen stärkeren Konvergenzbegriff als in Definition VII.1.1 zur Verfügung hat; diesen führen wir in der nächsten Definition ein. Zur Einordnung wollen wir die punktweise Konvergenz $f_n \to f$ in Quantorenschreibweise wiedergeben:

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Das n_0 darf hier von ε und der betrachteten Stelle x abhängen. Wenn n_0 unabhängig von x gewählt werden kann, spricht man von *gleichmäßiger Konvergenz*. Die formale Definition lautet:

Definition VII.1.3 Seien f und $f_1, f_2, \dots$ reellwertige Funktionen auf einer Menge X; $f, f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Man sagt, dass (f_n) *gleichmäßig* gegen f konvergiert, und schreibt $f_n \to f$ gleichmäßig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{VII.1.1}$$

Wie bei Zahlenfolgen auch, kann man die Ungleichung in (VII.1.1) durch $[\dots] \leq \varepsilon$ oder $[\dots] < r\varepsilon$ für eine von x und n unabängige Konstante r ersetzen (Beweis?). Daher ist (VII.1.1) äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \qquad \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{oder } \leq \varepsilon). \tag{VII.1.2}$$

Betrachten wir die obigen Beispiele.

Beispiele VII.1.4 (a) Auf $\mathbb{R}$ konvergiert (s_n) nicht gleichmäßig gegen exp: Sonst würde zu $\varepsilon = 1$ ein n_0 gemäß (VII.1.1) existieren. Da für alle n und alle $x \geq 0$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \exp(x) - s_n(x)$$

gilt, würde insbesondere für alle $x \geq 0$

$$\frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < 1$$

folgen; das stimmt aber nicht für $x = n_0 + 1$.

Hingegen liegt auf beschränkten Mengen gleichmäßige Konvergenz vor: Sei $X \subset \mathbb{R}$ beschränkt, etwa $X \subset [-r, r]$. Dann gilt für alle $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$

$$|s_n(x) - \exp(x)| = \Bigl| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Bigr| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!}.$$

Der letzte Term strebt gegen 0 mit $n \to \infty$, da die Exponentialreihe bei r konvergiert; zu $\varepsilon > 0$ existiert also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq n_0.$$

Also gilt für alle $x \in X$

$$|s_n(x) - \exp(x)| < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq n_0,$$

was zu zeigen war. Beachten Sie, dass n_0 nur von ε, nicht aber von $x \in X$ abhängt!

(b) Wieder liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Sonst könnte man zu $\varepsilon = 1/2$ ein n_0 mit

$$x^n \leq \frac{1}{2} \qquad \text{für } 0 < x < 1,\ n \geq n_0$$

finden; insbesondere wäre das für $n = n_0$ richtig. Es wäre dann

$$n_0 \log x < -\log 2 \qquad \text{für } 0 < x < 1,$$

was $\lim_{x \to 1} \log x = 0$ widerspricht. Hingegen konvergiert (f_n) auf $[0, b]$ gleichmäßig, wenn $0 \leq b < 1$ ist: Dann hat man für $x \in [0, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq b^n \to 0;$$

zu $\varepsilon > 0$ existiert also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Also gilt für alle $x \in [0, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq n_0,$$

was zu zeigen war. Beachten Sie, dass n_0 nur von ε, aber nicht von $x \in [0, b]$ abhängt!

(c) Hier konvergiert (f_n) gleichmäßig, denn $\bigl|f_n(x) - |x|\bigr| < \varepsilon$ ist zu $x^2 + 1/n < x^2 + 2\varepsilon|x| + \varepsilon^2$ äquivalent, und diese Ungleichung gilt garantiert, wenn $1/n < \varepsilon^2$ ist. Wählt man $n_0 > 1/\varepsilon^2$, was unabhängig von x ist, ist (VII.1.2) erfüllt.

(d) In diesem Beispiel konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig. Bestimmen wir nämlich $\sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$; da $f_n'(x) = n(nx^{n-1} - (n+1)x^n)$, liegt die einzige lokale Maximalstelle bei $x_n = n/(n+1)$. Daher ist

$$\sup_x f_n(x) = f_n(x_n) = nx_n^n(1-x_n) = \frac{n}{n+1}\Bigl(1-\frac{1}{n+1}\Bigr)^n = \Bigl(1-\frac{1}{n+1}\Bigr)^{n+1} \to \frac{1}{e},$$

so dass (VII.1.2) nicht erfüllt ist. Hier haben wir

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl(1-\frac{1}{n}\Bigr)^n = \frac{1}{e}$$

verwandt, was man am einfachsten so sieht. Logarithmieren zeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

zu bestimmen ist; letzterer Grenzwert ist aber nach Definition der Ableitung genau $-\log'(1) = -1$ ($\log' =$ Ableitung von log).

(e) Da $g_n = nf_n$ ist, konvergiert (g_n) auch nicht gleichmäßig.

Wir untersuchen jetzt den Einfluss der gleichmäßigen Konvergenz bei der Vertauschung von Grenzprozessen. Zuerst zur Stetigkeit der Grenzfunktion.

Satz VII.1.5 *Seien $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall I. Die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f. Dann ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $x_0 \in I$; wir verifizieren das ε-δ-Kriterium an der Stelle x_0 für die Funktion f. Sei $\varepsilon > 0$. Da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } n \geq n_0,\ x \in I.$$

Da f_{n_0} bei x_0 stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Daher gilt für diese x

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|\\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon;\end{aligned}$$

der erste und der letzte Term können wegen der gleichmäßigen Konvergenz abgeschätzt werden und der mittlere nach Wahl von δ. Das war zu zeigen. □

Der Beweis von Satz VII.1.5 ist ein Beispiel eines „$\varepsilon/3$“-Arguments; um zum Schluss bei ε (und nicht 3ε) anzukommen, haben wir die Zwischenschritte auf $\varepsilon/3$ statt ε angewendet.

Nun zur Konvergenz der bestimmten Integrale.

Satz VII.1.6 *Seien $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f. Dann gilt*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Nach Satz VII.1.5 ist die Grenzfunktion f stetig und deshalb das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ wohldefiniert (Satz V.1.5). Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{für } n \geq n_0,\ x \in [a,b].$$

Es folgt für diese n

$$\Big|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon;$$

das war zu zeigen. Beachten Sie, dass für diesen Schluss die *gleichmäßige* Konvergenz wesentlich war! □

Für uneigentliche Integrale reicht die gleichmäßige Konvergenz nicht: Für

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+(\frac{x}{n})^2}$$

konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen 0, aber stets ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi.$$

Bei der Differenzierbarkeit scheint die gleichmäßige Konvergenz auf den ersten Blick nicht zu helfen, siehe Beispiele VII.1.2(c) / VII.1.4(c). Aber es gilt folgender Satz, in dem die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen eine entscheidende Rolle spielt.

Satz VII.1.7 *Es seien $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen auf einem Intervall I. Die Folge (f_n) sei punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergent, und die Folge der Ableitungen (f_n') sei gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion g konvergent. Dann ist f differenzierbar mit Ableitung $f' = g$.*

Beweis. Weil es den Beweis massiv vereinfacht, werden wir die *Zusatzannahme* treffen, dass alle f_n' stetig sind. Sei $a \in I$ fest. Dann ist nach dem Hauptsatz (in der Version von Satz V.2.5) für alle $x \in I$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Machen wir den Grenzübergang $n \to \infty$, so liefert Satz VII.1.6

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Wiederum nach dem Hauptsatz (diesmal in der Version von Satz V.2.2) folgt die Differenzierbarkeit von f mit $f' = g$. $\square$

Der letzte Satz dieses Abschnitts handelt von einem hinreichenden Kriterium für gleichmäßige Konvergenz; er gehört nicht zum Standardrepertoire der Analysis II.

Satz VII.1.8 (Satz von Dini)
Es seien $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergieren. Es gelte

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f(x) \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Dann ist die Konvergenz gleichmäßig.

Beweis. Indem man von (f_n) zu $(f_n - f)$ übergeht, darf man $f = 0$ annehmen. Nehmen wir an, die Konvergenz $f_n \to 0$ wäre nicht gleichmäßig. Dann existieren ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge (n_k) mit $\sup_x f_{n_k}(x) \geq \varepsilon_0$. Da jedes f_{n_k} sein Supremum auf $[a,b]$ annimmt, existieren $x_{n_k} \in [a,b]$ mit $\sup_x f_{n_k}(x) = f_{n_k}(x_{n_k})$. Als beschränkte Folge hat (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge, $x_{n_{k_l}} \to \xi$. Um den Überblick zu behalten schreiben wir $g_l = f_{n_{k_l}}$ und $y_l = x_{n_{k_l}}$; dann konvergiert (g_l) monoton gegen 0, $g_l(y_l) = \sup_x g_l(x) \geq \varepsilon_0$ und $y_l \to \xi$. Wegen $g_l(\xi) \to 0$ existiert ein l_0 mit $g_{l_0}(\xi) < \varepsilon_0$; desweiteren gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$x \in [a,b],\ |x - \xi| < \delta \quad \Rightarrow \quad g_{l_0}(x) < \varepsilon_0,$$

denn g_{l_0} ist stetig. Wegen der Monotonie der Folge (g_l) ist dann

$$0 \leq g_l(x) < \varepsilon_0 \qquad \text{für alle } l \geq l_0,\ |x - \xi| < \delta.$$

Da $y_l \to \xi$, gibt es ein $l_1 \geq l_0$ mit $|y_{l_1} - \xi| < \delta$; also

$$g_{l_1}(y_{l_1}) < \varepsilon_0$$

im Widerspruch zur Wahl von y_{l_1}, die $g_{l_1}(y_{l_1}) \geq \varepsilon_0$ garantiert. $\square$

Es ist zu beachten, dass die Stetigkeit der Grenzfunktion hier eine *Voraussetzung* ist; ohne sie stimmt der Satz nicht (siehe Beispiel VII.1.2(b) / VII.1.4(b)).

Ausblick. Dass mit den in diesem Abschnitt vorgestellten Sätzen das Wissen um punktweise und gleichmäßige Konvergenz längst nicht erschöpft ist, sollen die folgenden Sätze dokumentieren.

- (Weierstraßscher Approximationssatz) *Zu jeder stetigen Funktion* f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ *existiert eine Folge von Polynomfunktionen, die auf* $[a, b]$ *gleichmäßig gegen* f *konvergiert.*
- (Satz von Baire) *Sind* $f_1, f_2, \ldots$ *stetige Funktionen auf einem Intervall* I *und konvergiert* (f_n) *punktweise gegen die Funktion* f*, so besitzt* f *in jedem nichtleeren offenen Teilintervall von* I *unendlich viele Stetigkeitsstellen.*
- (Satz von Arzelà-Osgood) *Sind* $f, f_1, f_2, \ldots$ *Riemann-integrierbare (zum Beispiel stetige) Funktionen auf* $[a, b]$ *mit* $f_n \to f$ *punktweise und ist* $\sup_n \sup_x |f_n(x)| < \infty$*, so gilt*
$$\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Der Satz von Arzelà-Osgood ist in der Riemannschen Integrationstheorie nur sehr schwerfällig zu beweisen, selbst wenn die Funktionen stetig sind. In der Lebesgueschen Integrationstheorie, die Gegenstand der Analysis III ist, fällt er als Spezialfall des *Lebesgueschen Konvergenzsatzes* ab. Auch der Weierstraßsche Approximationssatz wird üblicherweise in der Analysis III bewiesen, während der Satz von Baire häufig in der Funktionalanalysis drankommt.

VII.2 Potenzreihen

Alles, was im letzten Abschnitt über Funktionenfolgen gezeigt wurde, lässt sich auf Reihen von Funktionen übertragen, da definitionsgemäß die Konvergenz einer Reihe die Konvergenz der Folge der Partialsummen bedeutet. Halten wir folgende Definition explizit fest.

Definition VII.2.1 Eine Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k$ von Funktionen konvergiert *punktweise* bzw. *gleichmäßig*, wenn die Folge der Partialsummen punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert. Sie konvergiert *absolut und gleichmäßig*, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^\infty |f_k|$ gleichmäßig konvergiert.

Eine Reihe, die absolut und gleichmäßig konvergiert, konvergiert natürlich erst recht gleichmäßig (Beweis?).

Die Reihenversion des Satzes VII.1.5 lautet dann:

- *Sind* $f_1, f_2, \ldots$ *stetige Funktionen auf einem Intervall und konvergiert dort* $\sum_{k=1}^\infty f_k$ *gleichmäßig, so ist auch die Summenfunktion* $f := \sum_{k=1}^\infty f_k$ *stetig.*

(In der Tat sind die Partialsummen $\sum_{k=1}^n f_k$ stetige Funktionen, die gleichmäßig gegen f konvergieren.)

Bei Reihen hat man speziell folgendes Kriterium für gleichmäßige Konvergenz.

Satz VII.2.2 *Seien $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ Funktionen auf einer Menge X. Seien $M_n \geq 0$ mit*

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \textit{für alle } x \in X \qquad \textit{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ absolut und gleichmäßig.

Beweis. Dass die Reihe punktweise absolut konvergiert, ergibt sich sofort aus dem Majorantenkriterium; also ist $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$, wohldefiniert. Zur Begründung der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle n_0 mit $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in X$ und $n \geq n_0$

$$\Bigl|\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| - \tilde{f}(x)\Bigr| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} M_k < \varepsilon;$$

man beachte, dass n_0 von x unabhängig ist. Das war zu zeigen. □

Im Rest dieses Abschnitts beschäftigen wir uns mit Reihen einer sehr speziellen Bauart. Eine (formale[2]) Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

heißt *Potenzreihe* mit Entwicklungspunkt c. O.B.d.A. ist im Folgenden stets $c = 0$.

Beispiele für Potenzreihen, die in dieser Vorlesung bereits vorgekommen sind, sind die Exponentialreihe, die geometrische Reihe und die Taylorreihen aus Satz IV.3.6.

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert garantiert bei $x = 0$; wie das Beispiel $a_k = k!$ zeigt, braucht eine solche Reihe an keiner anderen Stelle zu konvergieren. Im anderen Extrem, z.B. bei $a_k = 1/k!$, konvergiert die Reihe überall. Das Konvergenzverhalten im Allgemeinen beschreibt der folgende Satz.

Satz VII.2.3 *Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiere an einer Stelle $x_0 \neq 0$. Dann konvergiert die Reihe an jeder Stelle x mit $|x| < |x_0|$ absolut, und für jedes $0 \leq r < |x_0|$ konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig auf $[-r, r]$.*

Beweis. Da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ konvergiert (beachten Sie, dass an der Stelle x_0 nicht die absolute Konvergenz vorausgesetzt ist), gilt $a_k x_0^k \to 0$, insbesondere ist $(a_k x_0^k)$ beschränkt, sagen wir $|a_k x_0^k| \leq C$ für alle k. Wir zeigen zuerst die Behauptung über die gleichmäßige Konvergenz. Sei $0 \leq r < |x_0|$ und $q = r/|x_0| < 1$. Dann ist

$$|a_k r^k| \leq C \cdot q^k \qquad \text{für alle } k,$$

[2] „Formal“ bedeutet, dass noch nichts über die Konvergenz der Reihe gesagt ist; die Reihe hinzuschreiben beinhaltet umgekehrt den Auftrag, ihre Konvergenz zu untersuchen.

also ist die geometrische Reihe eine konvergente Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $|x| \le r$. Damit erhalten wir die gleichmäßige Konvergenz auf dem Intervall $[-r, r]$, da Satz VII.2.2 anwendbar ist, mit $X = [-r, r]$, $f_n(x) = a_n x^n$, $M_n = Cq^n$.

Wenn man nur die absolute Konvergenz bei $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ zeigen will, wende man das obige Argument mit $r = |x|$ an. □

Korollar VII.2.4 *Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergiere an einer Stelle x_0. Dann divergiert die Reihe an jeder Stelle x mit $|x| > |x_0|$.*

Einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ können wir also die Größe

$$R = \sup\Bigl\{|x|\colon \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergiert}\Bigr\} = \inf\Bigl\{|x|\colon \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ divergiert}\Bigr\} \in [0, \infty]$$

zuordnen; dies ist der *Konvergenzradius* der Reihe (zur Nomenklatur siehe unten). Hier bedeutet $R = 0$, dass die Reihe nur für $x = 0$ konvergiert, und $R = \infty$, dass sie überall konvergiert. Das allgemeine Konvergenzverhalten ergibt sich aus Satz VII.2.3:

Satz VII.2.5 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann konvergiert die Reihe absolut für jedes x mit $|x| < R$, und sie divergiert für jedes x mit $|x| > R$. Für jedes $0 \le r < R$ konvergiert die Reihe auf $[-r, r]$ gleichmäßig.*

Hier ein Beispiel: Sei $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ sowie $H_0 = 0$, und betrachte die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} H_k x^k$. Da (H_k) keine Nullfolge ist, divergiert die Reihe für $|x| \ge 1$. Andererseits sieht man mit dem (vereinfachten) Quotientenkriterium sofort, dass sie für $|x| < 1$ konvergiert. Also ist hier $R = 1$.

Es folgen ein paar Bemerkungen zu diesem Satz.

(1) Es gibt eine geschlossene Formel für den Konvergenzradius, nämlich (*Hadamardsche Formel*)

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}};$$

in diesem Kontext ist $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ zu verstehen. Zur Erinnerung: In Satz II.6.4 wurde der limes superior einer Folge (b_n) als

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\ge n} b_k \in [-\infty, \infty]$$

eingeführt; wer sich mit diesem Begriff vertraut gemacht hat, kann die Hadamardsche Formel leicht mit dem Wurzelkriterium beweisen. In Beispielen ist es fast immer einfacher, den Konvergenzradius mit Hilfe von Quotienten-, Wurzel-und Majorantenkriterium zu bestimmen, als diese Formel anzuwenden (siehe das obige Beispiel).

(2) Die Reihe braucht auf $(-R,R)$ nicht gleichmäßig zu konvergieren; Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

(3) Für das Verhalten bei $|x| = R$ kann man keine allgemeingültigen Aussagen treffen; vergleiche $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$ (es ist jeweils $R = 1$).

(4) Man kann Potenzreihen auch für komplexe a_k und komplexe z statt reelle x betrachten; Satz VII.2.5 gilt dann entsprechend. Jetzt sieht man den Kreis, der zur Namensgebung „Radius“ geführt hat, nämlich $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ ist der Konvergenzkreis der Reihe. In der Tat spielen Potenzreihen über $\mathbb{C}$ eine viel größere Rolle als über $\mathbb{R}$; wir bleiben jedoch im Weiteren bei $x \in \mathbb{R}$.

Wir kombinieren jetzt die Sätze VII.1.5 und VII.2.5.

Satz VII.2.6 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion $f\colon (-R,R) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, stetig.*

Beweis. Da die Reihe nicht unbedingt auf $(-R,R)$ gleichmäßig konvergiert, ist etwas Vorsicht beim Beweis geboten. Sei $x_0 \in (-R,R)$; wir müssen zeigen, dass f bei x_0 stetig ist. Hierzu wählen wir ein r mit $|x_0| < r < R$; auf $[-r,r]$ konvergiert die Reihe dann gleichmäßig. Ferner sind die Partialsummen Polynome, also stetig; deshalb ist nach Satz VII.1.5 die Funktion f als Funktion auf $[-r,r]$ stetig. Aber x_0 ist ein innerer Punkt von $[-r,r]$; daher ist x_0 auch für f als Funktion auf $(-R,R)$ eine Stetigkeitsstelle. □

Nun untersuchen wir die Differenzierbarkeit einer Potenzreihe. Dazu ein Lemma.

Lemma VII.2.7 *Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiere bei $x_0 \neq 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k$ an jeder Stelle x mit $|x| < |x_0|$.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz VII.2.3 beobachten wir, dass $(a_k x_0^k)$ als Nullfolge beschränkt ist, sagen wir $|a_k x_0^k| \le C$ für alle k. Setze $q = |x|/|x_0| < 1$. Dann ist

$$|k a_k x^k| \le C k q^k \qquad \text{für alle } k,$$

und $\sum_{k=0}^{\infty} C k q^k$ ist eine konvergente (warum?) Majorante der zu betrachtenden Reihe. □

Korollar VII.2.8 *Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k$ haben denselben Konvergenzradius.*

Beweis. Dass folgt aus Lemma VII.2.7 und der Tatsache, dass $\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k||x|^k$ eine Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ ist. □

Um die Differenzierbarkeit einer Potenzreihe zu untersuchen, benötigen wir die Reihenversion von Satz VII.1.7. Diese lautet:

Satz VII.2.9 *Es seien $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen auf einem Intervall I. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiere punktweise gegen eine Grenzfunktion f, und die Reihe der Ableitungen $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion g. Dann ist f differenzierbar mit Ableitung $f' = g$.*

Das ergibt sich sofort, wenn man Satz VII.1.7 auf die Partialsummen anwendet und die Additivität der Ableitungsoperation (d.h. $(\sum_{k=0}^{n} f_k)' = \sum_{k=0}^{n} f_k'$) beachtet. Satz VII.2.9 gibt also Bedingungen dafür an, dass man eine unendliche Reihe gliedweise differenzieren darf:

$$\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Bigr)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'.$$

Möchte man das auf eine Potenzreihe, also $f_k(x) = a_k x^k$, anwenden, erhält man rechter Hand die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, die nach Korollar VII.2.8 denselben Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe hat[3]. Mit denselben Vorsichtsmaßnahmen wie bei Satz VII.2.6 können wir jetzt zeigen:

Satz VII.2.10 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion $f\colon (-R, R) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$.*

Beweis. Sei $x_0 \in (-R, R)$; wähle r mit $|x_0| < r < R$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ konvergiert gleichmäßig auf $[-r, r]$, da es sich ja ebenfalls um eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius R handelt. Also ist Satz VII.2.9 anwendbar und zeigt die Differenzierbarkeit von f bei x_0, wenn wir f als Funktion auf $[-r, r]$ ansehen. Aber x_0 ist ein innerer Punkt von $[-r, r]$; daher gilt diese Aussage auch für f als Funktion auf $(-R, R)$. □

Wir haben soeben gezeigt, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden dürfen:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \qquad \text{für } |x| < R.$$

Aber wegen Korollar VII.2.8 genügt die Reihe rechter Hand ebenfalls den Voraussetzungen von Satz VII.2.10, und die ursprüngliche Potenzreihe ist sogar zweimal differenzierbar. Induktiv erhält man so:

Korollar VII.2.11 *Eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ ist auf $(-R, R)$ beliebig häufig differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} a_k x^k.$$

[3] Der Exponent $k-1$ statt k spielt für dieses Argument keine Rolle.

Schreiben wir $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und werten wir Korollar VII.2.11 bei $x = 0$ aus, so erhalten wir

$$f^{(n)}(0) = a_n n! \quad \text{bzw.} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Daher ist die f definierende Potenzreihe die Taylorreihe von f.

Um das bestimmte Integral einer Potenzreihe zu berechnen, verwenden wir die Reihenversion von Satz VII.1.6. Sie lautet:

Satz VII.2.12 *Seien $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiere gleichmäßig, etwa gegen f. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Das ergibt sich sofort, wenn man Satz VII.1.6 auf die Partialsummen anwendet und die Additivität der Integrationsoperation beachtet. Wieder kann man die Aussage von Satz VII.2.12 so ausdrücken, dass man die Reihe gliedweise integrieren darf.

Wenn man den Satz auf Potenzreihen anwendet, erhält man Folgendes.

Satz VII.2.13 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $x \in (-R, R)$. Dann gilt*

$$\int_0^x \Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\Bigr)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

In Satz IV.3.6 hatten wir die Logarithmusreihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

für $-\frac{1}{2} \le x \le 1$ hergeleitet. Wir werden jetzt zeigen, dass das sogar für $-1 < x \le 1$ gilt. Wir betrachten dazu die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 1/(1+x)$ für $|x| < 1$. Gliedweise Integration gemäß Satz VII.2.13 liefert für diese x

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

(Der Fall $x = 1$ muss separat diskutiert werden; das haben wir aber in Satz IV.3.6 bereits getan.)

Kapitel VIII

Metrische Räume

VIII.1 Der Begriff der Metrik

Bei der Diskussion von Konvergenz und Stetigkeit sind immer wieder Ausdrücke der Form $|x-y|$ aufgetaucht, und zwar sowohl bei reellen als auch bei komplexen Zahlen. Konvergenz- und Stetigkeitsphänomene kann man sich häufig intuitiv klarmachen, wenn man $|x-y|$ als Abstand zwischen x und y deutet. Dass bei $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ oft identische Argumente erscheinen, lässt darauf schließen, dass es vielleicht ein übergeordnetes Konzept geben könnte, das diese Spezialfälle einschließt.

Solch ein Konzept beruht auf der folgenden Definition.

Definition VIII.1.1 Sei M eine Menge. Eine Funktion $d\colon M \times M \to [0,\infty)$ heißt *Metrik*, wenn für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) (Definitheit) $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

(b) (Symmetrie) $d(x,y) = d(y,x)$.

(c) (Dreiecksungleichung) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Wird M mit einer Metrik d versehen, spricht man von (M,d) als *metrischem Raum*.

Obwohl unser Hauptinteresse in dieser Vorlesung dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ gilt (siehe Satz VIII.1.6), ist es den kleinen Extraaufwand wert, das allgemeine abstrakte Konzept kennenzulernen.

Wir kennen bereits die Metriken $d(x,y) = |x-y|$ auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$; die Dreiecksungleichung (c) folgt aus der Dreiecksungleichung des Betrags:

$$d(x,y) = |x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$$

Es ist fast immer trivial, die Bedingungen (a) und (b) zu verifizieren, so auch bei dem gerade besprochenen Beispiel und bei den folgenden. Hingegen ist (c) manchmal etwas trickreich.

Beispiele VIII.1.2 (a) Es sei X eine Menge und $B(X)$ die Menge der beschränkten reellwertigen Funktionen auf X. Für $f, g \in B(X)$ setze

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Dies ist eine Metrik auf $B(X)$; die Dreiecksungleichung sieht man so. Für $f, g, h \in B(X)$ und festes $x_0 \in X$ ist

$$|f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)| \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g).$$

Nimmt man das Supremum über alle $x_0 \in X$, erhält man

$$d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g),$$

was zu zeigen war. Der Term $d_\infty(f, g)$ ist uns bei der Diskussion der gleichmäßigen Konvergenz schon begegnet; vgl. (VII.1.2).

(b) Es sei M eine Menge, und für $x, y \in M$ setze

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Dies ist eine Metrik auf M (Beweis?); sie heißt *diskrete Metrik*.

(c) Sei $M = \mathbb{Z}^2$. Für $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ setze

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Dies ist eine Metrik auf $\mathbb{Z}^2$; die Dreiecksungleichung rechnet sich von allein nach. Sie wird manchmal *Manhattan-Taxi-Metrik* genannt. (Skizze?)

(d) Sei $0 < \alpha < 1$, und für $x, y \in \mathbb{R}$ sei

$$d_\alpha(x, y) = |x - y|^\alpha.$$

Dies ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$, die *α-Hölder-Metrik*. Wir wollen die Dreiecksungleichung

$$|x - y|^\alpha \leq |x - z|^\alpha + |z - y|^\alpha$$

nachrechnen; es gilt natürlich

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|.$$

Mit der Abkürzung $a = |x - z|$, $b = |z - y|$ reicht es daher,

$$(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha \tag{VIII.1.1}$$

für $a, b \geq 0$ zu zeigen. Wir skalieren diese Ungleichung um, indem wir $A = a^\alpha$, $B = b^\alpha$ und $p = 1/\alpha > 1$ setzen. Dann lautet sie

$$A^p + B^p \leq (A + B)^p.$$

O.B.d.A. sind hier $A, B > 0$, und weiteres Umskalieren mit $s = A/(A+B)$ und $t = B/(A+B)$ macht aus (VIII.1.1) die äquivalente Ungleichung

$$s^p + t^p \leq 1 = s + t \qquad \text{mit } p > 1,\ 0 < s, t < 1.$$

Diese Ungleichung stimmt aber, da $s^p \leq s$ und $t^p \leq t$ für diese s, t, p.

(e) Das für diese Vorlesung wichtigste Beispiel ist die *euklidische Metrik* auf $\mathbb{R}^n$. Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ setze[1]

$$d(x,y) = \bigl(|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2\bigr)^{1/2}.$$

Hier ist der Nachweis der Dreiecksungleichung alles andere als offensichtlich, obwohl die Gültigkeit in den geometrisch vorstellbaren Fällen $n = 2$ und $n = 3$ anschaulich evident ist. Den Fall $n = 1$ kennen wir natürlich bereits, und $n = 2$ eigentlich auch: Identifiziert man nämlich $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ auf kanonische Weise, so stimmt $d(x,y)$ mit dem Abstand in $\mathbb{C}$, d.h. $|x-y|$, überein. Für den allgemeinen Fall muss man jedoch ein bisschen ausholen, was im Rest dieses Abschnitts geschieht.

Eng verwandt mit dem Begriff der Metrik ist der der Norm.

Definition VIII.1.3 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Funktion $N\colon V \to [0,\infty)$ heißt *Norm*, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Bedingungen erfüllt sind.

(a) (Definitheit) $N(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(b) (Homogenität) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

(c) (Dreiecksungleichung) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Wird V mit einer Norm N versehen, spricht man von (V, N) als *normiertem Raum.*

Üblicherweise schreibt man $\|x\|$ statt $N(x)$, um die Ähnlichkeit zum Betrag augenfälliger zu machen. Jede Norm generiert eine Metrik:

Lemma VIII.1.4 *Sei $(V, \|\,.\,\|)$ ein normierter Vektorraum. Setze $d(x,y) = \|x-y\|$ für $x, y \in V$. Dann ist d eine Metrik auf V.*

Beweis. Nur die Dreiecksungleichung ist zu begründen, da die übrigen Bedingungen klar sind. Für $x, y \in V$ erhält man

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y),$$

[1] Hier bezeichnen wir die Koordinaten von x mit $x_1, \dots, x_n$, genauso für y und alle Vektoren, die uns noch begegnen werden.

was zu zeigen war. (Diese Rechnung sollte Ihnen bekannt vorkommen!) □

Ein wichtiger Unterschied zwischen Norm und Metrik ist, dass eine Norm nur auf einem Vektorraum erklärt werden kann, denn die Normaxiome machen explizit von den Vektorraumoperationen (Vektoraddition, skalare Multiplikation) Gebrauch.

Die Standardmetrik von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ leitet sich auf diese Weise vom Betrag ab (der eine Norm auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist). Ebenso leitet sich die Metrik d_∞ in Beispiel VIII.1.2(a) von der *Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

ab; beachten Sie, dass $B(X)$ ein Vektorraum ist und dass sich die Dreiecksungleichung für $\|\,.\,\|_\infty$ genauso wie in Beispiel VIII.1.2(a) nachweisen lässt.

Unser eigentliches Augenmerk liegt aber, wie gesagt, auf der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^n$. Formal ist dies

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

mit der *euklidischen Norm*

$$\|x\| = \bigl(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\bigr)^{1/2}.$$

Dass es sich wirklich um eine Norm handelt, ist allerdings noch zu begründen. Als Hilfsmittel benötigen wir die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.* Es sei an das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ erinnert:

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Satz VIII.1.5 *Für $x,y\in\mathbb{R}^n$ gilt*

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|.$$

Beweis. Die Ungleichung stimmt für $y=0$; deshalb sei im Folgenden $y\neq 0$. Wir wissen, dass stets $\|x-\lambda y\|^2 \ge 0$ gilt; durch geschickte Wahl von λ werden wir diese triviale Ungleichung in die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwandeln. Mit Hilfe der bekannten Regeln für das Skalarprodukt ergibt sich

$$0 \le \|x-\lambda y\|^2 = \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle.$$

Setzt man hier $\lambda = \langle x,y\rangle/\|y\|^2$ ein, erhält man

$$0 \le \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2\|y\|^2}{\|y\|^4} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}.$$

Umstellen liefert die Behauptung. $\square$

Jetzt können wir die Dreiecksungleichung für $\| \,.\, \|$ beweisen. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\le \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. (Das Argument sollte Sie an das in Lemma VI.1.1(c) erinnern!) $(\square)$

Halten wir die Quintessenz dieser Überlegungen formal als Satz fest.

Satz VIII.1.6 *Durch*

$$\|x\| = \bigl(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\bigr)^{1/2}$$

wird eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ *definiert, und durch*

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

wird eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ *definiert.*

Wenn im Folgenden von $\mathbb{R}^n$ als normiertem oder metrischem Raum gesprochen wird, ohne Norm oder Metrik zu spezifizieren, ist damit immer die euklidische Norm oder Metrik aus Satz VIII.1.6 gemeint.

Sei (M,d) ein metrischer Raum und $T \subset M$ eine Teilmenge. Indem man die Metrik d nur an Stellen aus $T \times T$ betrachtet, also die Einschränkung von d auf $T \times T \subset M \times M$, erhält man „dieselbe“ Metrik auch auf T. Damit wird auch (T,d) zu einem metrischen Raum. Zum Beispiel ist für jede Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ diese als mit der (Einschränkung der) euklidischen Metrik versehener eigenständiger metrischer Raum anzusehen.

VIII.2 Konvergenz in metrischen Räumen

Wenn man sich an die Definition einer Folge von reellen oder komplexen Zahlen erinnert und das dort auftauchende $|x_n - x|$ bzw. $|z_n - z|$ als Abstand interpretiert, ist es klar, wie Konvergenz in einem abstrakten metrischen Raum zu erklären ist.

Definition VIII.2.1 Seien (M,d) ein metrischer Raum und (x_n) eine Folge in M. Die Folge heißt *konvergent* mit Grenzwert x, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 \qquad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Schreibweise: $x_n \to x$.

Wir bestätigen sofort, wie bei $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist. Gelte nämlich $x_n \to x$ und $x_n \to x'$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_0, n_0' \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &< \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0, \\ d(x_n, x') &< \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0'. \end{aligned}$$

Speziell gelten beide Ungleichungen für $N = \max\{n_0, n_0'\}$. Dann zeigt die Dreiecksungleichung

$$d(x, x') \leq d(x, x_N) + d(x_N, x') < 2\varepsilon;$$

mit anderen Worten ist $0 \leq d(x, x') < 2\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Es folgt $d(x, x') = 0$ und wegen der Definitheit einer Metrik $x = x'$.

Diese Bemerkung gestattet es, statt $x_n \to x$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ zu schreiben.

Beispiele VIII.2.2 (a) Konvergenz in der Metrik d_∞ aus Beispiel VIII.1.2(a) ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge; vgl. (VII.1.2). Deswegen nennt man d_∞ auch Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.

(b) Wir betrachten die diskrete Metrik auf einer Menge X (siehe Beispiel VIII.1.2(b)). Wendet man Definition VIII.2.1 mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ an, sieht man, dass eine konvergente Folge „schließlich“ konstant sein muss: $x_n = x$ für $n \geq n_0$.

(c) Dasselbe gilt für die Taxi-Metrik aus Beispiel VIII.1.2(c).

(d) In der α-Hölder-Metrik d_α aus Beispiel VIII.1.2(d) ist Konvergenz die übliche Konvergenz, da $|x_n - x|^\alpha \to 0$ genau dann, wenn $|x_n - x| \to 0$ (warum?).

Das wichtigste Beispiel ist die euklidische Metrik des $\mathbb{R}^n$. Da der Buchstabe n jetzt schon vergeben ist, werden wir eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $(x^{(k)})_k$ bezeichnen; die Koordinaten von $x^{(k)}$ sind $x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$.

Satz VIII.2.3 *Eine Folge $(x^{(k)})_k$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn die Koordinatenfolgen $(x_j^{(k)})_k$ für $j = 1, \dots, n$ konvergieren. Genauer gilt*

$$x^{(k)} \to x \iff x_j^{(k)} \to x_j \ (j = 1, \dots, n).$$

Beweis. Gelte $x^{(k)} \to x$. Da stets $|x_j^{(k)} - x_j| \leq \|x^{(k)} - x\|$, gilt „$\Rightarrow$“. Umgekehrt gelte $x_j^{(k)} \to x_j$ für alle j. Wir werden die Hilfsungleichung

$$\|v\| \leq \sum_{j=1}^n |v_j| \qquad (v \in \mathbb{R}^n)$$

verwenden. (Beweis: Behauptet ist $\sum_j |v_j|^2 \leq \bigl(\sum_j |v_j|\bigr)^2$, und Ausmultiplizieren der rechten Seite zeigt, dass das stimmt.) Hier wissen wir $|x_j^{(k)} - x_j| \to 0$ für alle j, also auch

$$\sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j| \to 0.$$

Die Hilfsungleichung zeigt $\|x^{(k)} - x\| \to 0$, wo natürlich x der Vektor mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ ist. $\square$

Korollar VIII.2.4 *Seien $(x^{(k)})$ und $(y^{(k)})$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}^n$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $(x^{(k)} \pm y^{(k)})$ und $(\lambda x^{(k)})$ konvergent, und es gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} (x^{(k)} \pm y^{(k)}) &= \lim_{k\to\infty} x^{(k)} \pm \lim_{k\to\infty} y^{(k)}, \\ \lim_{k\to\infty} \lambda x^{(k)} &= \lambda \lim_{k\to\infty} x^{(k)}. \end{aligned}$$

Beweis. Das gilt, weil es koordinatenweise stimmt. $\square$

Auch der Begriff der Cauchyfolge lässt sich in den abstrakten Rahmen übertragen.

Definition VIII.2.5 Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (M,d) heißt *Cauchyfolge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 \qquad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Genau wie Satz VIII.2.3 zeigt man:

Satz VIII.2.6 *Eine Folge $(x^{(k)})_k$ in $\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn jede Koordinatenfolge $(x_j^{(k)})_k$ eine Cauchyfolge ist.*

Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchyfolge (Beweis?), aber die Umkehrung braucht nicht zu gelten: Im metrischen Raum $(0,\infty)$, versehen mit der üblichen euklidischen Metrik, ist $(\frac{1}{n})$ eine nicht konvergente Cauchyfolge. (Der Möchtegerngrenzwert 0 liegt nicht in M!) Da die Gültigkeit der Umkehrung häufig sehr wichtig ist (siehe zum Beispiel den Banachschen Fixpunktsatz, Satz VIII.3.9), definiert man:

Definition VIII.2.7 Ein metrischer Raum (M,d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in M in diesem metrischen Raum konvergiert. Ist $(V, \|\,.\,\|)$ ein normierter Raum, für den der assoziierte metrische Raum vollständig ist, so heißt V ein *Banachraum*.

Wir wissen bereits, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit der üblichen Metrik vollständig sind. Die Sätze VIII.2.3 und VIII.2.6 implizieren:

Satz VIII.2.8 *Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist in der euklidischen Metrik vollständig.*

Vollständigkeit hängt (natürlich) von der Wahl der Metrik ab. Betrachten wir auf $\mathbb{R}$ zum Beispiel

$$d'(x,y) = |\arctan x - \arctan y|.$$

Es ist klar, dass das eine Metrik definiert (nicht wahr?), und eine Folge ist genau dann d'-konvergent, wenn sie im üblichen Sinn konvergent ist, denn arctan und tan sind stetige Funktionen. Hingegen ist $(\mathbb{R}, d')$ nicht vollständig, da (n), die Folge der natürlichen Zahlen, eine nicht konvergente d'-Cauchyfolge ist.

Ein weiteres wichtiges Beispiel eines vollständigen metrischen Raums ist $(B(X), d_\infty)$ aus Beispiel VIII.1.2(a).

Satz VIII.2.9 *Der Raum der beschränkten Funktionen $B(X)$ ist bezüglich der Metrik d_∞ vollständig; mit anderen Worten ist der normierte Vektorraum $(B(X), \|\,.\,\|_\infty)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei (f_n) eine d_∞-Cauchyfolge in $B(X)$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \qquad \text{für } m, n \geq n_0. \tag{VIII.2.1}$$

Da für jede Funktion $g \in B(X)$ und jedes $x \in X$ die Ungleichung

$$|g(x)| \leq \|g\|_\infty$$

gilt (nach Definition der Supremumsnorm), folgt aus (VIII.2.1)

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in X,\ m, n \geq n_0.$$

Daher ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in X$ eine Cauchyfolge reeller Zahlen, ergo konvergent. Das gestattet es, die Funktion

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

zu definieren.

Die Funktion f ist unser Kandidat für den Grenzwert der gegebenen Cauchyfolge. Dazu sind noch zwei Dinge zu zeigen, nämlich $f \in B(X)$ und $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, d.h. (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f (konstruktionsgemäß besitzen wir nur die punktweise Konvergenz!).

Was die Beschränktheit von f angeht, wenden wir (VIII.2.1) mit $\varepsilon = 1$ an und bezeichnen das zugehörige n_0 mit N. Dann folgt mit $m = N$

$$|f_n(x) - f_N(x)| \leq 1 \qquad \text{für alle } x \in X,\ n \geq N.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$|f(x) - f_N(x)| \leq 1 \qquad \text{für alle } x \in X,$$

also

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq 1 + \|f_N\|_\infty,$$

und f ist beschränkt.

Der Beweis für $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ ist ähnlich. Diesmal sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann impliziert (VIII.2.1)

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in X,\ m, n \ge n_0.$$

Jetzt machen wir den Grenzübergang $m \to \infty$, und wir erhalten

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in X,\ n \ge n_0.$$

Da n_0 nicht von x abhängt, zeigt das die gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gegen f. $\square$

Satz VIII.2.9 kann man auch als Cauchy-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz auffassen.

VIII.3 Stetige Abbildungen

Wie bei der Konvergenz ist es auch bei der Stetigkeit nicht schwer, die klassische Definition auf metrische Räume zu übertragen. Häufig spricht man von Abbildungen statt Funktionen, wenn der Wertebereich nicht $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.

Definition VIII.3.1 Seien (M, d) und (M', d') metrische Räume, und sei $f\colon M \to M'$ eine Abbildung. Diese heißt *stetig bei* $x_0 \in M$, wenn stets

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0);$$

sie heißt *stetig*, wenn sie an jeder Stelle stetig ist.

Wie in der Analysis I notieren wir die obige Implikation als

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Beispiele VIII.3.2 (a) Seien $M = \mathbb{R}^n$ und $M' = \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion, die einem Vektor x die j-te Koordinate zuordnet, also $f(x) = x_j$. Wegen Satz VIII.2.3 ist f stetig.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$, ist stetig. Das folgt aus der *umgekehrten Dreiecksungleichung*

$$\bigl|\|x\| - \|y\|\bigr| \le \|x - y\|$$

[Beweis wie bei $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$; man muss nur das Symbol $|\,.\,|$ durch $\|\,.\,\|$ ersetzen], zeigt sie doch $\|x^{(k)}\| \to \|x\|$, falls $x^{(k)} \to x$ (d.h. $\|x^{(k)} - x\| \to 0$).

(c) Sei (M, d) ein metrischer Raum, und sei $\emptyset \ne T \subset M$. Wir setzen

$$\operatorname{dist}(x, T) = \inf\{d(x, t)\colon t \in T\}$$

und zeigen, dass $f\colon M \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{dist}(x, T)$, stetig ist. Seien dazu $x, y \in M$. Für beliebiges $t \in T$ ist dann

$$f(x) \leq d(x,t) \leq d(x,y) + d(y,t).$$

Nimmt man hier das Infimum über alle $t \in T$, erhält man $f(x) \leq d(x,y) + f(y)$. Da man die Rollen von x und y vertauschen kann, folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y) \qquad \text{für alle } x, y \in M.$$

Wie in (b) schließt man die Stetigkeit von f. – Speziell zeigt diese Überlegung, dass $x \mapsto d(x,t)$ stetig ist; wähle nämlich $T = \{t\}$.

(d) Betrachten wir abschließend den Extremfall der diskreten Metrik; nach Beispiel VIII.2.2(b) sind dann nur die schließlich konstanten Folgen konvergent. Es folgt:

- Wenn M die diskrete Metrik trägt und M' beliebig ist, ist jede Abbildung $f\colon M \to M'$ stetig.
- Wenn M' die diskrete Metrik trägt, sind nur konstante Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to M'$ stetig[2].

Sei $f\colon M \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Diese Vektorabbildung „besteht“ aus den m reellwertigen *Koordinatenfunktionen* f_i, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Aus Satz VIII.2.3 ergibt sich sofort:

Satz VIII.3.3 *Eine Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}^m$ auf einem metrischen Raum ist genau dann stetig, wenn alle Koordinatenfunktionen f_i stetig sind.*

Korollar VIII.3.4 *Seien $f, g\colon M \to \mathbb{R}^m$ stetige Funktionen auf einem metrischen Raum und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f \pm g$ und λf stetig.*

Wie in der Analysis I zeigt man:

Satz VIII.3.5 *Seien (M,d), (M',d') und (M'',d'') metrische Räume. Sei $f\colon M \to M'$ stetig bei x_0, und sei $g\colon M' \to M''$ stetig bei $y_0 = f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ stetig bei x_0.*

Beweis. Aus $x_n \to x_0$ folgt nämlich $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$ und daraus $g(f(x_n)) \to g(y_0)$, d.h. $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$. □

Beispiel VIII.3.6 Als Konsequenz des letzten Satzes wollen wir begründen, dass

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{2x_2} \sin(x_1 + x_2)$$

[2] In der Topologie lernt man, dass diese Aussage auch gilt, wenn man $\mathbb{R}$ durch einen „zusammenhängenden“ metrischen Raum ersetzt.

stetig ist. Dazu sezieren wir f, um diese Funktion als Zusammensetzung von sin, exp, Addition und Multiplikation zu schreiben. Wir erklären die Funktionen

$$\begin{aligned} \mathrm{add}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad \mathrm{add}(x_1,x_2) = x_1 + x_2, \\ \mathrm{mult}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad \mathrm{mult}(x_1,x_2) = x_1 x_2, \\ p_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad p_1(x_1,x_2) = x_1, \\ p_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad p_2(x_1,x_2) = x_2, \end{aligned}$$

die allesamt stetig sind[3]. Dann zeigt die Darstellung

$$f(x_1,x_2) = \mathrm{mult}(\exp(2x_2), \sin(\mathrm{add}(x_1,x_2)),$$

also

$$f = \mathrm{mult} \circ (\exp \circ (2p_2), \sin \circ \mathrm{add}),$$

die Stetigkeit von f. – Dieses Beispiel zeigt pars pro toto, dass jede solche Zusammensetzung mit Hilfe der handelsüblichen Funktionen aus der Analysis I stetig ist. Das hätte man gewiss auch direkt mit der Definition einsehen können, aber die (komplizierte) Technik von oben lässt sich im nächsten Kapitel noch mit Gewinn einsetzen.

Der nächste Satz ist das ε-δ-Kriterium im abstrakten Kontext.

Satz VIII.3.7 *Seien (M,d) und (M',d') metrische Räume, $f\colon M \to M'$ eine Abbildung und $x_0 \in M$. Dann ist f genau dann stetig bei x_0, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M \qquad d(x,x_0) < \delta \ \Rightarrow\ d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Beweis. Gelte die ε-δ-Bedingung. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ entsprechend. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to x_0$; es existiert dann $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n, x_0) < \delta \qquad \text{für } n \geq n_0.$$

Für diese n gilt nach Wahl von δ

$$d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon;$$

das zeigt $f(x_n) \to f(x_0)$, und f ist stetig bei x_0.

Die umgekehrte Implikation ist schwieriger; wir argumentieren wie bei Satz III.1.7. Nehmen wir an, dass die ε-δ-Bedingung verletzt ist. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, für das es kein passendes δ gibt. Für jedes δ der Form $\delta = 1/n$ existiert daher ein $x_n \in M$ mit $d(x_n, x_0) < 1/n$, aber $d'(f(x_n), (f(x_0)) \geq \varepsilon_0$, Das zeigt $x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$; daher kann f bei x_0 nicht stetig sein. □

In den obigen Beispielen VIII.3.2(b) und (c) hätte man auch mit dem ε-δ-Kriterium argumentieren können, denn die Überlegungen dort zeigen, dass man $\delta = \varepsilon$ wählen kann (unabhängig von x_0!).

Wir untersuchen noch eine Klasse von speziellen Abbildungen.

[3] Für add und mult ist das eine hochtrabende Umformulierung der Rechenregeln für Grenzwerte aus Kapitel II, und für die p_j siehe Beispiel VIII.3.2(a).

Satz VIII.3.8 *Sei* $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linear.*

(a) *Dann existiert eine Konstante c mit*

$$\|\Lambda(x)\| \le c\|x\| \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Λ *ist stetig.*

Beweis. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass zu jeder (linearen!) Koordinatenfunktion Λ_i von Λ ein Vektor y_i mit

$$\Lambda_i(x) = \langle x, y_i \rangle \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

existiert. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert

$$|\Lambda_i(x)| \le \|x\|\,\|y_i\|,$$

daher

$$\|\Lambda(x)\| \le \Bigl(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^2\Bigr)^{1/2} \|x\|.$$

(b) Aus $x^{(k)} \to x$ folgt

$$\|\Lambda(x^{(k)}) - \Lambda(x)\| = \|\Lambda(x^{(k)} - x)\| \le c\|x^{(k)} - x\| \to 0,$$

was die Stetigkeit von Λ zeigt. □

Die beste (d.h. kleinste) Konstante, die man in (a) verwenden kann, bezeichnet man mit $\|\Lambda\|_{\mathrm{op}}$, dies ist die *Operatornorm* von Λ; in der Tat ist es nicht schwer zu zeigen, dass $\Lambda \mapsto \|\Lambda\|_{\mathrm{op}}$ eine Norm auf dem Vektorraum $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ aller linearen Abbildungen ist. Ist A eine $m \times n$-Matrix und $\Lambda(x) = Ax$, so heißt entsprechend die beste Konstante in der Ungleichung $\|Ax\| \le c\|x\|$ die Operatornorm $\|A\|_{\mathrm{op}}$ von A.

Wir schließen den Abschnitt mit dem *Banachschen Fixpunktsatz.*

Satz VIII.3.9 *Seien* (M, d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $f\colon M \to M$ *eine Abbildung. Es existiere ein* $q < 1$ *mit*

$$d(f(x), f(y)) \le q\, d(x, y) \qquad \textit{für alle } x, y \in M. \tag{VIII.3.1}$$

Dann besitzt f *einen eindeutig bestimmten Fixpunkt; das ist ein* $p \in M$ *mit* $f(p) = p$.

Eine Abbildung, die (VIII.3.1) mit einem $q < 1$ erfüllt, heißt *Kontraktion* und q *Kontraktionskonstante.*

Beweis. Zuerst soll die Eindeutigkeit begründet werden. Gelte $f(p_1) = p_1$ und $f(p_2) = p_2$. Wendet man (VIII.3.1) mit $x = p_1$ und $y = p_2$ an, erhält man

$d(p_1, p_2) \leq q\, d(f(p_1), f(p_2)) = q\, d(p_1, p_2)$, also $(1-q)d(p_1, p_2) \leq 0$. Es folgt $d(p_1, p_2) = 0$ und $p_1 = p_2$.

Nun zur Existenz. Die Idee ist, eine Cauchyfolge zu konstruieren, deren Grenzwert sich als Fixpunkt erweist. Sei $x_0 \in M$ beliebig. Wir definieren induktiv

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

und zeigen, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Eine wiederholte Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+k}) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+k}) \\ &\;\;\vdots \\ &\leq \sum_{r=0}^{k-1} d(x_{n+r}, x_{n+r+1}). \end{aligned}$$

Nun ist für jedes $l \geq 1$

$$d(x_l, x_{l+1}) = d(f(x_{l-1}), f(x_l)) \leq q\, d(x_{l-1}, x_l),$$

es folgt induktiv

$$d(x_l, x_{l+1}) \leq q^l d(x_0, x_1).$$

Setzt man das oben ein, erhält man

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{r=0}^{k-1} q^{n+r} d(x_0, x_1) \leq q^n \sum_{r=0}^{\infty} q^r d(x_0, x_1) = \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1).$$

Da $q^n \to 0$, schließt man auf die Cauchy-Eigenschaft von (x_n).

In dem vollständigen Raum M hat (x_n) einen Grenzwert: $x_n \to p$. Die Bedingung (VIII.3.1) zeigt die Stetigkeit von f; deshalb folgt $f(x_n) \to f(p)$. Aber $(f(x_n))_{n\geq 0}$ ist eine Teilfolge von $(x_n)_{n\geq 0}$, nämlich $(x_n)_{n\geq 1}$; daher konvergiert $(f(x_n))$ auch gegen p. Da der Grenzwert eindeutig ist, ist p ein Fixpunkt von f: $f(p) = p$. $\square$

Man bemerke, dass der Banachsche Fixpunktsatz nicht nur Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts sichert, sondern auch konstruktiv ist. Aus der obigen Abschätzung für $d(x_n, x_{n+k})$ ergibt sich nämlich im Grenzübergang $k \to \infty$ (beachte die Stetigkeit von $y \mapsto d(x, y)$)

$$d(x_n, p) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0),$$

und aus dieser Abschätzung kann man ablesen, wie viele Iterationen von f notwendig sind, um p durch x_n bis auf einen vorgegebenen Fehler zu approximieren.

In Anwendungen ist es häufig klar, welche Formel f definieren sollte; es sei nicht verschwiegen, dass es dann ein Hauptproblem ist, eine Menge M zu finden, die f invariant lässt und wo die Kontraktionsbedingung (VIII.3.1) gilt (siehe zum Beispiel den Beweis von Satz IX.5.1 oder Satz XI.3.3).

Es gibt wohl nur wenige mathematische Sätze mit einem derart günstigen Preis-Leistungs-Verhältnis wie beim Banachschen Fixpunktsatz; bei für Fortgeschrittene einfachem Beweis ist er praktisch universell einsetzbar, vom Newtonverfahren zu Fraktalen und Differentialgleichungen. Aus Anlass des 120. Geburtstags von Stefan Banach hat die polnische Staatsbank 2012 drei Sondermünzen herausgegeben; die mit dem höchsten Nennwert (200 zł) dokumentiert den Banachschen Fixpunktsatz. Wie zum Beweis des konstatierten Preis-Leistungs-Verhältnisses ist der Sammlerwert dieser Münze inzwischen das 20-fache des Nominalwerts!

VIII.4 Offene und abgeschlossene Mengen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man die Begriffe Konvergenz und Stetigkeit geometrisch deuten kann. Dazu ist eine lange Volabelliste vonnöten.

Wir beginnen mit einer Bezeichnung. In einem metrischen Raum (M, d) setzen wir für $x_0 \in M$ und $r > 0$

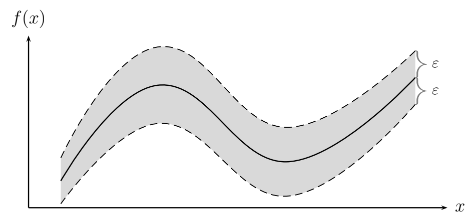
$$U(x_0, r) = \{x \in M \colon d(x, x_0) < r\}, \quad B(x_0, r) = \{x \in M \colon d(x, x_0) \leq r\}$$

und nennen diese Mengen *offene* bzw. *abgeschlossene Kugeln.* Diese Nomenklatur ist offensichtlich dem euklidischen $\mathbb{R}^3$ entlehnt; in $\mathbb{R}^2$ sind diese Mengen Kreise und in $\mathbb{R}$ (offene bzw. abgeschlossene) Intervalle. Vieles, was in diesem Abschnitt zu sagen ist, kann man sich gut in $\mathbb{R}^2$ visualisieren; man muss jedoch manchmal auf ein paar Überraschungen gefasst sein. Ist z.B. d die diskrete Metrik auf M, so ist stets

$$U(x_0, 1) = \{x_0\}, \quad B(x_0, 1) = M.$$

Eine andere gut zu visualisierende Situation ist das Beispiel der beschränkten Funktionen auf $[a, b]$, versehen mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.

Hier kann man sich die „Kugeln“ als „Schläuche“ um einen Funktionsgraphen vorstellen:



Kommen wir zu unserer ersten Vokabel.

Definition VIII.4.1 Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt *Umgebung* des Punktes x_0, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U(x_0, \varepsilon) \subset U$$

existiert.

Zum Beispiel ist $U = U((0,0), 1) \cup \{(1,0)\}$ in $\mathbb{R}^2$ eine Umbebung von $(0,0)$, aber nicht von $(1,0)$.

Die Konvergenz $x_n \to x_0$ einer Folge lässt sich mit diesem Begriff so übersetzen (machen Sie sich die Details klar!):

- *Es gilt $x_n \to x_0$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von x_0 die Aussage $x_n \in U$ für alle bis auf endlich viele n richtig ist.*

Hier die nächste Vokabel.

Definition VIII.4.2 Sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Eine Teilmenge $O \subset M$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h.

$$\forall x \in O \ \exists \varepsilon > 0 \qquad U(x, \varepsilon) \subset O.$$

(b) Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $\complement A = \{x \in M \colon x \notin A\}$ offen ist.

Die Bedingung (a) gibt man auch so wieder, dass um jeden Punkt von O noch eine Kugel in O „hineinpasst“.

Vermeiden Sie den beliebten Fehler zu glauben, dass eine nicht offene Menge abgeschlossen sein muss (Gegenbeispiel: $[0, 1) \subset \mathbb{R}$)!

Beispiele VIII.4.3 (a) Es ist klar, dass die in der Analysis I offen bzw. abgeschlossen genannten Intervalle wirklich offen bzw. abgeschlossen sind. Allgemeiner sind die offen bzw. abgeschlossen genannten Kugeln wirklich offen bzw. abgeschlossen. Zuerst zur offenen Kugel. Sei nämlich $x \in U(x_0, r)$, also $d(x, x_0) < r$.

Setze (machen Sie sich eine Skizze im $\mathbb{R}^2$!) $\varepsilon = r - d(x, x_0) > 0$. Dann ist $U(x, \varepsilon) \subset U(x_0, r)$, denn für $y \in U(x, \varepsilon)$ folgt nach der Dreiecksungleichung

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = r.$$

(b) Die abgeschlossen genannte Kugel ist wirklich abgeschlossen: Dazu ist zu zeigen, dass $\complement B(x_0, r) = \{x \in M\colon d(x, x_0) > r\}$ offen ist. Sei $x \in \complement B(x_0, r)$, also $d(x, x_0) > r$. Setze (machen Sie sich eine Skizze im $\mathbb{R}^2$!) $\varepsilon = d(x, x_0) - r > 0$. Dann ist $U(x, \varepsilon) \subset \complement B(x_0, r)$, denn für $y \in U(x, \varepsilon)$ folgt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(y, x_0) &\geq |d(x, x_0) - d(y, x)| \geq d(x, x_0) - d(y, x) \\ &> d(x, x_0) - \varepsilon = r. \end{aligned}$$

(c) Im $\mathbb{R}^2$ ist $O = \{x \in \mathbb{R}^2\colon x_1 > 0\}$ offen. Sei nämlich $x \in O$. Setze $\varepsilon = x_1 > 0$. Dann ist $U(x, \varepsilon) \subset O$, denn für $y \in U(x, \varepsilon)$ folgt $|y_1 - x_1| \leq d(y, x) < \varepsilon$ und deshalb $y_1 > x_1 - \varepsilon = 0$; d.h. $y \in O$.

(d) Jede einpunktige Menge ist abgeschlossen, wie das Argument in (b) für $r = 0$ zeigt.

Für das System sämtlicher offenen Mengen eines metrischen Raums gelten folgende Aussagen.

Satz VIII.4.4 *Sei (M, d) ein metrischer Raum.*

(a) *$\emptyset$ und M sind offen.*

(b) *Sind $O_1, \dots, O_n \subset M$ offen, so ist auch $O_1 \cap \dots \cap O_n$ offen.*

(c) *Ist I eine Indexmenge und sind alle O_i $(i \in I)$ offen, so ist auch*

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \{x \in M\colon \text{es existiert } i_0 \in I \text{ mit } x \in O_{i_0}\}$$

offen.

Kurz: Endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

Beweis. (a) Dass M offen ist, ist klar. Dass $\emptyset$ offen ist, ergibt sich daraus, dass die Definition der Offenheit mit dem Allquantor „$\forall x \in O$“ beginnt; diese Aussage ist also wahr, wenn es gar kein $x \in O$ gibt.

(b) Es reicht, den Fall $n = 2$ zu behandeln, da der allgemeine Fall daraus durch Induktion folgt (wie?). Seien also O_1 und O_2 offen, und sei $x \in O_1 \cap O_2$. Da $x \in O_1$, existiert $\varepsilon_1 > 0$ mit $U(x, \varepsilon_1) \subset O_1$. Da $x \in O_2$, existiert $\varepsilon_2 > 0$ mit $U(x, \varepsilon_2) \subset O_2$. Sei $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dann gilt sowohl $U(x, \varepsilon) \subset O_1$ als auch $U(x, \varepsilon) \subset O_2$, alao $U(x, \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$. Das zeigt, dass $O_1 \cap O_2$ offen ist.

(c) Sei $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$. Definitionsgemäß existiert dann ein $i_0 \in I$ mit $x \in O_{i_0}$. Da diese Menge offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U(x,\varepsilon) \subset O_{i_0}$. Aber natürlich ist $O_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} O_i$; das zeigt, dass $\bigcup_{i\in I} O_i$ offen ist. □

Dass unendliche Schnitte offener Mengen nicht offen zu sein brauchen, sieht man an dem Gegenbeispiel

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) = \{0\}.$$

Korollar VIII.4.5 *Sei (M,d) ein metrischer Raum.*

(a) *$\emptyset$ und M sind abgeschlossen.*

(b) *Sind $A_1,\dots,A_n \subset M$ abgeschlossen, so ist auch $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ abgeschlossen.*

(c) *Ist I eine Indexmenge und sind alle A_i $(i \in I)$ abgeschlossen, so ist auch*

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in M\colon x \in A_i \text{ für alle } i \in I\}$$

abgeschlossen.

Kurz: Endliche Vereinigungen und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Beweis. Der Beweis ergibt sich sofort aus Satz VIII.4.4 durch Komplementbildung; es ist nur zu beachten, dass das Komplement des Schnitts die Vereinigung der Komplemente und das Komplement der Vereinigung der Schnitt der Komplemente ist. □

Aus (b) und Beispiel VIII.4.3(d) folgt, dass endliche Mengen abgeschlossen sind.

Zu jeder Teilmenge $T \subset M$ können wir die Mengen

$$T^\circ = \bigcup_{O\in\mathscr{O}} O, \qquad \mathscr{O} = \text{Menge der offenen Teilmengen von } T,$$

$$\overline{T} = \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A, \qquad \mathscr{A} = \text{Menge aller abgeschlossenen Obermengen von } T$$

bilden; beachte $\mathscr{O} \neq \emptyset$ wegen $\emptyset \in \mathscr{O}$ und $\mathscr{A} \neq \emptyset$ wegen $M \in \mathscr{A}$. Wegen Satz VIII.4.4 ist T° offen, und wegen Korollar VIII.4.5 ist $\overline{T}$ abgeschlossen. Daher ist $T = \overline{T}$ genau dann, wenn T abgeschlossen ist.

Definition VIII.4.6 T° heißt *offener Kern* und $\overline{T}$ *Abschluss* von T. Die Teilmenge T heißt *dicht* in M, wenn $\overline{T} = M$.

Offenbar ist T° die größte offene Teilmenge von T und $\overline{T}$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von T.

Wir haben folgende Charakterisierung des Abschlusses.

Satz VIII.4.7 *Sei* (M,d) *ein metrischer Raum und* $T \subset M$*. Dann gilt* $x \in \overline{T}$ *genau dann, wenn für jede Umgebung* U *dieses Punkts* $U \cap T \neq \emptyset$ *ist.*

Beweis. Sei die Umgebungsbedingung für x erfüllt und A eine abgeschlossene Obermenge von T; wir wollen $x \in A$ zeigen. Wegen $T \subset A$ ist $\complement A \cap T = \emptyset$, also kann die offene Menge $\complement A$ wegen der Umgebungsbedingung x nicht enthalten; das zeigt $x \in A$.

Sei umgekehrt die Umgebungsbedingung für x nicht erfüllt; dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(x,\varepsilon) \cap T = \emptyset$. Also ist $T \subset A := \complement U(x,\varepsilon)$, was abgeschlossen ist (Beispiel VIII.4.3(a)). Insbesondere ist $x \notin A$ und deshalb $x \notin \overline{T}$. □

Mit Hilfe dieses Satzes sieht man, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt und $\complement\mathbb{Q}$ ebenfalls dicht in $\mathbb{R}$ liegt (das ist nur eine Umformulierung von Satz I.2.4 in der neuen Sprache). Im $\mathbb{R}^n$ ist stets $\overline{U(x,\varepsilon)} = B(x,\varepsilon)$ (Beweis?), aber in anderen metrischen Räumen braucht das nicht zu stimmen; trägt M die diskrete Metrik, so ist nämlich $\overline{U(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\} = U(x,1)$, also $\overline{U(x,1)} \neq B(x,1) = M$, wenn M mindestens zwei Elemente hat. (Da $B(x,\varepsilon)$ abgeschlossen ist, ist in jedem metrischen Raum $\overline{U(x,\varepsilon)} \subset B(x,\varepsilon)$ richtig.)

Als nächstes zeigen wir eine wichtige Folgencharakterisierung des Abschlusses bzw. der Abgeschlossenheit.

Satz VIII.4.8 *Sei* (M,d) *ein metrischer Raum.*

(a) *Seien* $T \subset M$*,* $x \in M$*. Dann ist* $x \in \overline{T}$ *genau dann, wenn es eine Folge* (x_n) *in* T *mit* $x_n \to x$ *gibt.*

(b) *Eine Teilmenge* $A \subset M$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn jede Folge* (x_n) *in* A*, die in* M *konvergiert, ihren Grenzwert in* A *hat, d.h.*

$$x_n \in A,\ x_n \to x \in M \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Beweis. (a) Gelte $x \in \overline{T}$ und sei $U = U(x, 1/n)$. Dies ist eine Umgebung von x, also existiert nach Satz VIII.4.7 ein Punkt $x_n \in U(x,1/n) \cap T$. Damit wird eine Folge (x_n) in T mit $x_n \to x$ definiert, denn $d(x_n, x) < 1/n$.

Sei umgekehrt x der Grenzwert einer Folge (x_n) in T. Ist U eine Umgebung von x, können wir $\varepsilon > 0$ mit $x \in U(x,\varepsilon) \subset U$ wählen. Da $x_n \in U(x,\varepsilon)$ für hinreichend große n, ist $U \cap T \neq \emptyset$. Also ist nach Satz VIII.4.7 $x \in \overline{T}$.

(b) Sei A abgeschlossen, und seien $x_n \in A$ mit $x_n \to x \in M$. Aus Teil (a) ergibt sich $x \in \overline{A}$, aber $\overline{A} = A$, da A abgeschlossen ist. Deshalb ist $x \in A$.

Gelte umgekehrt die Grenzwertbedingung. Wir zeigen $\overline{A} \subset A$. Sei dazu $x \in \overline{A}$; wähle gemäß (a) eine Folge (x_n) in A mit $x_n \to x$. Die Grenzwertbedingung liefert $x \in A$; das war zu zeigen. □

Mit diesem Satz können wir nochmals zeigen, dass $B(x_0, r)$ stets abgeschlossen ist. Seien nämlich $x_n \in B(x_0, r)$ mit $x_n \to x \in M$. Dann gilt auch $d(x_n, x_0) \to d(x, x_0)$, denn $t \mapsto d(t, x_0)$ ist stetig (Beispiel VIII.3.2(c)). Da alle $d(x_n, x_0) \leq r$ sind, ist auch $d(x, x_0) \leq r$.

Eine andere Konsequenz ist, dass die Menge $C([a,b])$ der stetigen Funktionen auf $[a,b]$ abgeschlossen im Raum $(B([a,b]),d_\infty)$ ist; das ergibt sich jetzt aus Satz VII.1.6.

Was die Anwendbarkeit des Banachschen Fixpunktsatzes (Satz VIII.3.9) angeht, beobachten wir:

Korollar VIII.4.9 *Seien (M,d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist auch (A,d) vollständig.*

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchyfolge in A; dies ist auch eine Cauchyfolge in M. Da M vollständig ist, existiert $x = \lim_n x_n$ in M. Nach Satz VIII.4.8 folgt $x \in A$. Also ist der metrische Raum (A,d) ebenfalls vollständig. □

Also kann man den Banachschen Fixpunktsatz auf abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ anwenden. Ferner wurde in Satz VIII.2.9 bewiesen, dass $(B(X),d_\infty)$ vollständig ist; daher (siehe oben) kann man den Banachschen Fixpunktsatz auf $C([a,b])$ und dessen abgeschlossene Teilmengen anwenden. Das macht man sich in der Theorie der Differentialgleichungen zunutze; wir werden diese Technik in Abschnitt IX.5 mit folgender Menge anwenden.

Korollar VIII.4.10 *Seien I ein Intervall und $\beta > 0$. Dann ist*

$$M = \{g\colon I \to [-\beta,\beta]\colon\ g \text{ stetig}\}$$

abgeschlossen in $B(I)$ und ergo vollständig.

Beweis. Seien $g_n \in M$ und $g \in B(I)$ mit $\|g_n - g\|_\infty \to 0$. Da (g_n) also gleichmäßig gegen g konvergiert, ist g stetig; ferner gilt $g_n(x) \to g(x)$ für alle x, also folgt aus $|g_n(x)| \le \beta$ auch $|g(x)| \le \beta$. □

Die letzte Vokabel dieses Abschnitts ist die des Rands einer Menge.

Definition VIII.4.11 Sei (M,d) ein metrischer Raum, und sei $T \subset M$. Der *Rand* von T ist die Menge $\partial T = \overline{T} \setminus T^\circ$.

Satz VIII.4.12 *Sei (M,d) ein metrischer Raum, und sei $T \subset M$.*

(a) *∂T ist stets abgeschlossen.*

(b) *Es gilt $x \in \partial T$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von x sowohl $U \cap T \neq \emptyset$ als auch $U \cap \complement T \neq \emptyset$ ist.*

Beweis. (a) ∂T ist der Schnitt der abgeschlossenen Mengen $\overline{T}$ und $\complement T^\circ$.

(b) Sei $x \in \partial T \subset \overline{T}$. Wir wissen bereits aus Satz VIII.4.8, dass stets $U \cap T \neq \emptyset$. Gäbe es eine Umgebung U von x mit $U \cap \complement T = \emptyset$, wäre $U \subset T$ und insbesondere $U(x,\varepsilon) \subset T$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$. Dann wäre aber $x \in T^\circ$, da $U(x,\varepsilon)$ offen ist.

Umgekehrt können wir aus der ersten Schnittbedingung, wieder wegen Satz VIII.4.8, $x \in \overline{T}$ schließen. Wäre $x \in T^\circ$, gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $U(x,\varepsilon) \subset T$, also $U(x,\varepsilon) \cap \complement T = \emptyset$ im Widerspruch zur zweiten Schnittbedingung. □

Im $\mathbb{R}^n$ gilt daher $\partial U(x_0, r) = \partial B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon d(x, x_0) = r\}$. In anderen metrischen Räumen kann das falsch sein.

Unsere Vokabeln gestatten nun eine elegante Beschreibung der Stetigkeit.

Satz VIII.4.13 *Sei f eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen (M,d) und (M',d').*

(a) *f ist stetig bei x_0 genau dann, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ einer Umgebung V von $f(x_0)$ stets eine Umgebung von x_0 ist.*

(b) *Es sind äquivalent:*
   (i) *f ist stetig.*
   (ii) *Das Urbild einer offenen Teilmenge von M' ist stets eine offene Teilmenge von M.*
   (iii) *Das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge von M' ist stets eine abgeschlossene Teilmenge von M.*

Beweis. (a) ist nichts anderes als eine Umschreibung des ε-δ-Kriteriums: Da jede Obermenge einer Umgebung eines Punkts wieder eine Umgebung ist, reicht es, (a) für Umgebungen der Form $V = \{y \in M' \colon d'(y, f(x_0)) < \varepsilon\}$ zu studieren. Die Bedingung lautet dann: Zu jedem $\varepsilon > 0$ ist $\{x \in M \colon d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\}$ eine Umgebung von x_0; und das heißt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$\{x \in M \colon d(x, x_0) < \delta\} \subset \{x \in M \colon d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\}.$$

Das ist aber genau die Bedingung des ε-δ-Kriteriums.

(b), (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $O' \subset M'$ offen und $O = f^{-1}(O')$. Für jedes $x_0 \in O$ ist $f(x_0) \in O'$ und O' also eine Umgebung von $f(x_0)$. Nach (a) ist O eine Umgebung von x_0. Weil $x_0 \in O$ beliebig war, ist O offen.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x_0 \in M$ und V eine Umgebung von $f(x_0)$; V enthält also eine offene Kugel $O' = \{y \in M' \colon d'(y, f(x_0)) < \varepsilon\}$. Wegen (ii) ist $f^{-1}(O')$ eine offene Umgebung von x_0, also ist auch $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0. Nach (a) ist f stetig bei x_0. Weil $x_0 \in M$ beliebig war, ist f stetig.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Das folgt sofort durch Komplementbildung. □

Dieser Satz ist die Grundlage zahlreicher Abgeschlossenheits- oder Offenheitsbeweise, die nach folgender Blaupause funktionieren. Um die Abgeschlossenheit einer Teilmenge $A \subset M$ zu zeigen, stelle A als $f^{-1}(A')$ für eine offensichtlich oder bekanntermaßen stetige Abbildung $f \colon M \to M'$ in einen weiteren metrischen Raum und für eine offensichtlich oder bekanntermaßen abgeschlossene Teilmenge A' von M' dar[4]. Zum Beispiel sieht man so erneut die Abgeschlossenheit von $B(x_0, r)$, denn für $f \colon M \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, x_0)$, und $A' = [0, r]$ (die die obigen Bedingungen erfüllen) ist $B(x_0, r) = f^{-1}(A')$.

[4] … oder einen Schnitt solcher Mengen!

Es ist im Allgemeinen aber nicht richtig, dass stetige Funktionen offene Mengen auf offene Mengen oder abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbilden; Beispiel: Die Sinusfunktion bildet $(0, 2\pi)$ auf $[-1, 1]$ ab, was nicht offen ist, und die Exponentialfunktion bildet $(-\infty, 0]$ auf $(0, 1]$ ab, was nicht abgeschlossen ist.

VIII.5 Kompaktheit

Der Begriff des kompakten Raums ist von großer Bedeutung in der fortgeschrittenen Analysis. Wir werden uns im Wesentlichen auf kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ konzentrieren; siehe den Ausblick am Ende des Abschnitts für weitere Bemerkungen.

Definition VIII.5.1 Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge K von M heißt *kompakt*[5], wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K hat.

Der Satz von Bolzano-Weierstraß besagt in dieser Sprache, dass jedes reelle Intervall $[a, b]$ kompakt ist. Hier ist das Analogon dieses Satzes für den $\mathbb{R}^n$.

Satz VIII.5.2 (Satz von Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Dass eine Folge $(x^{(k)})_k$ in $\mathbb{R}^n$ beschränkt ist, bedeutet natürlich, dass $\sup_k \|x^{(k)}\| < \infty$. Im Folgenden werden wir Teilfolgen von Teilfolgen von ... von Teilfolgen auswählen; dazu werden wir eine kompakte Notation benötigen. Statt eine Teilfolge mit $(x^{(k_l)})_l$ zu bezeichnen, schreiben wir $(x^{(k)})_{k\in N}$ mit $N = \{k_l\colon l = 1, 2, \dots\}$.

Nun zum eigentlichen Beweis. Wenn $(x^{(k)})_k$ beschränkt ist, ist auch jede Koordinatenfolge $(x_j^{(k)})_k$ beschränkt. Daher existiert eine Teilfolge, für die die erste Koordinatenfolge konvergiert, wir notieren sie als $(x^{(k)})_{k\in N_1}$. Da die zweite Koordinatenfolge von $(x^{(k)})_{k\in N_1}$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $(x^{(k)})_{k\in N_2}$ mit $N_2 \subset N_1$, für die die zweite Koordinatenfolge konvergiert; nach wie vor konvergiert $(x_1^{(k)})_{k\in N_2}$. So fortfahrend, erhält man unendliche Teilmengen $N_n \subset N_{n-1} \subset \dots \subset N_1 \subset \mathbb{N}$, so dass entlang N_r die ersten r Koordinatenfolgen konvergieren, und für $N := N_n$ konvergieren sämtliche Koordinatenfolgen, sagen wir $x_j^{(k)} \to x_j$ für $k \in N$, $k \to \infty$. Satz VIII.2.3 liefert $x^{(k)} \to x$ ($k \in N$, $k \to \infty$) für den Vektor x mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_n$. □

Satz VIII.5.3 (Satz von Heine-Borel)
Eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.

[5]Nach der reinen Lehre müsste man von Folgenkompaktheit sprechen; siehe den Ausblick.

Beweis. Sei K abgeschlossen und beschränkt. Dann hat nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß jede Folge in K einen Grenzwert (a priori in $\mathbb{R}^n$), der nach Satz VIII.4.8 ebenfalls in K liegt.

Ist umgekehrt K nicht abgeschlossen, so gibt es ein Element $x \in \overline{K} \setminus K$. Aus Satz VIII.4.8 folgt, dass K nicht kompakt ist: Gilt $K \ni x_n \to x \notin K$, kann keine Teilfolge von (x_n) einen Grenzwert in K haben. Ist K nicht beschränkt, findet man Elemente $x^{(k)} \in K$ mit $\|x^{(k)}\| > k$. Also ist keine Teilfolge von $(\|x^{(k)}\|)$ konvergent. Da $x \mapsto \|x\|$ stetig ist, kann auch keine Teilfolge von $(x^{(k)})$ konvergent sein. □

Mit fast demselben Beweis kann man zeigen, dass in jedem metrischen Raum kompakte Teilmenge abgeschlossen und beschränkt[6] sind. Die Umkehrung gilt jedoch nicht immer; Gegenbeispiel: $f_n\colon x \mapsto x^n$ in $K = \{f \in B([0,1])\colon \|f\|_\infty \leq 1\}$.

Satz VIII.5.4 *Sei $K \subset M$ eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums. Dann gelten:*

(a) *K ist abgeschlossen.*

(b) *K ist vollständig.*

Beweis. (a) haben wir gerade begründet.

(b) Sei (x_n) eine Cauchyfolge in K. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in K$. Wir zeigen, dass (x_n) selbst gegen x konvergiert. Das folgende Argument kennen Sie aus Satz II.2.7: Sei $\varepsilon > 0$. dann existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon \qquad \text{für alle } k \geq k_0,$$

und es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \geq n_0.$$

Wähle nun $k' \geq k_0$ so groß, dass $n_{k'} \geq n_0$ ist; man darf dann in der vorigen Ungleichung $m = n_{k'}$ setzen. Zusammen ergibt sich für $n \geq n_0$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{k'}}) + d(x_{n_{k'}}, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

was zu zeigen war. □

Wir kommen zur Wechselwirkung von Kompaktheit und Stetigkeit.

Satz VIII.5.5 *Ist $K \subset M$ kompakt und $f\colon K \to M'$ stetig, so ist $f(K)$ kompakt.*

[6] $K \subset M$ heißt beschränkt, wenn es $x_0 \in M$ mit $\sup_{x \in M} d(x, x_0) < \infty$ gibt; in diesem Fall gilt das für jedes $x_0 \in M$.

Beweis. Sei (x'_n) eine Folge in $f(K)$, also gibt es $x_n \in K$ mit $x'_n = f(x_n)$. Da K kompakt ist, hat (x_n) eine konvergente Teilfolge, sagen wir $x_{n_k} \to x \in K$. Da f stetig ist, folgt $f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K)$. Also hat (x'_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $f(K)$. ☐

Insbesondere folgt aus Satz VIII.5.5, dass das stetige Bild einer kompakten Menge abgeschlossen ist.

Korollar VIII.5.6 *Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem metrischen Raum. Dann ist f auf jeder kompakten Teilmenge K beschränkt, und f nimmt auf K sein Supremum und sein Infimum an.*

Beweis. Sei $K \subset M$ kompakt, dann ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt (Satz VIII.5.5) und deshalb beschränkt (Satz VIII.5.3). Da stets $\sup Z \in \overline{Z}$ für eine beschränkte Menge $Z \subset \mathbb{R}$, folgt also

$$\sup_{x \in K} f(x) = \sup f(K) \in f(K),$$

denn $f(K)$ ist nach Satz VIII.5.3 auch abgeschlossen. Das war zu zeigen. (Das Argument für das Infimum geht genauso.) ☐

In Lemma V.1.7 haben wir den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit kennengelernt und gesehen, dass jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. Wir wollen diese Dinge im abstrakten Rahmen wieder aufnehmen.

Definition VIII.5.7 Seien (M,d) und (M',d') metrische Räume, und sei $f\colon M \to M'$ eine Abbildung. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in M \qquad d(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ d'(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

Der springende Punkt dieser Definition ist also, dass man im ε-δ-Kriterium das δ unabhängig von der betrachteten Stelle wählen kann.

Satz VIII.5.8 *Sei (M,d) kompakt, und sei $f\colon M \to M'$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wäre das nicht so, gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall \delta > 0\ \exists x_\delta, y_\delta \in M \qquad d(x_\delta, y_\delta) < \delta,\ d'(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon.$$

Insbesondere gäbe es für $\delta = 1/n$ solche x_δ, y_δ, die wir mit x_n und y_n bezeichnen:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, y_n \in M \qquad d(x_n, y_n) < \frac{1}{n},\ d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Als Folge im Kompaktum M besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $\xi \in M$; wegen $d(x_n, y_n) < 1/n$ gilt auch $y_{n_k} \to \xi$. Nun ist f bei ξ

stetig; deshalb folgt sowohl $f(x_{n_k}) \to f(\xi)$ als auch $f(y_{n_k}) \to f(\xi)$. Insbesondere muss

$$d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d'(f(x_{n_k}), f(\xi)) + d'(f(\xi), f(y_{n_k})) \to 0$$

sein im Widerspruch zu $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ für alle n. □

Das obige Argument ist identisch mit dem in Lemma V.1.7!

Ausblick. In vielen Büchern wird Kompaktheit anders definiert als in Definition VIII.5.1; diese Alternativdefinition ist aber etwas schwer zu verdauen. Diese Variante wollen wir Überdeckungskompaktheit nennen:

Definition VIII.5.9 Sei (M, d) ein metrischer Raum, und sei $K \subset M$. Dann heißt K *überdeckungskompakt*, wenn Folgendes gilt: Ist $\{O_i \colon i \in I\}$ eine Menge von offenen Mengen mit $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, so existiert eine endliche Teilmenge $\{O_i \colon i \in F\}$, $F \subset I$ endlich, mit $K \subset \bigcup_{i \in F} O_i$. Kurz: Jede offene Überdeckung von K hat eine endliche Teilüberdeckung.

Diese Bedingung ist äquivalent zu der in Definition VIII.5.1, aber der Beweis ist nicht einfach. Halten wir dieses Ergebnis fest:

Satz VIII.5.10 *Eine Teilmenge eines metrischen Raums ist genau dann (folgen-) kompakt, wenn sie überdeckungskompakt ist.*

Entsprechend formulieren viele Bücher den Satz von Heine-Borel mit Hilfe der Überdeckungskompaktheit; diese Version ist nicht so leicht zu zeigen wie unsere.

Warum ist die Überdeckungskompaktheit so beliebt? Zum einen gibt es Situationen, wo sie schneller zum Beweis einer Aussage führt; das ist zum Beispiel so, wenn man den Satz von Dini (Satz VII.1.8) auf der Basis der Überdeckungskompaktheit von $[a, b]$ beweisen will[7]. Andererseits ist die Theorie der metrischen Räume ein Spezialfall der Theorie der topologischen Räume, die in der Vorlesung „Topologie“ vorgestellt wird. (Bei einem topologischen Raum werden a priori gewisse Teilmengen, die die Bedingungen in Satz VIII.4.4 erfüllen, als „offen“ deklariert.) In diesem Kontext ist die Überdeckungskompaktheit von der Folgenkompaktheit verschieden, und nur mit ersterer lassen sich die Analoga zu Satz VIII.5.5 und Korollar VIII.5.6 beweisen. Vor diesem Hintergrund ist die Überdeckungskompaktheit der „richtige“ Kompaktheitsbegriff.

---

[7] O.B.d.A. sei wieder $f = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in [a, b]$ existiert ein $n(x)$ mit $f_{n(x)}(x) < \varepsilon$. Da $f_{n(x)}$ stetig ist, gilt dann auch $f_{n(x)}(y) < \varepsilon$ in einer Umgebung U_x von x und weiter $f_n(y) < \varepsilon$ auf U_x für $n \geq n(x)$ wegen der Monotonie. Weil $x \in U_x$ ist, überdecken die U_x das kompakte Intervall $[a, b]$, und daher reichen bereits endlich viele zur Überdeckung: $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{r} U_{x_k}$. Ist $n \geq \max_k n(x_k)$, folgt $f_n(y) < \varepsilon$ für alle y; das war zu zeigen.

Kapitel IX

Mehrdimensionale Differentialrechnung

IX.1 Partielle Ableitungen

Zur Einstimmung wollen wir eine Funktion von zwei Veränderlichen betrachten:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{2x_2} \sin(x_1 + x_2).$$

Während man sich Funktionen einer Veränderlichen gern durch ihren Graphen veranschaulicht (eine Kurve in der Ebene), kann man sich Funktionen von zwei Veränderlichen ebenso durch ihren Graphen

$$\{(x_1, x_2, x_3)\colon x_3 = f(x_1, x_2)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

veranschaulichen, der als Fläche im Raum aufgefasst werden kann. Um sich im obigen Beispiel den Verlauf der Fläche zu veranschaulichen, versucht man, sich die Schnittkurven vorzustellen, die entstehen, wenn man x_2 festhält und nur x_1 variiert bzw. wenn man x_1 festhält und nur x_2 variiert. In unserem obigen Beispiel führt das im ersten Fall zu Schnitten parallel zur x_1-Achse, was den Graphen der partiellen Funktionen

$$f_{[1]}\colon x_1 \mapsto f(x_1, x_2) = e^{2x_2} \sin(x_1 + x_2) \quad \text{bei festem } x_2$$

entspricht, im zweiten zu Schnitten parallel zur x_2-Achse, was den Graphen der partiellen Funktionen

$$f_{[2]}\colon x_2 \mapsto f(x_1, x_2) = e^{2x_2} \sin(x_1 + x_2) \quad \text{bei festem } x_1$$

entspricht. $f_{[1]}$ ist von der Bauart $t \mapsto A \sin(t + a)$, also eine verschobene Sinusfunktion mit Amplitude A, und $f_{[2]}$ ist von der Bauart $t \mapsto e^{2t} \sin(b + t)$, also eine verschobene amplitudenmodulierte Sinusfunktion.

Diese Herangehensweise legt es nahe, auch die Ableitungen der partiellen Funktionen $f_{[1]}$ und $f_{[2]}$ zu betrachten. Diese sind

$$\begin{aligned} f'_{[1]}(x_1) &= e^{2x_2}\cos(x_1+x_2), \\ f'_{[2]}(x_2) &= e^{2x_2}(2\sin(x_1+x_2)+\cos(x_1+x_2)). \end{aligned}$$

Die so entstehenden Funktionen, wieder als Funktionen von zwei Veränderlichen aufgefasst, nennt man die *partiellen Ableitungen* von f und bezeichnet sie mit[1] $\partial f/\partial x_1$ und $\partial f/\partial x_2$, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= e^{2x_2}\cos(x_1+x_2), \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= e^{2x_2}(2\sin(x_1+x_2)+\cos(x_1+x_2)). \end{aligned}$$

Die formale Definition der partiellen Ableitung folgt in Kürze. Werfen wir zuerst noch einen Blick auf Funktionen von drei (oder mehr) Veränderlichen; hier ist eine graphische Veranschaulichung nicht mehr möglich, da der den Graphen umgebende Raum 4- oder höherdimensional ist. Jedoch kann man die Idee der partiellen Ableitung auch hier ausführen: Man friert alle Variablen bis auf eine ein, bildet dann die entsprechenden „eindimensionalen“ Ableitungen und erhält so die partiellen Ableitungen $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2$, $\partial f/\partial x_3$ (etc.). Ist zum Beispiel

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2(\sin x_2 + e^{3x_3}\cos x_1),$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1(\sin x_2 + e^{3x_3}\cos x_1) - x_1^2 e^{3x_3}\sin x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2\cos x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) &= 3x_1^2 e^{3x_3}\cos x_1. \end{aligned}$$

Nochmals zur Beachtung: Dies sind Funktionen von mehreren Veränderlichen!

Um nun partielle Ableitungen (in allen Dimensionen) zu definieren, bezeichnen wir den i-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$ mit e_i, also $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ mit der 1 an der i-ten Stelle. Im Weiteren gilt nach wie vor die Konvention, dass der Vektor x die Koordinaten $x_1,\dots,x_n$ haben soll und analog für andere Vektoren y, z etc.

Definition IX.1.1 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die *i-te partielle Ableitung* and der Stelle $x \in U$ ist dann

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}, \tag{IX.1.1}$$

[1] Weitere Bezeichnungen werden weiter unten erwähnt.

wenn dieser Grenzwert existiert. Die Funktion f heißt bei x *partiell differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen bei x existieren, und sie heißt *auf U partiell differenzierbar*, wenn sie an jeder Stelle partiell differenzierbar ist.

Beachten Sie, dass der Grenzwert in (IX.1.1) genau der Ableitung der partiellen Funktion entspricht, wenn alle Variablen $x_j \neq x_i$ eingefroren sind. Definition IX.1.1 gibt also allgemein wieder, was wir im einführenden Beispiel gemacht haben.

Da U als offen vorausgesetzt war, ist $h \mapsto f(x + he_i)$ garantiert auf einem Intervall der Form $(-\delta, \delta)$ erklärt, daher nehmen wir in (IX.1.1) den beidseitigen Grenzwert.

Im Eindimensionalen brauchten wir beim Definitionsbereich der zu differenzierenden Funktion wenig Rücksicht zu nehmen; insbesondere konnte problemlos der Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall eingeführt werden. Ähnlich ist das auch für „einfache“ Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ wie abgeschlossene Kreise oder Rechtecke im $\mathbb{R}^2$ möglich, aber das Beispiel $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leq x_2 \leq x_1^2\}$ zeigt bereits Grenzen auf (wie wäre $\partial f/\partial x_2(0,0)$ zu definieren???).

Zur Bezeichnung der i-ten partiellen Ableitung bei x sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad f_{x_i}(x), \quad D_i f(x)$$

üblich; in der Regel wird in dieser Vorlesung Letzteres benutzt.

Definition IX.1.2 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ bei $x \in U$ partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor

$$(\operatorname{grad} f)(x) = (D_1 f(x), \ldots, D_n f(x))$$

der *Gradient* von f bei x.

Beachten Sie: Genau wie in der Analysis I $f'(x)$ eine Zahl und f' eine Funktion ist, ist hier $(\operatorname{grad} f)(x)$ ein Vektor und $\operatorname{grad} f$ eine vektorwertige Abbildung.

Wir haben diesen Vektor platzsparend als Zeilenvektor geschrieben; gelegentlich werden wir ihn auch als Spaltenvektor behandeln (wie x einer ist); mehr zu diesem delikaten Punkt später, siehe die Bemerkung vor Satz IX.2.2.

Beispiele IX.1.3 (a) Im einführenden Beispiel ist

$$(\operatorname{grad} f)(x) = (e^{2x_2}\cos(x_1 + x_2), e^{2x_2}(2\sin(x_1 + x_2) + \cos(x_1 + x_2))).$$

(b) Sei $r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r(x) = \|x\|$. Wir zeigen, dass r an jeder Stelle $x \neq 0$ partiell differenzierbar ist. Um $D_1 r$ zu diskutieren, schreiben wir $x = (x_1, y)$ mit $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{r(x + he_1) - r(x)}{h} &= \frac{r(x_1 + h, y) - r(x_1, y)}{h} \\ &= \frac{\sqrt{(x_1 + h)^2 + \|y\|^2} - \sqrt{x_1^2 + \|y\|^2}}{h}.\end{aligned}$$

Den Grenzwert für $h \to 0$ zu bestimmen bedeutet also, die Ableitung der Hilfsfunktion $\phi\colon \xi \mapsto \sqrt{\xi^2 + \|y\|^2}$ bei x_1 zu bestimmen. Diese Funktion ist bei x_1 differenzierbar, wenn $\|y\| \neq 0$ ist bzw. wenn $x_1 \neq 0$ ist im Fall $\|y\| = 0$, und die Ableitung ist

$$\phi'(x_1) = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + \|y\|^2}} = \frac{x_1}{\|x\|}.$$

Daher haben wir für $x \neq 0$

$$D_1 r(x) = \frac{x_1}{\|x\|}$$

gezeigt. Aus Symmetriegründen ist $D_i r(x) = x_i/\|x\|$ für alle i und deshalb

$$(\operatorname{grad} r)(x) = \frac{x}{\|x\|} \qquad (x \neq 0).$$

(c) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Es ist klar, dass f bei $x \neq 0$ partiell differenzierbar ist mit

$$D_1 f(x_1, x_2) = \frac{x_2(x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^3 - x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

und genauso

$$D_2 f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 - x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Aber die Funktion f ist auch bei $(0,0)$ partiell differenzierbar, denn $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$ für alle x_1 und x_2. Daher ist f auf $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, aber f ist nicht stetig:

$$\lim_{n \to \infty} f(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Die Rechenregeln für die partiellen Ableitungen für Summen und Produkte ergeben sich unmittelbar aus den aus der Analysis I bekannten Regeln, da partielle Ableitungen im Endeffekt Ableitungen von Funktionen einer Veränderlichen sind, also

$$\begin{aligned} D_i(f+g) &= D_i f + D_i g \\ D_i(fg) &= D_i f \cdot g + f \cdot D_i g. \end{aligned}$$

Zur Kettenregel siehe (IX.3.2) und (IX.3.4) in Abschnitt IX.3.

Das letzte Beispiel deutet an, dass die partielle Differenzierbarkeit vielleicht nicht die richtige Verallgemeinerung der eindimensionalen Situation ist (wo Differenzierbarkeit die Stetigkeit impliziert). Deswegen werden wir im nächsten Abschnitt einen stärkeren Differenzierbarkeitsbegriff einführen, der die Eigenschaften des eindimensionalen Begriffs korrekt widerspiegelt.

Die Crux im letzten Beispiel war, dass die partiellen Ableitungen das Verhalten der Funktion auf zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden beschreiben; man darf sich also nicht wundern, dass man entlang anderer Geraden keine Informationen erhält. Daher ist der folgende Satz (der mit Satz IX.2.4 aus dem nächsten Abschnitt verglichen werden sollte) überraschend.

Satz IX.1.4 *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $D_1 f, \dots, D_n f$ seien stetig bei $x \in U$. Dann ist auch f bei x stetig.*

Beweis. Um eine Indexschlacht zu vermeiden, führen wir den Beweis nur im Fall $n = 2$ aus. Sei $x \in U$; wir wollen $|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)|$ für „kleine“ h_1, h_2 abschätzen, um das ε-δ-Kriterium anzuwenden.

Sei $r > 0$ so, dass $Q := [x_1 - r, x_1 + r] \times [x_2 - r, x_2 + r] \subset U$; so ein r existiert, da U offen ist. Da $D_1 f$ und $D_2 f$ stetig bei x sind, kann man r so klein wählen, dass diese partiellen Ableitungen auf Q beschränkt sind; sagen wir

$$|D_1 f(y)| \leq K, \quad |D_2 f(y)| \leq K \qquad \text{für } y \in Q,$$

wo $K > 0$. Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben, setze $\delta = \min\{r, \varepsilon/(2K)\}$. Dann gilt für $\|h\| < \delta$ nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz für ein geeignetes $\vartheta_2 \in (0,1)$

$$|f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)| = |D_2 f(x_1, x_2 + \vartheta_2 h_2) h_2| \leq |h_2| K < \frac{\varepsilon}{2}$$

und für ein geeignetes $\vartheta_1 \in (0,1)$

$$|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2)| = |D_1 f(x_1 + \vartheta_1 h_1, x_2 + h_2) h_1| \leq |h_1| K < \frac{\varepsilon}{2}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} |f(x + h) - f(x)| &\leq |f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2)| \\ &\qquad + |f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für $\|h\| < \delta$. □

Genau wie bei Funktionen auf einem Intervall können wir auch hier die Ableitungsprozedur iterieren. Wenn f partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen $D_1 f, \dots, D_n f$ ist und diese ebenfalls partiell differenzierbar sind, erhält man die partiellen 2. Ableitungen (genauer partielle Ableitungen der Ordnung 2) $D_i(D_jf)$, $i,j=1,\dots,n$. Es ist also $D_i(D_jf)$ die i-te partielle Ableitung von D_jf (genauer die Ableitung von D_jf nach der i-ten Variable), andere Bezeichnungen sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j},\quad f_{x_jx_i},\quad D_iD_jf.$$

Analog können partielle Ableitungen 3. und höherer Ordnung definiert werden. Eine Funktion f heißt *k-mal partiell differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\le k$ existieren, und sie heißt *k-mal stetig partiell differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\le k$ existieren und stetig sind; solch eine Funktion nennt man auch[2] *C^k-Funktionen*.

Es stellt sich sofort die Frage, ob es hier auf die Reihenfolge die Differentiationen ankommt, mit anderen Worten, ob $D_iD_jf=D_jD_if$ ist. Wie das folgende Beispiel zeigt, braucht das nicht der Fall zu sein.

Beispiel IX.1.5 Sei $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1x_2\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } (x_1,x_2)\neq(0,0),\\ 0 & \text{für } (x_1,x_2)=(0,0).\end{cases}$$

Man bestätigt durch scharfes Hinsehen, dass (unterscheide $x_2\neq 0$ und $x_2=0$ bzw. $x_1\neq 0$ und $x_1=0$)

$$D_1f(0,x_2)=-x_2 \quad\text{und}\quad D_2f(x_1,0)=x_1 \qquad \text{für alle } x\in\mathbb{R}^2.$$

Daher ist

$$D_2D_1f(0,0)=-1\neq 1=D_1D_2f(0,0).$$

Wieder kann man positive Resultate unter Stetigkeitsannahmen herleiten.

Satz IX.1.6 (Satz von Schwarz)
Seien $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Es mögen die partiellen Ableitungen D_if, D_jf, $D_{ij}f$ und $D_{ji}f$ existieren und stetig sein. Dann ist $D_iD_jf=D_jD_if$.

Beweis. Für $i=j$ ist nichts zu zeigen, und für $i\neq j$ sind nur zwei nicht eingefrorene Variable im Spiel; daher ist nur der Fall $n=2$, $i=1$, $j=2$ zu bearbeiten. Sei $p\in U$; wir wollen $(D_1D_2f)(p)=(D_2D_1f)(p)$ zeigen; um die Übersicht zu behalten, nehmen wir o.B.d.A. $p=0$ an.

Weil U offen (und $0\in U$) ist, existiert ein $r>0$ mit $(-r,r)\times(-r,r)\subset U$. Für $|x_1|<r$ bzw. $|x_2|<r$ betrachten wir die Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned} F&\colon (-r,r)\to\mathbb{R},\quad s\mapsto f(s,x_2)-f(s,0),\\ G&\colon (-r,r)\to\mathbb{R},\quad t\mapsto f(x_1,t)-f(0,t).\end{aligned}$$

[2] Das C soll an engl. *continuous* oder frz. *continu* erinnern.

Wegen des Mittelwertsatzes existiert ein ξ_1 mit $|\xi_1| < |x_1|$, so dass

$$F(x_1) - F(0) = F'(\xi_1)x_1 = (D_1 f(\xi_1, x_2) - D_1 f(\xi_1, 0))x_1;$$

beachten Sie, dass ξ_1 von x_1 und x_2 abhängt. Nun ist die Funktion $s \mapsto D_1 f(\xi_1, s)$ nach Voraussetzung auf $(-r, r)$ differenzierbar; daher liefert der Mittelwertsatz ein ξ_2 mit $|\xi_2| < |x_2|$, so dass

$$D_1 f(\xi_1, x_2) - D_1 f(\xi_1, 0) = D_2 D_1 f(\xi_1, \xi_2)x_2,$$

also

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(x_1, 0) - f(0, x_2) + f(0, 0) &= F(x_1) - F(0) \\ &= D_2 D_1 f(\xi_1, \xi_2)x_1 x_2. \end{aligned}$$

Nun machen wir eine analoge Überlegung ausgehend von der Hilfsfunktion G. Es existiert ein η_2 mit $|\eta_2| < |x_2|$, so dass

$$G(x_2) - G(0) = G'(\eta_2)x_2 = (D_2 f(x_1, \eta_2) - D_2 f(0, \eta_2))x_2,$$

und weiter ein η_1 mit $|\eta_1| < |x_1|$, so dass

$$D_2 f(x_1, \eta_2) - D_2 f(0, \eta_2) = D_1 D_2 f(\eta_1, \eta_2)x_1,$$

also

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(0, x_2) - f(x_1, 0) + f(0, 0) &= G(x_2) - G(0) \\ &= D_1 D_2 f(\eta_1, \eta_2)x_1 x_2, \end{aligned}$$

und für $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ folgt

$$D_2 D_1 f(\xi_1, \xi_2) = D_1 D_2 f(\eta_1, \eta_2).$$

Mit $(x_1, x_2) \to (0, 0)$ hat man wegen $|\xi_j|, |\eta_j| < |x_j|$ auch $(\xi_1, \xi_2) \to (0, 0)$ und $(\eta_1, \eta_2) \to (0, 0)$, und weil $D_2 D_1 f$ und $D_1 D_2 f$ stetig sind, folgt $D_2 D_1 f(0, 0) = D_1 D_2 f(0, 0)$, wie behauptet. □

Wenn alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung existieren, können wir für jedes $x \in U$ die Matrix

$$(Hf)(x) = (D_i D_j f(x))_{i.j}$$

bilden; nach Satz IX.1.6 ist $(Hf)(x)$ eine symmetrische Matrix, wenn alle zweiten partiellen Ableitungen stetig sind.

Definition IX.1.7 Die Matrix $(Hf)(x)$ heißt die *Hessesche Matrix* von f an der Stelle x.

Beachten Sie:

- $(\operatorname{grad} f)(x)$ ist ein Vektor, $\operatorname{grad} f$ ist eine vektorwertige Abbildung;
- $(Hf)(x)$ ist eine Matrix, Hf ist eine matrixwertige Abbildung.

In der Physik sind folgende Differentialoperatoren nützlich; hier ist wie oben $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

- Ist $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar, bezeichnet man (mit $D_j^2 f = D_j D_j f$)

$$\Delta f(x) := (D_1^2 f)(x) + \cdots + (D_n^2 f)(x);$$

  Δ heißt *Laplace-Operator*. In anderer Schreibweíse ist

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}.$$

- Ist $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{R}^n$-wertige Abbildung (ein „Vektorfeld“) mit partiell differenzierbaren Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_n$, so setzt man

$$(\operatorname{div} F)(x) := D_1 f_1(x) + \cdots + D_n f_n(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x);$$

  $\operatorname{div} F$ wird die *Divergenz* von F genannt. Offenbar ist

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

IX.2 Differenzierbare Funktionen

In der Analysis I wird die Ableitung einer Funktion an der Stelle x durch den Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{IX.2.1}$$

definiert. Da sich dies nicht unmittelbar auf Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ ausdehnen lässt (schließlich kann man nicht durch einen Vektor dividieren), haben wir in Abschnitt IX.1 den pragmatischen Ansatz verfolgt, für eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$ durch Einfrieren von $n-1$ Variablen wieder den Grenzwert (IX.2.1) zugänglich zu machen. Das führte zur partiellen Differenzierbarkeit, die aber nicht alle Aspekte des eindimensionalen Differenzierbarkeitsbegriffs wiedergibt; zum Beispiel impliziert sie nicht die Stetigkeit.

In diesem Abschnitt bauen wir stattdessen auf eine äquivalente Umformung von (IX.2.1), die in Satz IV.1.8 diskutiert wurde, nämlich:

- *Es existieren eine Zahl* $v \in \mathbb{R}$ *und eine Funktion* φ *mit*

$$f(x+h) = f(x) + v \cdot h + \varphi(x) \quad \textit{mit } \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0.$$

Das lässt sich problemlos aufs Mehrdimensionale übertragen (siehe Definition IX.2.1) und liefert die richtige geometrische Interpretation: Wenn man für (betragsmäßig) kleine h den Zuwachs $f(x+h) - f(x)$ durch den linearen Term vh ersetzt, macht man einen Fehler (nämlich $\varphi(h)$), der schneller als linear gegen 0 strebt ($\varphi(h)/|h| \to 0$ für $h \to 0$); mit anderen Worten ist der Fehler von kleinerer Ordnung als die Approximation.

Das ist die Grundlage des „richtigen“ Differenzierbarkeitsbegriffs, den wir in diesem Abschnitt diskutieren.

Definition IX.2.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f bei $x \in U$ *differenzierbar* (manchmal auch *total differenzierbar* genannt), wenn es Zahlen $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ und eine Funktion φ gibt, so dass

$$f(x+h) = f(x) + (v_1h_1 + \cdots + v_nh_n) + \varphi(h)$$

für alle h mit $x + h \in U$ und

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0.$$

f heißt *auf* U *differenzierbar*, wenn f an jeder Stelle $x \in U$ differenzierbar ist.

Da U offen ist, existiert eine Kugel $U(x,r)$ um x, die in U liegt; es reicht dann, solch eine auf $U(x,r)$ definierte Funktion φ wie oben zu finden, da wir letztendlich nur am Grenzwert $h \to 0$ interessiert sind.

Wir werden gleich sehen (vgl. Satz IX.2.3), dass es nur einen Satz von v_i wie in Definition IX.2.1 gibt.

Beachten Sie, dass im Kontext von Funktionen mehrerer Veränderlicher h ein Vektor ist und nicht mehr eine Zahl wie im Abschnitt IX.1.

Die Interpretation ist genauso wie im Eindimensionalen: Der Term $\ell(h) = \sum_{i=1}^n v_ih_i$ definiert eine lineare Abbildung, und approximiert man für normmäßig kleine h den Zuwachs $f(x+h)-f(x)$ durch den linearen Term $\ell(h)$, macht man einen Fehler, der von kleinerer Ordnung als die Approximation ist[3].

Wo nun geklärt ist, was differenzierbar bedeutet, was ist dann die Ableitung? Die Antwort ist: Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion f an der Stelle x ist die lineare Abbildung

$$\ell = \ell_x\colon h \mapsto \sum_{i=1}^n v_ih_i \tag{IX.2.2}$$

[3]Dazu beachte man, dass nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $|\ell(h)| \le \|v\| \cdot \|h\|$, also der Quotient $\ell(h)/\|h\|$ beschränkt ist, während $\varphi(h)/\|h\|$ gegen 0 strebt.

auf $\mathbb{R}^n$. Diese bezeichnen wir mit $(Df)(x)$. Daher ist strenggenommen die Ableitung Df einer differenzierbaren Funktion eine Abbildung von U in den Raum der linearen Abbildungen $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, den Dualraum von $\mathbb{R}^n$.

Die lineare Abbildung $\ell = (Df)(x)$ wird gemäß (IX.2.2) durch den Vektor v mit den Koordinaten $v_1, \dots, v_n$ repräsentiert. Hier gibt es zwei Auffassungen:

- v ist ein Spaltenvektor; dann ist
$$(Df(x))(h) = \sum_{i=1}^{n} v_i h_i = \langle v, h\rangle$$
mit Hilfe des Skalarprodukts darstellbar.
- v ist ein Zeilenvektor bzw. eine $1 \times n$-Matrix; dann ist
$$(Df(x))(h) = \sum_{i=1}^{n} v_i h_i = vh$$
als Matrix-Vektor-Produkt darstellbar.

Aus systematischen Gründen ist die zweite Auffassung die angemessenere (siehe die Bemerkungen nach Satz IX.3.2); jedoch ist die erste einfacher zu handhaben. Wir werden beide Versionen (häufig unkommentiert) nebeneinander verwenden.

Bevor wir den Zusammenhang zwischen totaler und partieller Differenzierbarkeit besprechen, halten wir einen Satz fest.

Satz IX.2.2 *Ist f differenzierbar bei x, so ist f stetig bei x.*

Beweis. Wir schreiben gemäß der Definition mit den dortigen Bezeichnungen
$$f(x+h) - f(x) = \langle v, h\rangle + \varphi(h).$$
Hier ist
$$|\langle v, h\rangle| \le \|v\| \, \|h\| \to 0 \quad \text{mit } h \to 0$$
und
$$|\varphi(h)| = \frac{|\varphi(h)|}{\|h\|} \|h\| \to 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{mit } h \to 0,$$
also $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, was zu zeigen war. □

Wir zeigen jetzt, dass differenzierbare Funktionen partiell differenzierbar sind, und beschreiben den Vektor v aus Definition IX.2.1.

Satz IX.2.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x \in U$. Dann ist f bei x partiell differenzierbar, und es gilt*
$$((Df)(x))(h) = \langle (\operatorname{grad} f)(x), h\rangle,$$
mit anderen Worten
$$f(x+h) = f(x) + \langle (\operatorname{grad} f)(x), h\rangle + \varphi(h) \quad \textit{mit } \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0.$$

Beweis. Setzt man in Definition IX.2.1 $h = te_i$ ein, folgt die Darstellung

$$f(x + te_i) = f(x) + tv_i + \psi(t) \quad \text{mit } \frac{\psi(t)}{|t|} = \frac{\varphi(te_i)}{\|te_i\|} \to 0.$$

Daher (vgl. Satz IV.1.8) existiert die i-te partielle Ableitung von f bei x, und es ist $(D_i f)(x) = v_i$. Das war zu zeigen. □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt leider nicht, da wir in Beispiel IX.1.3(c) eine unstetige partiell differenzierbare Funktion kennengelernt haben. Unter etwas stärkeren Voraussetzungen kann man jedoch ein positives Resultat erzielen. Zur Erinnerung: Eine Funktion heißt stetig partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind; nach Satz IX.1.4 ist dann auch f stetig.

Satz IX.2.4 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Wenn alle partiellen Ableitungen $D_i f$ bei $x \in U$ stetig sind, ist f bei x differenzierbar. Daher sind stetig partiell differenzierbare Funktionen differenzierbar.*

Beweis. Setze

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= f(x+h) - f(x) - \langle (\operatorname{grad} f)(x), h \rangle \\ &= f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^n (D_i f)(x) h_i; \end{aligned}$$

Dann hat $f(x+h)$ definitionsgemäß die in Definition IX.2.1 geforderte Darstellung, und die Crux ist, $\varphi(h)/\|h\| \to 0$ zu zeigen.

Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} x^{(0)} = x,\ x^{(1)} &= x + h_1 e_1, \\ x^{(2)} &= x + h_1 e_1 + h_2 e_2, \\ &\ \vdots \\ x^{(n)} &= x + h_1 e_1 + \cdots + h_n e_n = x + h; \end{aligned}$$

dann ist (Teleskopsumme!)

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^n \bigl(f(x^{(i)}) - f(x^{(i-1)})\bigr)$$

und nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf die Situation, wo alle Variablen bis auf die i-te engefroren sind,

$$f(x^{(i)}) - f(x^{(i-1)}) = f(x^{(i-1)} + h_i e_i) - f(x^{(i-1)}) = D_i f(x^{(i-1)} + \vartheta_i h_i e_i) h_i$$

für ein geeignetes $\vartheta_i \in (0,1)$. Man beachte, dass

$$x^{(i-1)} + \vartheta_i h_i e_i = x + \sum_{j=1}^{i-1} h_j e_j + \vartheta_i h_i e_i \to x$$

mit $h \to 0$. Es folgt

$$\frac{\varphi(h)}{\|h\|} = \sum_{i=1}^{n} \bigl[D_i f(x^{(i-1)} + \vartheta_i h_i e_i) - D_i f(x)\bigr] \frac{h_i}{\|h\|} \to 0,$$

da mit $h \to 0$ wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $D_i f$ der Term in der eckigen Klammer gegen 0 strebt und stets $|h_i|/\|h\| \le 1$ ist. □

Wegen dieses Satzes nennt man stetig partiell differenzierbare Funktionen schlicht *stetig differenzierbar*. Mit der Technik von Beispiel VIII.3.6 sieht man, dass alle Funktionen, die aus den üblichen differenzierbaren Funktionen wie in jenem Beispiel zusammengesetzt sind, stetig differenzierbar sind.

Das folgende Beispiel zeigt, dass auch Satz IX.2.4 nicht umkehrbar ist. Das wissen wir natürlich schon, da es im Fall $n = 1$ ja differenzierbare Funktionen mit unstetiger Ableitung gibt (Beispiel?); das folgende Beispiel ist aber genuin zweidimensional.

Beispiel IX.2.5 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \|x\|^2 \sin \dfrac{1}{\|x\|} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ berechnet man

$$\begin{aligned} (D_1 f)(x) &= 2x_1 \sin \frac{1}{\|x\|} + \|x\|^2 \cos \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\|^{-3} \Bigl(-\frac{1}{2}\Bigr) \cdot 2x_1 \\ &= 2x_1 \sin \frac{1}{\|x\|} - \frac{x_1}{\|x\|} \cos \frac{1}{\|x\|} \end{aligned}$$

sowie

$$(D_1 f)(0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \sin \frac{1}{|t|}}{t} = 0.$$

Analog ist

$$\begin{aligned} (D_2 f)(x) &= 2x_2 \sin \frac{1}{\|x\|} - \frac{x_2}{\|x\|} \cos \frac{1}{\|x\|} \qquad (x \neq 0) \\ (D_2 f)(0) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass die partiellen Ableitungen an jeder Stelle $x \neq 0$ stetig sind, so dass f an jeder Stelle $x \neq 0$ differenzierbar ist. Hingegen sind die partiellen Ableitungen bei $x = 0$ unstetig, da z.B.

$$(D_1 f)(\tfrac{1}{2\pi n}, 0) = -1 \not\to 0.$$

Jedoch ist f auch bei 0 differenzierbar, da

$$\frac{f(0+h) - f(0) - \langle (\operatorname{grad} f)(0), h\rangle}{\|h\|} = \frac{f(h)}{\|h\|} = \|h\| \sin \frac{1}{\|h\|} \to 0.$$

Wir kommen zum Konzept der *Richtungsableitung*, wovon die partiellen Ableitungen ein Spezialfall sind.

Definition IX.2.6 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$. Sei ferner $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\| = 1$. Dann heißt f bei $x \in U$ *in Richtung u differenzierbar*, wenn

$$(D_u f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

existiert.

Beispiel IX.2.7 Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$. Für $\|u\| = 1$ ist

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + tu\| - \|x\|}{t}$$

die Ableitung der Funktion $s \mapsto \sqrt{(x_1 + su_1)^2 + \cdots + (x_n + su_n)^2}$ an der Stelle $s = 0$, das ist nach der Kettenregel aus der Analysis I für $x \neq 0$

$$\frac{2x_1u_1 + \cdots + 2x_nu_n}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{\langle x, u\rangle}{\|x\|},$$

d.h.

$$(D_u f)(x) = \Big\langle \frac{x}{\|x\|}, u \Big\rangle \qquad \text{für } x \neq 0.$$

Dieses Beispiel illustriert den folgenden Satz.

Satz IX.2.8 *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x \in U$. Sei $\|u\| = 1$. Dann existiert die Richtungsableitung $(D_u f)(x)$, und es ist*

$$(D_u f)(x) = \langle (\operatorname{grad} f)(x), u\rangle.$$

Beweis. Es ist

$$f(x + tu) = f(x) + \langle (\operatorname{grad} f)(x), tu\rangle + \varphi(tu) \quad \text{mit } \frac{\varphi(tu)}{|t|} \to 0,$$

also

$$\frac{f(x+tu)-f(x)}{t} - \langle (\operatorname{grad} f)(x), u\rangle \to 0;$$

das war zu zeigen. $\square$

In Satz IX.2.8 ist die partielle Differenzierbarkeit nicht hinreichend, denn Beispiel IX.1.3(c) stellt eine partiell differenzierbare Funktion vor, die in Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ nicht differenzierbar (weil unstetig) ist.

Satz IX.2.8 lässt folgende Interpretation des Gradienten zu. Wenn man die Richtung u sucht, in der die Funktion f ausgehend von $f(x)$ am stärksten wächst, ist $\langle (\operatorname{grad} f)(x), u\rangle$ über alle $\|u\| = 1$ zu maximieren. Diese Größe ist höchstens $\|(\operatorname{grad} f)(x)\| \cdot \|u\| = \|(\operatorname{grad} f)(x)\|$, und tatsächlich ist im Fall $(\operatorname{grad} f)(x) \neq 0$

$$\langle (\operatorname{grad} f)(x), u\rangle \begin{cases} = \|(\operatorname{grad} f)(x)\|, & \text{wenn } u = (\operatorname{grad} f)(x)/\|(\operatorname{grad} f)(x)\| \\ < \|(\operatorname{grad} f)(x)\|, & \text{wenn } u \neq (\operatorname{grad} f)(x)/\|(\operatorname{grad} f)(x)\| \end{cases}$$

(Beweis für Letzteres folgt). Daher ist der steilste Anstieg von f an der Stelle x in der Richtung des Gradienten $(\operatorname{grad} f)(x)$.

Wir haben folgenden Zusatz zur Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz VIII.1.5) verwandt.

Lemma IX.2.9 *Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$ und $x \neq 0$. Dann ist $y = \lambda x$ für ein $\lambda \geq 0$.*

Beweis. Aus der Linearen Algebra übernehmen wir, dass wir y in der Form

$$y = \lambda x + x^\perp \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},\ \langle x, x^\perp\rangle = 0$$

darstellen können; denn $\mathbb{R}^n = \operatorname{lin}\{x\} \oplus (\operatorname{lin}\{x\})^\perp$. Dann ist

$$\|x\|\,\|y\| = \langle x, y\rangle = \lambda\|x\|^2 + \langle x, x^\perp\rangle = \lambda\|x\|^2.$$

Daher ist $\lambda \geq 0$ und ferner $\|y\| = \lambda\|x\|$. Der Satz von Pythagoras liefert

$$\begin{aligned} \lambda^2\|x\|^2 &= \|y\|^2 = \langle y, y\rangle \\ &= \langle \lambda x + x^\perp, \lambda x + x^\perp\rangle \\ &= \lambda^2\|x\|^2 + \|x^\perp\|^2; \end{aligned}$$

es folgt $x^\perp = 0$ und $y = \lambda x$ mit $\lambda \geq 0$. (Wo ging im Beweis die Voraussetzung $x \neq 0$ ein?) $\square$

IX.3 Differenzierbare Abbildungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Abbildungen von einer offenen Menge im $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. (Wie schon an anderer Stelle gesagt, ist die Vokabel *Funktionen* häufig für den Fall $m = 1$ reserviert.) Gewitzt durch die Diskussion im letzten Abschnitt treffen wir folgende Definition.

Definition IX.3.1 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Dann heißt f *differenzierbar* bei $x \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine in einer hinreichend kleinen Kugel[4] $U(0,r)$ definierte Abbildung $\varphi\colon U(0,r) \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass für $h \in U(0,r)$

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + \varphi(h) \quad \text{mit } \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0.$$

Ist f an jeder Stelle differenzierbar, heißt f *auf U differenzierbar.*

Wir werden sofort sehen, dass solch eine lineare Abbildung L eindeutig bestimmt ist, und werden L durch eine Matrix beschreiben.

Indem man die Koordinatenfunktionen f_i von f und ℓ_i von L betrachtet, erhält man sofort:

Satz IX.3.2 *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Dann ist f bei $x \in U$ genau dann differenzierbar, wenn alle f_i bei x differenzierbar sind.*

Dieser Satz hilft, die in Definition IX.3.1 vorkommende lineare Abbildung zu beschreiben. Sei f bei x differenzierbar und somit alle f_i auch. Wir wissen aus Abschnitt IX.2, dass die Koordinatenfunktionen f_i partiell differenzierbar sind mit

$$f_i(x+h) = f_i(x) + (\operatorname{grad} f_i)(x) \cdot h + \varphi_i(x), \quad \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_i(h)}{\|h\|} = 0.$$

In dieser Zeile sollte man sich $(\operatorname{grad} f_i)(x)$ als Zeilenvektor bzw. $1 \times n$-Matrix vorstellen. Die i-te Komponente von L aus Definition IX.3.1 ist dann

$$L_i(h) = (\operatorname{grad} f_i)(x) \cdot h.$$

Das zeigt zweierlei: Zum einen ist L gemäß Definition IX.3.1 eindeutig bestimmt, zum anderen wird L (bezüglich der Einheitsvektorbasen) durch diejenige $m \times n$-Matrix dargestellt, deren Zeilen die Gradienten $(\operatorname{grad} f_i)(x)$ sind. Diese Matrix heißt *Jacobi-Matrix* von f bei x:

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} (\operatorname{grad} f_1)(x) \\ \vdots \\ (\operatorname{grad} f_m)(x) \end{pmatrix}.$$

[4] Es reicht, r so zu wählen, dass $U(x,r) \subset U$.

Im Fall $n = 1$, wo f die reellwertigen Koordinatenfunktionen $f_i\colon \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$ hat, bekommt man die Spalte

$$f'(x) := J_f(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}. \tag{IX.3.1}$$

Die Rolle der Ableitung von f bei x übernimmt die Abbildung $L =: (Df)(x)$, wenn man koordinatenfrei denkt, und die Jacobi-Matrix $J_f(x)$, wenn man in Koordinaten denkt. In dieser Version verlangt die Definition der Differenzierbarkeit also

$$f(x+h) = f(x) + (J_f(x))h + \varphi(h) \quad \text{mit } \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0.$$

Beispiele IX.3.3 (a) Als erstes Beispiel betrachten wir eine lineare Abbildung $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Die Linearität impliziert

$$\Lambda(x+h) = \Lambda(x) + \Lambda(h) + 0,$$

d.h., es gilt eine Darstellung gemäß Definition IX.3.1 mit $L = \Lambda$ (unabhängig von x) und $\varphi = 0$. Λ ist daher an jeder Stelle differenzierbar mit (konstanter!) Ableitung

$$(D\Lambda)(x) = \Lambda.$$

Stellt man Λ durch eine Matrix A bezüglich der Einheitsvektorbasen dar, d.h. $\Lambda(x) = Ax$, sieht man $J_\Lambda(x) = A$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1x_2^2 + \sin(x_1 - x_2) \\ e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist an jeder Stelle differenzierbar, da die f_i es sind, mit

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} f_1)(x) &= (x_2^2 + \cos(x_1 - x_2), 2x_1x_2 - \cos(x_1 - x_2)), \\ (\operatorname{grad} f_2)(x) &= (e^{x_1 - x_2} - \sin(x_1 + x_2), -e^{x_1 - x_2} - \sin(x_1 + x_2)); \end{aligned}$$

also ist die Jacobi-Matrix

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 + \cos(x_1 - x_2) & 2x_1x_2 - \cos(x_1 - x_2) \\ e^{x_1 - x_2} - \sin(x_1 + x_2) & -e^{x_1 - x_2} - \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

(c) Auf dem 4-dimensionalen Raum der 2×2-Matrizen wollen wir die Abbildung $A \mapsto f(A) = A^2$ betrachten. Dieser Raum kann mit $\mathbb{R}^4$ identifiziert werden, wenn man die Basis aus den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $e_1, \dots, e_4$ identifiziert, also

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4.$$

Wie sieht es mit der Differenzierbarkeit von f aus? Wir schreiben (h ist jetzt eine 2×2-Matrix)

$$f(A+h) = (A+h)^2 = A^2 + Ah + hA + h^2 = f(A) + L(h) + \varphi(h)$$

mit der linearen Abbildung $h \mapsto L(h) = Ah + hA$ (Achtung: die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ!) und $\varphi(h) = h^2$. Zeigen wir $\varphi(h)/\|h\| \to 0$ mit $h \to 0$. (Achtung: $\|h\|$ ist die euklidische Norm, wenn man h als Vektor in $\mathbb{R}^4$ auffasst; im Matrixkontext wird das Hilbert-Schmidt-Norm genannt.) Wir schreiben die Matrix h mit ihren zwei Zeilen bzw. Spalten als

$$h = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (s_1 \ s_2).$$

Dann ist (indem man die Einträge in h^2 als Skalarprodukte interpretiert)

$$\varphi(h) = h^2 = \begin{pmatrix} \langle z_1, s_1 \rangle & \langle z_1, s_2 \rangle \\ \langle z_2, s_1 \rangle & \langle z_2, s_2 \rangle \end{pmatrix}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \|\varphi(h)\|^2 = \|h^2\|^2 &= \langle z_1, s_1 \rangle^2 + \langle z_1, s_2 \rangle^2 + \langle z_2, s_1 \rangle^2 + \langle z_2, s_2 \rangle^2 \\ &\leq \|z_1\|^2 \|s_1\|^2 + \|z_1\|^2 \|s_2\|^2 + \|z_2\|^2 \|s_1\|^2 + \|z_2\|^2 \|s_2\|^2 \\ &= (\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2)(\|s_1\|^2 + \|s_2\|^2) \\ &= \|h\|^2 \|h\|^2 = \|h\|^4. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\left\| \frac{\varphi(h)}{\|h\|} \right\| \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \to 0.$$

Daher ist $\bigl((Df)(A)\bigr)(h) = Ah + hA$. In diesem Beispiel sieht man klarer, wenn man die Ableitung tatsächlich als lineare Abbildung angibt und nicht als Jacobi-Matrix, und man erkennt eine Version des elementaren Beispiels $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ wieder.

(d) Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und wir betrachten $\operatorname{grad} f$ als Spalte (genauer als spaltenwertige Abbildung). Falls alle zweiten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, sind die partiellen Ableitungen $D_i f$ selbst differenzierbar (siehe Satz IX.2.4) und daher (Satz IX.3.2) ist $\operatorname{grad} f$ differenzierbar. Die Jacobi-Matrix von $\operatorname{grad} f$ bei x ist

$$\bigl((D_j D_i f)(x)\bigr)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Das ist die Hessesche Matrix von f; vgl. Definition IX.1.7. Insofern ist $(Hf)(x)$ die zweite Ableitung von f bei x.

Wir kommen zur Kettenregel, die im Kontext der differenzierbaren Abbildungen eine besonders prägnante Gestalt annimmt: Die Jacobi-Matrix eine Komposition ist das Produkt der Jacobi-Matrizen.

Satz IX.3.4 (Kettenregel)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar bei $x_0 \in U$, und gelte $f(U) \subset V$. Sei ferner $g\colon V \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar bei $y_0 := f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ bei x_0 differenzierbar, und für die Jacobi-Matrix gilt

$$J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0))J_f(x_0).$$

Beweis. Der Beweis orientiert sich am eindimensionalen Fall auf Seite 81. Wir schreiben für $x \in U$, $x = x_0 + h$,

$$f(x) = f(x_0) + J_f(x_0)(x - x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \text{mit } \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0$$

und analog für $y \in V$, $y = y_0 + k$,

$$g(y) = g(y_0) + J_g(y_0)(y - y_0) + \psi(y - y_0) \quad \text{mit } \lim_{k\to 0} \frac{\psi(k)}{\|k\|} = 0,$$

In diese Zeile setzen wir $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$ ein:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + J_g(y_0)(f(x) - f(x_0)) + \psi(f(x) - f(x_0)) \\ &= g(f(x_0)) + J_g(y_0)J_f(x_0)h + J_g(y_0)\varphi(h) + \psi(f(x) - f(x_0)), \end{aligned}$$

also

$$(g \circ f)(x_0 + h) = (g \circ f)(x_0) + J_g(y_0)J_f(x_0)h + \chi(h)$$

mit

$$\chi(h) = J_g(y_0)\varphi(h) + \psi(J_f(x_0)h + \varphi(h)).$$

Zum Abschluss des Beweises ist nun $\lim_{h\to 0} \chi(h)/\|h\| = 0$ zu zeigen, und dazu betrachten wir die beiden Summanden separat. Als Vorbereitung erinnern wir an Satz VIII.3.8, wonach für eine lineare Abbildung Λ zwischen (endlichdimensionalen) euklidischen Räumen eine Konstante c mit

$$\|\Lambda(x)\| \le c\|x\| \qquad \text{für alle } x$$

existiert. Diese Bemerkung zeigt für den ersten Summanden

$$\|J_g(y_0)\varphi(h)\| \le c_1\|\varphi(h)\|,$$

also

$$\frac{J_g(y_0)\varphi(h)}{\|h\|} \to 0.$$

Für den zweiten Summanden ist nach dem ε-δ-Kriterium Folgendes zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall 0 < \|h\| < \delta \qquad \|\psi(J_f(x_0)h + \varphi(h))\| < \varepsilon \|h\|$$

Wie im eindimensionalen Fall machen wir eine Vorüberlegung. Zu gegebenem $\varepsilon' > 0$ existiert nach Voraussetzung über ψ ein $\eta > 0$ mit

$$0 < \|k\| < \eta \quad \Rightarrow \quad \|\psi(k)\| < \varepsilon' \|k\|$$

bzw.

$$\|k\| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad \|\psi(k)\| \leq \varepsilon' \|k\|.$$

Nun beobachten wir $\|J_f(x_0)h\| \leq c_2 \|h\|$ (c_2 eine geeignete Konstante) für alle h und $\|\varphi(h)\| \leq \|h\|$ für hinreichende kleine $\|h\|$. Das zeigt

$$\|J_f(x_0)h + \varphi(h)\| \leq (c_2 + 1)\|h\|$$

für solche h; also existiert $\delta > 0$ mit

$$\|J_f(x_0)h + \varphi(h)\| < \eta \qquad \text{für } \|h\| < \delta.$$

Für diese h folgt

$$\|\psi(J_f(x_0)h + \varphi(h))\| \leq \varepsilon' \|J_f(x_0)h + \varphi(h)\| \leq \varepsilon'(c_2 + 1)\|h\|.$$

Um ans Ziel zu gelangen, ist diese Überlegung daher für $\varepsilon' = \varepsilon/(c_2 + 1)$ anzuwenden. □

Die Spezialfälle $l = 1$ und $n = 1$ nehmen die folgende Gestalt an.

- Im Fall $l = 1$ ist (die Gradienten sind Zeilen)

  $$(\operatorname{grad}(g \circ f))(x_0) = \big((\operatorname{grad} g)(f(x_0))\big) J_f(x_0), \tag{IX.3.2}$$

  also hat man für die partiellen Ableitungen

  $$(D_j(g \circ f))(x_0) = \sum_{i=1}^{m} (D_i g)(f(x_0))(D_j f_i)(x_0), \quad j = 1, \ldots, n,$$

  wenn f die Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ hat.

- Im Fall $n = 1$, also $U \subset \mathbb{R}$, ist

  $$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) f'(x_0), \tag{IX.3.3}$$

  wo die Ableitung $f'(x_0)$ wie in IX.3.1 erklärt ist.

- Im Fall $l = 1$, $n = 1$ erhält man

  $$(g \circ f)'(x_0) = \sum_{i=1}^{m} (D_i g)(f(x_0)) f_i'(x_0). \tag{IX.3.4}$$

IX.4 Der Mittelwertsatz, Satz von Taylor und Extremwertaufgaben

Wie im Eindimensionalen sind der Mittelwertsatz und der Taylorsche Satz auch in der mehrdimensionalen Differentialrechnung fundamentale Ergebnisse. Beide können recht einfach auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden. Dabei ist das Hauptproblem beim Satz von Taylor, eine kompakte Notation zu ersinnen[5]; daher werden wir diesen Satz nur für zweimal differenzierbare Funktionen besprechen.

Zurück zum Mittelwertsatz für differenzierbare Funktionen. Wir bezeichnen die Strecke zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\overline{xy} = \{x + t(y - x) \colon 0 \leq t \leq 1\}.$$

Satz IX.4.1 (Mittelwertsatz)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und seien $x, y \in U$ so, dass $\overline{xy} \subset U$. Sei $f \colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann existiert $\xi \in \overline{xy}$ mit

$$f(y) - f(x) = \langle (\operatorname{grad} f)(\xi), y - x \rangle.$$

Beweis. Wir führen die Hilfsfunktion

$$\phi \colon [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad \phi(t) = f(x + t(y - x))$$

ein, die wegen der Voraussetzung $\overline{xy} \subset U$ wohldefiniert ist. Nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz existiert $\tau \in [0, 1]$ mit

$$\phi'(\tau) = \phi(1) - \phi(0) = f(y) - f(x).$$

Nach der Kettenregel mit der inneren Abbildung $t \mapsto x + t(y - x)$ ist (vgl. (IX.3.4))

$$\phi'(\tau) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x+\tau(y-x))(y_i - x_i) = \langle (\operatorname{grad} f)(x+\tau(y-x)), y-x \rangle; \quad \text{(IX.4.1)}$$

setze also $\xi = x + \tau(y - x)$. □

Korollar IX.4.2 *Gelte zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz IX.4.1 die Abschätzung*

$$\|(\operatorname{grad} f)(z)\| \leq K$$

mit einer Konstanten K und für alle $z \in \overline{xy}$. Dann ist

$$|f(y) - f(x)| \leq K \|y - x\|.$$

[5] Das gelingt mit der Multiindexschreibweise, siehe z.B. Forster, Band 2.

Beweis. Das folgt sofort aus Satz IX.4.1 und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. □

Solch ein K gibt es, wenn f stetig differenzierbar ist.

Die Aussage von Satz IX.4.1 lässt sich nicht auf differenzierbare *Abbildungen* ausdehnen, nicht einmal für $n = 1$. Ist z.B. $f(x) = (\cos x, \sin x)$, so ist $f(0) = f(2\pi)$, aber es gibt kein $\xi \in [0, 2\pi]$ mit $2\pi f'(\xi) = f(2\pi) - f(0) = (0, 0)$, denn stets ist $\|f'(\xi)\| = \|(-\sin\xi, \cos\xi)\| = 1$.

Hingegen gestattet Korollar IX.4.2 sehr wohl eine vektorwertige Verallgemeinerung.

Satz IX.4.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und seien $x, y \in U$ so, dass $\overline{xy} \subset U$. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Für die Koordinatenfunktionen f_i mögen Abschätzungen der Form*

$$\|(\operatorname{grad} f_i)(z)\| \le K_i$$

mit Konstanten K_i und für alle $z \in \overline{xy}$ gelten. Dann ist mit $K = (K_1^2 + \cdots + K_m^2)^{1/2}$

$$\|f(y) - f(x)\| \le K\|y - x\|.$$

Beweis. Aus Korollar IX.4.2 wissen wir

$$|f_i(y) - f_i(x)| \le K_i\|y - x\|.$$

Es folgt

$$\|f(y) - f(x)\| \le (K_1^2 + \cdots + K_m^2)^{1/2}\|y - x\| = K\|y - x\|;$$

das war zu zeigen. □

Wenn man sich mit dem Begriff der Matrixnorm $\|A\|_{\mathrm{op}}$ einer Matrix A auskennt, kann man den Satz auch mit der besseren Konstante

$$K = \sup_{z \in \overline{xy}} \|J_f(z)\|_{\mathrm{op}}$$

beweisen (siehe z.B. Forster, Band 2).

Nun zum Satz von Taylor, der wie gesagt nur für die Differenzierbarkeitsordnung 2 besprochen werden soll. Es seien wieder $U \subset \mathbb{R}^n$ offen sowie $x, y \in U$ mit $\overline{xy} \subset U$. Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so dass insbesondere stets $D_iD_jf = D_jD_if$ gilt (Satz IX.1.6). Wie beim Mittelwertsatz betrachten wir die Hilfsfunktion

$$\phi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad \phi(t) = f(x + t(y - x)).$$

Wir haben die Ableitung von ϕ bereits berechnet, nämlich

$$\phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} (D_if)(x + t(y - x))(y_i - x_i) = \langle(\operatorname{grad} f)(x + t(y - x)), y - x\rangle;$$

vgl. (IX.4.1). Analog gilt, da die $D_i f$ ihrerseits differenzierbar sind (Satz IX.2.3)

$$\frac{d}{dt}(D_i f)(x + t(y - x)) = \sum_{j=1}^{n}(D_j D_i f)(x + t(y - x))(y_j - x_j),$$

also

$$\phi''(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(D_j D_i f)(x + t(y - x)(y_j - x_j)(y_i - x_i). \tag{IX.4.2}$$

Mit Hilfe der Hesseschen Matrix aus Definition IX.1.7, die wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen symmetrisch ist, kann dieser Term in der Form

$$\phi''(t) = \langle (Hf)(x + t(y - x))(y - x), y - x\rangle \tag{IX.4.3}$$

wiedergegeben werden.

Wendet man den eindimensionalen Satz von Taylor auf ϕ an, erhält man ein $\tau \in [0, 1]$ mit

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(\tau).$$

Damit erhalten wir den folgenden Satz.

Satz IX.4.4 (Satz von Taylor)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und seien $x, y \in U$ so, dass $\overline{xy} \subset U$. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann existiert $\xi \in \overline{xy}$ mit

$$f(y) = f(x) + \langle (\operatorname{grad} f)(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle ((Hf)(\xi))(y - x), y - x\rangle.$$

Man vergleiche das folgende Korollar mit Satz IV.2.10.

Korollar IX.4.5 *Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$f(x+h) = f(x)+\langle (\operatorname{grad} f)(x), h\rangle+\frac{1}{2}\langle ((Hf)(x))h, h\rangle+\frac{1}{2}\psi(h) \quad \textit{mit} \ \lim_{h\to 0}\frac{\psi(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

Beweis. Nach der Taylorformel hat $\psi(h)$ mit einem geeigneten $\tau \in (0, 1)$ die Gestalt

$$\Big\langle \big[(Hf)(x+\tau h) - (Hf)(x)\big]h, h\Big\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(D_j D_i f)(x+\tau h) - (D_j D_i f)(x)]h_j h_i,$$

siehe (IX.4.2). Sei $\varepsilon > 0$; wir benutzen diese Darstellung, um ein $\delta > 0$ mit

$$|\psi(h)| \le \varepsilon\|h\|^2 \qquad \text{für } \|h\| < \delta \tag{IX.4.4}$$

zu produzieren. Dazu betrachten wir als Hilfsgröße ein $\varepsilon' > 0$. Da die $D_j D_i f$ stetig bei f sind, existieren $\delta_{ij} > 0$ mit

$$|(D_j D_i f)(x + \tau h) - (D_j D_i f)(x)| < \varepsilon' \qquad \text{für } \|h\| < \delta_{ij}.$$

Setzt man $\delta = \min_{i,j} \delta_{ij}$, so folgt für $\|h\| < \delta$

$$|\psi(h)| \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon' |h_j|\,|h_i| = \varepsilon' \Bigl(\sum_{i=1}^{n} |h_i| \Bigr)^2 \leq \varepsilon' \|h\|^2 n,$$

denn die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung zeigt

$$\sum_{i=1}^{n} |h_i| = \sum_{i=1}^{n} |h_i| \cdot 1 \leq \|h\|\,\|(1, \dots, 1)\| = \|h\| \sqrt{n}.$$

Wendet man diese Überlegung mit $\varepsilon' = \varepsilon / n$ an, erhält man (IX.4.4). □

Wir haben jetzt das Rüstzeug beisammen, um Extremwertaufgaben für Funktionen mehrerer Veränderlicher zu lösen. Zuerst ist zu klären, worüber wir hier sprechen.

Definition IX.4.6 Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann liegt bei $x_0 \in D$ ein *lokales Maximum* vor, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$x \in D,\ \|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Es liegt ein *striktes lokales Maximum* vor, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$x \in D,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_0).$$

Analog werden (strikte) lokale Minima erklärt, und Extremum ist der Oberbegriff für Maximum und Minimum.

In der Analysis I wird für (differenzierbare) Funktionen auf einem offenen Intervall gezeigt, dass $f'(x_0) = 0$ notwendig und $f'(x_0) = 0$ & $f''(x_0) > 0$ hinreichend für das Vorliegen eines Minimums ist. Wir werden sehen, dass im Mehrdimensionalen analoge Sätze gelten. Zuerst die notwendige Bedingung.

Satz IX.4.7 *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Wenn f bei $x_0 \in U$ ein lokales Extremum besitzt, gilt* $(\operatorname{grad} f)(x_0) = 0$.

Beweis. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist die Funkiton

$$\phi_j\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}, \quad \phi_j(t) = f(x_0 + t e_j)$$

auf einem hinreichend kleinen Intervall erklärt, denn U ist offen. Besitzt f bei x_0 ein lokales Extremum, gilt dasselbe für ϕ_j bei 0; also ist $\phi_j'(0) = 0$. Es ist aber $\phi_j'(0) = (D_j f)(x_0)$ nach Definition der partiellen Ableitung. Das zeigt $(D_j f)(x_0) = 0$, und da j beliebig war, $(\operatorname{grad} f)(x_0) = 0$. $\square$

Wie das Beispiel $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ zeigt, ist die Bedingung des obigen Satzes nicht hinreichend; man nennt ein x_0 mit $(\operatorname{grad} f)(x_0) = 0$ einen *kritischen Punkt* von f.

Nun zur hinreichenden Bedingung. Hier ist erst einmal zu übersetzen, wer die Rolle von $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$ einnimmt. Ersteres ist natürlich $(\operatorname{grad} f)(x_0)$, und der Satz von Taylor suggeriert, dass die Hessesche Matrix $(Hf)(x_0)$ als 2. Ableitung anzusehen ist. Aber was könnte bedeuten, dass eine Matrix „> 0" ist? Hier machen wir eine Anleihe in der Linearen Algebra; dort heißt eine symmetrische $n \times n$-Matrix A *positiv definit*, wenn

$$\langle Ax, x \rangle > 0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0.$$

In der Linearen Algebra lernt man, dass das dazu äquivalent ist, dass sämtliche Eigenwerte der symmetrischen Matrix A positiv (also > 0) sind.

Analog heißt A negativ definit, wenn

$$\langle Ax, x \rangle < 0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0.$$

Nun können wir unsere hinreichende Bedingung formulieren.

Satz IX.4.8 *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Es gelte $(\operatorname{grad} f)(x_0) = 0$ an einer Stelle $x_0 \in U$, und die Hessesche Matrix $(Hf)(x_0)$ sei positiv definit. Dann liegt bei x_0 ein striktes lokales Minimum vor.*

Ein analoger Satz gilt für Maxima und negativ definite Hessesche Matrizen.

Beweis. Wir schreiben zur Abkürzung $A = (Hf)(x_0)$; das ist nach Satz IX.1.6 eine symmetrische Matrix. Gemäß Korollar IX.4.5 können wir schreiben

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2}\langle Ah, h \rangle + \frac{1}{2}\psi(h) \quad \text{mit } \lim_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

Wir zeigen für ein passendes $\delta > 0$

$$0 < \|h\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \langle Ah, h \rangle + \psi(h) > 0.$$

Dazu betrachten wir die Funktion ($X := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$)

$$a\colon X \to \mathbb{R}, \quad a(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

Nach Voraussetzung über A ist stets $a(x) > 0$. Ferner hat a die Gestalt $a(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, ist also stetig. Zum dritten ist $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt (die Abgeschlossenheit sieht man am schnellsten an der Darstellung $X = N^{-1}(\{1\})$ mit der stetigen Funktion $N\colon x \mapsto \|x\|$); daher nimmt a auf X ein Minimum an, sagen wir bei $x_{\min}$. Es folgt $a(x) \geq a(x_{\min}) > 0$ für $x \in X$ und deshalb (mit $\eta = a(x_{\min})$)

$$\langle Ah, h\rangle = \Big\langle A\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\Big\rangle \|h\|^2 \geq \eta\|h\|^2$$

für $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$. Wegen der Grenzwertbedingung an ψ existiert $\delta > 0$ mit

$$|\psi(h)| \leq \frac{\eta}{2}\|h\|^2 \qquad \text{für } \|h\| < \delta.$$

Für solche h ist dann

$$\langle Ah, h\rangle + \psi(h) \geq \eta\|h\|^2 - \frac{\eta}{2}\|h\|^2 = \frac{\eta}{2}\|h\|^2 > 0 \qquad \text{für } h \neq 0.$$

Das war zu zeigen. □

Dass eine Matrix positiv definit ist, ist nicht immer unmittelbar zu erkennen. Jedoch gibt es im Fall $n = 2$ ein sehr einfaches Kriterium dafür,

Lemma IX.4.9 *Eine symmetrische* 2×2*-Matrix* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ *ist genau dann positiv definit, wenn* $a > 0$ *und* $\det A = ad - b^2 > 0$ *sind; sie ist genau dann negativ definit, wenn* $a < 0$ *und* $\det A > 0$ *sind.*

Beweis. Der Beweis basiert auf Methoden der Linearen Algebra. Wie bereits erwähnt ist A genau dann positiv definit, wenn beide Eigenwerte positiv sind. Diese sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h. die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2) = 0,$$

also

$$\lambda_\pm = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\Big(\frac{a+d}{2}\Big)^2 - \det A}\ .$$

Ist nun $a > 0$ und $\det A > 0$, so folgt $d > 0$ und weiter $\frac{1}{2}(a+d) > 0$. Daraus ergibt sich $\lambda_+ \geq \lambda_- > 0$. Ist umgekehrt A positiv definit, so ist $a = \langle Ae_1, e_1\rangle > 0$ und weiter $\det A > 0$, denn die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte.

Die Aussage über negativ definite Matrizen ergibt sich, indem man von A zu $-A$ übergeht. □

Für Funktionen auf einem Intervall können wir aus $f''(x_0) = 0$ keine weiteren Schlüsse auf das Vorliegen eines Extremums und seinen Charakter machen. Für $n \geq 2$ gibt es jedoch noch folgendes Ausschlusskriterium.

Eine symmetrische $n \times n$-Matrix A heißt *indefinit*, wenn es ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle Av, v\rangle < 0$ und ein $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle Aw, w\rangle > 0$ gibt. Das passiert genau dann, wenn A sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert besitzt; im Fall $n = 2$ ist das zu $\det A < 0$ äquivalent.

Satz IX.4.10 *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Es gelte* $(\operatorname{grad} f)(x_0) = 0$ *an einer Stelle $x_0 \in U$, und die Hessesche Matrix $(Hf)(x_0)$ sei indefinit. Dann liegt bei x_0 kein lokales Extremum vor.*

Beweis. Sei $A = (Hf)(x_0)$, und seien v und w mit $\langle Av, v\rangle < 0$ bzw. $\langle Aw, w\rangle > 0$. In einer Umgebung von 0 sind ϕ_v, ϕ_w mit

$$\phi_v(t) = f(x_0 + tv), \quad \phi_w(t) = f(x_0 + tw)$$

wohldefiniert und zweimal differenzierbar. (IX.4.3) liefert

$$\begin{aligned} \phi_v''(t) &= \langle (Hf)(x_0 + tv)v, v\rangle \quad \text{und} \quad \phi_v''(0) < 0, \\ \phi_w''(t) &= \langle (Hf)(x_0 + tw)w, w\rangle \quad \text{und} \quad \phi_w''(0) > 0. \end{aligned}$$

Also hat ϕ_v bei 0 ein striktes lokales Maximum, und ϕ_w hat bei 0 ein striktes lokales Minimum; daher liegt bei x_0 kein lokales Extremum von f vor. □

Das typische Beispiel einer Funktion mit dem in Satz IX.4.10 beschriebenen Verhalten (man spricht von einem *Sattelpunkt*) ist $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ bei $(0, 0)$ (betrachte $v = (-1, 1)$ und $w = (1, 1)$).

Beispiel IX.4.11 Als Beispiel betrachten wir die Aufgabe, die Extremalstellen für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$$

zu finden. Zunächst bestimmen wir die kritischen Punkte, also die Nullstellen von $\operatorname{grad} f$. Da $(D_1 f)(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_2$, $(D_2 f)(x_1, x_2) = 3x_2^2 - 3x_1$, führt das auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - 3x_2 &= 0, \\ 3x_2^2 - 3x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Indem man $x_1 = x_2^2$ aus der zweiten Gleichung in die erste einsetzt, ergibt sich

$$x_2^4 - x_2 = x_2(x_2^3 - 1) = 0$$

mit den Lösungen $x_2^{(1)} = 1$ und $x_2^{(2)} = 0$ und den zugehörigen x_1-Werten $x_1^{(1)} = 1$ und $x_1^{(2)} = 0$. Die Hessesche Matrix von f ist

$$(Hf)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{pmatrix},$$

also

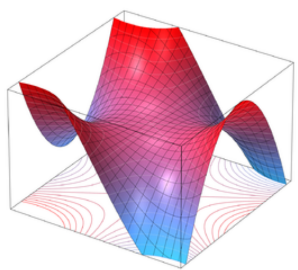
$$(Hf)(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad (Hf)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der ersten Matrix ist 27, die der zweiten -9; daher ist die erste Matrix positiv definit (Lemma IX.4.9) und die zweite indefinit. Bei $(1, 1)$ hat f ein striktes lokales Minimum und bei $(0, 0)$ einen Sattelpunkt.

Ist Hf an einer kritischen Stelle x_0 nur positiv semidefinit (es ist also stets $\langle Ax, x\rangle \geq 0$), kann man keine allgemeingültigen Aussagen treffen: Für die Funktionen $f_k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2, \quad f_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$$

ist jeweils $(\operatorname{grad} f_k)(0,0) = (0,0)$, $(Hf_k)(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, aber im Nullpunkt hat f_1 ein striktes lokales Minimum, f_2 hat ein lokales Minimum, das nicht strikt ist, und f_3 hat weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum. Ein etwas exotischeres Beispiel für eine Funktion mit semidefiniter Hessescher Matrix ist $f(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 - 3x_2^2)$, der „Affensattel“.



Mit etwas Fantasie sieht man einen Sattel mit drei Senken, zwei für die Beine und einen für den Schwanz des Affen. Das rechte Bild zeigt die Halle bei der Wasserquelle im Park Sarzhyn Yar in Kharkiv (Ukraine); die dritte Senke ist auf der Rückseite und nur zu erahnen[6].

IX.5 Der Satz über implizite Funktionen

Wir betrachten folgende Aufgabe:

> Gegeben sei eine Funktion von zwei Veränderlichen, die in diesem Abschnitt mit x und y bezeichnet werden sollen. Gelte $F(x_0, y_0) = 0$. Löse dann die Gleichung $F(x, y) = 0$ nach y auf, so dass y in einer Umgebung von x_0 eindeutig als eine Funktion von x geschrieben werden kann.

Selbst bei ganz harmlosen Funktionen können hier Schwierigkeiten auftreten:

- Für $F(x, y) = x^2 + y^2$ ist $(0, 0)$ die einzige Lösung von $F(x, y) = 0$, also gibt es keine Umgebung von $x_0 = 0$, wie in der Aufgabe verlangt.

[6] Bildquellen: Wikipedia, `https://mathcurve.com/surfaces.gb/selle/selle.shtml`, Archiv DW.

- Für $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ und $|x_0| < 1$ gibt es zwei Lösungen in einer Umgebung von x_0, nämlich $y = \sqrt{1-x^2}$ und $y = -\sqrt{1-x^2}$, und man erhält Eindeutigjeit nur, wenn man die zulässigen y-Werte einschränkt (z.B. auf $y < 0$).

- Für $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ und $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ gibt es wieder keine Umgebung von x_0, wie in der Aufgabe verlangt.

- Ist F von der Form $F(x,y) = x - \phi(y)$, so ist nach der Umkehrfunktion von ϕ gefragt, die ja nicht zu existieren braucht.

Den problematischen Fällen ist gemein, dass $(D_2F)(x_0,y_0) = 0$ ist.

Der folgende Satz, der *Satz über implizite Funktionen*, macht eine positive Aussage im Fall $(D_2F)(x_0,y_0) \neq 0$. Wir formulieren und beweisen ihn in der oben beschriebenen Situation, wo x und y reelle Zahlen sind. Eine Ausdehnung auf vektorielle Größen x und y wird am Ende des Abschnitts diskutiert.

Satz IX.5.1 (Satz über implizite Funktionen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, und sei $F\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $(x_0,y_0) \in U$ mit $F(x_0,y_0) = 0$. Es gelte $(D_2F)(x_0,y_0) \neq 0$. Dann existieren $\alpha, \beta > 0$ so, dass $(x_0-\alpha, x_0+\alpha) \times (y_0-\beta, y_0+\beta) \subset U$ und die Gleichung $F(x,y) = 0$ für jedes $x \in (x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ eindeutig in $(y_0-\beta, y_0+\beta)$ lösbar ist, und es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon (x_0-\alpha, x_0+\alpha) \to (y_0-\beta, y_0+\beta)$ so, dass für $(x,y) \in (x_0-\alpha, x_0+\alpha) \times (y_0-\beta, y_0+\beta)$ genau dann $F(x,y) = 0$ gilt, wenn $y = f(x)$ ist.

Eine Kurzfassung der Aussage des Satzes ist, dass man in einer hinreichend kleinen Umgebung von (x_0,y_0) die Gleichung $F(x,y) = 0$ mittels einer stetig differenzierbaren Funktion f eindeutig nach y auflösen kann; diese Funktion ist also implizit durch $F(x, f(x)) = 0$ definiert.

Beweis. Der Beweis des Satzes über implizite Funktionen ist sehr umfangreich und gewiss der längste und schwierigste der gesamten Vorlesung. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

Zunächst können wir o.B.d.A. $(x_0,y_0) = (0,0)$ annehmen, da man sonst statt F die Funktion $(x,y) \mapsto F(x+x_0, y+y_0)$ betrachten kann. Wir beginnen mit einer allgemeinen Beweisskizze. Gesucht ist ja eine Funktion mit $F(x, f(x)) = 0$ für alle x im Definitionsbereich von f, über den wir uns einstweilen ausschweigen. Dieses Problem übersetzen wir in ein *Fixpunktproblem*, nämlich $f(x) - F(x, f(x)) = f(x)$ für alle x, in der Hoffnung, den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können. Nun ist es so, dass unser Originalproblem gleichzeitig für jedes $c \neq 0$ zum Fixpunktproblem $f(x) - cF(x, f(x)) = f(x)$ für alle x äquivalent ist, und eine geschickte Wahl von c wird zum Erfolg führen.

Wir wollen zu einer Funktion g die neue Funktion

$$T_c g\colon x \mapsto g(x) - cF(x, g(x))$$

(bei passendem Definitionsbereich) assoziieren; dazu müssen wir Intervalle I und J mit folgenden Eigenschaften finden:

- Wenn g auf I definiert ist und Werte in J annimmt, ist auch $T_c g$ auf I definiert; d.h. für $x \in I$ ist $(x, g(x)) \in U$.
- Wenn g von I nach J abbildet, also $g\colon I \to J$, bildet auch $T_c g$ von I nach J ab; d.h. T_c wirkt als Selbstabbildung auf der Menge dieser g.
- Wir suchen eine mindestens stetige Funktion als Fixpunkt; daher betrachten wir alle stetigen g von I nach J. Die Menge M dieser g bildet eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raums $(B(I), d_\infty)$ der beschränkten Funktionen auf I.
- Der Operator T_c wirkt auf M als Kontraktion mit einer Kontraktionskonstanten $q < 1$.

Wenn man all das erreichen kann, liefert der Banachsche Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt für T_c, also eine stetige Funktion mit $F(x, f(x)) = 0$ auf I. Es ist dann noch zu argumentieren, dass f sogar stetig differenzierbar ist.

Wir kommen zu den Details dieses Ansatzes. Setze $b = (D_2F)(0,0)$, also $b \neq 0$ nach Voraussetzung. Für $(x, y) \in U$ setze

$$G(x, y) = y - b^{-1}F(x, y),$$

so dass $G(0,0) = 0$ und $(D_2G)(0,0) = 1 - b^{-1}(D_2F)(0,0) = 0$; um das zu erreichen, haben wir den Vorfaktor b^{-1} gewählt. Auch G ist stetig differenzierbar, also existieren $\alpha_1 > 0$ und $\beta > 0$ mit $(x, y) \in U$ für $|x| \leq \alpha_1$, $|y| \leq \beta$ sowie

$$|(D_2G)(x, y)| \leq \frac{1}{2} \qquad \text{für } |x| \leq \alpha_1,\ |y| \leq \beta \tag{IX.5.1}$$

und weiter $0 < \alpha_2 \leq \alpha_1$ mit

$$|G(x, 0)| \leq \frac{1}{2}\beta \qquad \text{für } |x| \leq \alpha_2. \tag{IX.5.2}$$

Wegen des Mittelwertsatzes, angewandt auf $y \mapsto G(x, y)$ bei festem $x \in [-\alpha_1, \alpha_1]$, folgt aus (IX.5.1)

$$|G(x, y) - G(x, \tilde{y})| \leq \frac{1}{2}|y - \tilde{y}| \qquad \text{für } |x| \leq \alpha_1,\ |y|, |\tilde{y}| \leq \beta. \tag{IX.5.3}$$

Setzt man hier $\tilde{y} = 0$ ein, so erhält man wegen (IX.5.2) für $|x| \leq \alpha_2$, $|y| \leq \beta$

$$|G(x, y)| \leq |G(x, y) - G(x, 0)| + |G(x, 0)| \leq \frac{1}{2}|y| + \frac{1}{2}\beta \leq \beta. \tag{IX.5.4}$$

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass für jedes $x \in [-\alpha_2, \alpha_2]$ die Gleichung $F(x,y) = 0$ höchstens eine Lösung $y \in [-\beta, \beta]$ hat. Sind nämlich y und $\tilde{y}$ beides Lösungen in $[-\beta, \beta]$, so folgt

$$\begin{aligned} y &= y - b^{-1}F(x,y) = G(x,y) \\ \tilde{y} &= \tilde{y} - b^{-1}F(x,\tilde{y}) = G(x,\tilde{y}) \end{aligned}$$

und deshalb wegen (IX.5.3)

$$|y - \tilde{y}| = |G(x,y) - G(x,\tilde{y})| \leq \frac{1}{2}|y - \tilde{y}|,$$

was $y = \tilde{y}$ impliziert.

Im dritten Schritt setzen wir

$$M = \{g\colon [-\alpha_2, \alpha_2] \to [-\beta, \beta]\colon\ g \text{ stetig}\}$$

und betrachten auf M die Metrik d_∞ der gleichmäßigen Konvergenz. Nach Korollar VIII.4.10 ist (M, d_∞) ein vollständiger metrischer Raum. Ferner betrachten wir für $g \in M$ die Funktion

$$Tg\colon [-\alpha_2, \alpha_2] \to \mathbb{R}, \quad Tg(x) = G(x, g(x)) = g(x) - b^{-1}F(x, g(x));$$

das wurde in der einleitenden Beweisskizze bereits angekündigt, wir benutzen also die Konstante $c = b^{-1}$.

Wir werden $Tg \in M$ für $g \in M$ zeigen. Dass Tg stetig ist, ist klar (nicht wahr?). Ferner ist für $|x| \leq \alpha_2$

$$|Tg(x)| = |G(x, g(x))| \leq \beta$$

nach (IX.5.4). Damit ist der Operator

$$T\colon M \to M, \quad g \mapsto Tg$$

wohldefiniert auf einem vollständigen metrischen Raum.

Die folgende Abschätzung zeigt, dass T kontraktiv ist mit $q = 1/2$. Für $|x| \leq \alpha_2$ ist nämlich

$$|(Tg_1)(x) - (Tg_2)(x)| = |G(x, g_1(x)) - G(x, g_2(x))| \leq \frac{1}{2}|g_1(x) - g_2(x)|$$

nach (IX.5.3), denn $|g_j(x)| \leq \beta$ nach Definition der g_j. Nimmt man das Supremum über all diese x, bekommt man

$$d_\infty(Tg_1, Tg_2) \leq \frac{1}{2} d_\infty(g_1, g_2),$$

wie behauptet.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz (Satz VIII.3.9) besitzt T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $f \in M$, also existiert eine stetige Funktion f: $[-\alpha_2, \alpha_2] \to [-\beta, \beta]$ mit $Tf = f$, d.h. $F(x, f(x)) = 0$ für alle $|x| \le \alpha_2$. Da das Urbild $f^{-1}((-\beta, \beta))$ wegen der Stetigkeit von f eine offene Umgebung von 0 ist, existiert ein offenes Intervall $(-\alpha_3, \alpha_3) \subset [-\alpha_2, \alpha_2]$, das von f nach $(-\beta, \beta)$ abgebildet wird. An dieser Stelle sind sämtliche Aussagen von Satz IX.5.1 gezeigt mit Ausnahme der stetigen Differenzierbarkeit von f.

Um das zu erreichen, müssen wir den Definitionsbereich $(-\alpha_3, \alpha_3)$ (eventuell) nochmals verkleinern. Es ist $f(0) = 0$, da $y = 0$ die einzige Lösung von $F(0, y) = 0$ in $[-\beta, \beta]$ ist. Ferner ist nach Voraussetzung $x \mapsto (D_2F)(x, f(x))$ stetig, und diese Funktion bildet 0 auf $(D_2F)(0, 0) = b \ne 0$ ab. Es existiert daher ein $0 < \alpha \le \alpha_3$ mit $(D_2F)(x, f(x)) \ne 0$ für $|x| < \alpha$. Wir wollen zeigen, dass f auf $(-\alpha, \alpha)$ differenzierbar ist. Es reicht, das für $x_0 = 0$ zu tun, da jede andere Stelle wie zu Anfang durch Verschieben erreichbar ist.

Dazu setzen wir $a = (D_1F)(0, 0)$ und können gemäß der Differenzierbarkeit von F für $|x| < \alpha$ schreiben

$$0 = F(x, f(x)) = ax + bf(x) + \varphi(x, f(x)) \quad \text{mit } \frac{\varphi(x, f(x))}{\|(x, f(x))\|} \to 0 \text{ für } x \to 0$$

(beachte $\|(x, f(x))\| \to 0$ für $x \to 0$). Das liefert die Darstellung

$$f(x) = -b^{-1}ax - b^{-1}\varphi(x, f(x)). \tag{IX.5.5}$$

Wenn wir $\varphi(x, f(x))/|x| \to 0$ zeigen können, folgt aus dieser Darstellung die Differenzierbarkeit von f bei 0 mit

$$f'(0) = -b^{-1}a = -\big((D_2F)(0, 0)\big)^{-1}(D_1F)(0, 0).$$

Nun ist

$$\frac{\varphi(x, f(x))}{|x|} = \frac{\varphi(x, f(x))}{\|(x, f(x))\|} \frac{\|(x, f(x))\|}{|x|},$$

wo der erste Faktor mit $x \to 0$ gegen 0 strebt. Es bleibt daher, die Beschränktheit des zweiten Faktors in einer Umgebung $(-\delta, \delta)$ von 0 zu begründen; um das zu erreichen, sind ein $\delta > 0$ und eine Konstante K mit

$$|f(x)| \le K|x| \qquad \text{für } |x| < \delta$$

zu produzieren.

Das ist erneut trickreich. Sei $\varepsilon > 0$ einstweilen beliebig (wir werden später ε geschickt wählen). Wir wissen, dass ein $\eta > 0$ existiert mit

$$|\varphi(x, y)| \le \varepsilon\|(x, y)\| \qquad \text{für } \|(x, y)\| < \eta.$$

Da f stetig ist mit $f(0) = 0$, kann man weiterhin ein $0 < \delta < \min\{\alpha, \eta/2\}$ wählen mit

$$|f(x)| < \tfrac{1}{2}\eta \qquad \text{für } |x| < \delta;$$

insbesondere ist für $|x| < \delta$ $(< \frac{1}{2}\eta)$

$$\|(x, f(x))\| \le \sqrt{\delta^2 + \tfrac{1}{4}\eta^2} \le \sqrt{2}\frac{\eta}{2} < \eta,$$

so dass für diese x

$$|\varphi(x, f(x))| \le \varepsilon \|(x, f(x))\| \le \varepsilon(|x| + |f(x)|).$$

Das benutzen wir mit der Wahl $\varepsilon = \frac{1}{2}|b|$ und dem dazu bestimmten $\delta > 0$. Für $|x| < \delta$ liefert dies zusammen mit (IX.5.5)

$$\begin{aligned} |f(x)| \; &\le \; |b^{-1}a|\,|x| + |b^{-1}|\Big(\frac{1}{2}|b|\big(|x| + |f(x)|\big)\Big) \\ &= \Big(|b^{-1}a| + \frac{1}{2}\Big)|x| + \frac{1}{2}|f(x)|, \end{aligned}$$

also nach Umstellen

$$|f(x)| \le (2|b^{-1}a| + 1)|x| \qquad \text{für } |x| < \delta.$$

Diese Ungleichung liefert die Beschränktheit des Quotienten $\|(x, f(x))\|/|x|$ und damit die Existenz von $f'(0)$. Wie oben erwähnt, zeigt das Argument pars pro toto die Existenz von f' auf $(-\alpha, \alpha)$.

Als Letztes bleibt die Stetigkeit von f' zu begründen. Da $F(x, f(x)) = 0$ auf $(-\alpha, \alpha)$, erhält man aus der Kettenregel

$$0 = (D_1F)(x, f(x)) + (D_2F)(x, f(x))f'(x),$$

d.h.

$$f'(x) = -\big((D_2F)(x, f(x))\big)^{-1}(D_1F)(x, f(x)),$$

und an dieser Darstellung kann man die Stetigkeit von f' ablesen. (Man beachte, dass $(D_2F)(x, f(x))$ für $|x| < \alpha$ invertierbar ist – so war α ja definiert.) □

Beispiele IX.5.2 (a) Sei $F(x, y) = y^5 + x^4y^4 + y^3 - x^2 + y$. Dann ist $F(0, 0) = 0$ und $(D_2F)(0, 0) = 1$; also existiert eine stetig differenzierbare Funktion f auf einem Intervall $(-\alpha, \alpha)$, so dass stets $F(x, f(x)) = 0$. Hier ist F ein Polynom von zwei Veränderlichen, und wenn man nach y wie im Satz über implizite Funktionen auflösen kann, erhält man eine sogenannte *algebraische Funktion*. Da das Beispielpolynom vom Grad 5 in y ist, gibt es keine explizite Lösungsformel (wie bei quadratischen oder kubischen Gleichungen).

(b) Das folgende Beispiel zeigt, dass man auf die *stetige* Differenzierbarkeit von F im Allgemeinen nicht verzichten kann. Wir betrachten $F(x, y) = x - \phi(y)$ mit

$$\phi(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y + y^2\sin(\frac{1}{y}) & \text{für } y \ne 0, \\ 0 & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Es ist $F(0,0) = 0$ und $(D_2F)(0,0) = -\frac{1}{2} \neq 0$, und wie eingangs bemerkt, läuft das Auflösen nach y darauf hinaus, die Umkehrfunktion von ϕ zu bestimmen. Es sind alle Voraussetzungen von Satz IX.5.1 erfüllt mit der einen Ausnahme, dass D_2F nicht stetig ist:

$$(D_2F)(0,y) = -\phi'(y) = -\frac{1}{2} - 2y\sin\Bigl(\frac{1}{y}\Bigr) + \cos\Bigl(\frac{1}{y}\Bigr) \qquad (y \neq 0)$$

Hier ist ϕ in keiner Umgebung von 0 umkehrbar, also trifft die Aussage von Satz IX.5.1 nicht zu. Dazu beachte man: In jeder Umgebung von 0 gibt es Stellen mit $\phi'(y) < 0$ und Stellen mit $\phi'(y) > 0$. Da ϕ' an Stellen $y \neq 0$ stetig ist, enthält jede Umgebung von 0 Intervalle, wo $\phi' > 0$ ist, und Intervalle, wo $\phi' < 0$ ist. Auf den Intervallen des ersten Typs ist ϕ streng monoton wachsend, auf denen des zweiten Typs streng monoton fallend. Aber eine umkehrbare stetige Funktion auf einem Intervall ist streng monoton (Beweis?); also gibt es kein Intervall $(-\alpha, \alpha)$, auf dem ϕ umkehrbar ist. (Insbesondere folgt aus $\phi'(0) > 0$ nicht, dass ϕ in einer Umgebung von 0 streng monoton wachsend ist, was man im Fall der stetigen Differenzierbarkeit schließen könnte.)

Zum Schluss ein Blick auf die vektorwertige Version des Satzes über implizite Funktionen. Hier haben wir eine Abbildung auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^{k+m}$ nach $\mathbb{R}^m$ gegeben; wir bezeichnen die Elemente von $\mathbb{R}^{k+m}$ als (x,y) mit $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^m$. In dieser Situation schreiben wir $(D_2F)(x_0,y_0)$ für die Jacobi-Matrix von $y \mapsto F(x_0,y)$ an der Stelle y_0; dies ist eine $m \times m$-Matrix. Mit fast demselben Beweis wie oben zeigt man dann:

Satz IX.5.3 (Satz über implizite Funktionen; allgemeine Version)
Sei $U \subset \mathbb{R}^{k+m}$ offen, und sei $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei $(x_0,y_0) \in U$ mit $F(x_0,y_0) = 0$. Die Matrix $(D_2F)(x_0,y_0) \neq 0$ sei invertierbar. Dann existieren $\alpha, \beta > 0$ so, dass $U(x_0,\alpha) \times U(y_0,\beta) \subset U$ und die Gleichung $F(x,y) = 0$ für jedes $x \in U(x_0,\alpha)$ eindeutig in $U(y_0,\beta)$ lösbar ist, und es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon U(x_0,\alpha) \to U(y_0,\beta)$ so, dass für $(x,y) \in U(x_0,\alpha) \times U(y_0,\beta)$ genau dann $F(x,y) = 0$ gilt, wenn $y = f(x)$ ist.

In diesem Satz kommen die Koordinaten von $z \in \mathbb{R}^{k+m}$ in der richtigen Reihenfolge; die letzten m Stück sind die, nach denen aufgelöst wird. Weiß man nur, dass die Jacobi-Matrix $J_F(z_0)$ maximalen Rang (also Rang m) hat, hat diese Matrix m linear unabhängige Spalten, und permutiert man die Koordinaten von z so, dass die m letzten Spalten von $J_F(z_0)$ linear unabhängig sind, ist man in der Situation von Satz IX.5.3.

In der allgemeinen Situation von Satz IX.5.3 ist das Umkehrproblem interessanter als auf Intervallen, wo für stetige Funktionen Umkehrbarkeit und strenge Monotonie äquivalent sind. Wir können aus Satz IX.5.3 schließen:

Satz IX.5.4 *Es seien $W \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\phi\colon W \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei $y_0 \in W$ mit invertierbarer Jacobi-Matrix $J_\phi(y_0)$. Dann existieren offene*

Umgebungen W_0 von y_0 und V_0 von $x_0 = \phi(y_0)$, so dass ϕ die Menge W_0 bijektiv auf V_0 abbildet und die Umkehrfunktion $f\colon V_0 \to W_0$ stetig differenzierbar ist. Es gilt $J_f(x) = \bigl(J_\phi(f(x))\bigr)^{-1}$ auf V_0.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $F\colon \mathbb{R}^m \times W \to \mathbb{R}^m$, $F(x,y) = x - \phi(y)$. Es ist $F(x_0,y_0) = 0$ sowie $(D_2F)(x_0,y_0) = -J_\phi(y_0)$ invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen finden wir $\alpha, \beta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon U(x_0,\alpha) \to U(y_0,\beta)$ mit $F(x, f(x)) = 0$, d.h.

$$\phi(f(x)) = x \qquad \text{für } x \in U(x_0,\alpha) \tag{IX.5.6}$$

und

$$x \in U(x_0,\alpha),\ y \in U(y_0,\beta),\ x = \phi(y) \quad \Rightarrow \quad y = f(x). \tag{IX.5.7}$$

Setze $W_0 = \phi^{-1}(U(x_0,\alpha)) \cap U(y_0,\beta)$ (hier bezeichnet $\phi^{-1}(\dots)$ natürlich das Urbild unter ϕ und nicht die Umkehrfunktion, die ja noch konstruiert werden muss); da ϕ stetig ist, ist das eine offene Umgebung von y_0 mit $\phi(W_0) \subset U(x_0,\alpha)$. Wir zeigen

$$\phi(W_0) = f^{-1}(W_0). \tag{IX.5.8}$$

Um das einzusehen, sei zunächst $x \in \phi(W_0)$. Dann ist $x = \phi(y)$ für ein $y \in W_0$. Beachte $x \in U(x_0,\alpha)$, $y \in U(y_0,\beta)$, so dass (IX.5.7) in der Tat $y = f(x)$ impliziert, d.h. $x \in f^{-1}(W_0)$. Ist umgekehrt $x \in f^{-1}(W_0)$, also $x \in U(x_0,\alpha)$ und $f(x) \in W_0$, so ist $x = \phi(f(x))$ nach (IX.5.6), also $x \in \phi(W_0)$.

Für die offene Menge $V_0 = f^{-1}(W_0)$ ist nun die Abbildung $\phi\colon W_0 \to V_0$ bijektiv (sie ist surjektiv nach (IX.5.8) und injektiv nach (IX.5.7)); nach (IX.5.6) ist f die Umkehrfunktion.

Die Formel für die Ableitung von f ergibt sich wegen $\phi \circ f = \mathrm{id}$ aus der Kettenregel. □

Korollar IX.5.5 (Satz von der offenen Abbildung)
Sei $\phi\colon W \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar auf der offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^m$. Für alle $y \in W$ sei $J_\phi(y)$ invertierbar. Dann ist $\phi(W)$ offen.

Beweis. Das folgt sofort aus Satz IX.5.4. □

Der Satz über implizite Funktionen gestattet einen Zugang zum Problem der *Extrema mit Nebenbedingungen*. Eine Standardaufgabe der Schulmathematik ist es, unter allen Rechtecken des Umfangs 1 dasjenige mit dem größten Flächeninhalt zu bestimmen. Hat das Rechteck die Seiten x und y, ist also $G(x,y) = xy$ zu maximieren unter der Nebenbedingung, dass $2x + 2y = 1$ ist (und aus geometrischen Gründen $x, y > 0$ sind). Hierzu löst man die Gleichung $2x + 2y = 1$ nach y auf und setzt das in G ein, um so ein traditionelles Extremalproblem zu erhalten.

Dies ist ein Beispiel der folgenden Situation: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, und seien $F, G\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Gesucht ist ein Extremum von G unter der Nebenbedingung $F(x,y) = 0$. Hier möchte man wieder diese Gleichung nach y auflösen und das Resultat in G einsetzen. Die Auflösung von $F(x,y) = 0$ mag explizit unmöglich sein, aber der Satz über implizite Funktionen liefert eine hinreichende Bedingung, wann das zumindest theoretisch möglich ist. Das führt zu folgendem notwendigen Kriterium für das Vorliegen eines Extremums.

Satz IX.5.6 *Es seien $F, G\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$, ferner sei stets $D_2F(x,y) \neq 0$. Es sei $M := \{(x,y) \in U\colon F(x,y) = 0\}$. Die Funktion G besitze relativ zu M bei $(x_0,y_0) \in M$ ein lokales Maximum (d.h. es existiert eine Umgebung V von (x_0,y_0), so dass für alle $(x,y) \in V \cap M$ gilt $G(x,y) \le G(x_0,y_0)$). Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$(\operatorname{grad} G)(x_0,y_0) = \lambda (\operatorname{grad} F)(x_0,y_0).$$

Eine analoge Aussage gilt beim Vorliegen eines Minimums.

Beweis. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren Intervalle I und J um x_0 und y_0 sowie eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon I \to J$ mit $M \cap (I \times J) = \{(x, f(x))\colon x \in I\}$. Daher hat $h\colon I \to \mathbb{R}$, $h(x) = G(x, f(x))$, bei x_0 ein lokales Maximum, und es folgt $h'(x_0) = 0$. Nach der Kettenregel ist bei platzsparender Zeilenschreibweise für den Vektor $\binom{1}{f'(x)}$

$$h'(x) = \langle (\operatorname{grad} G)(x, f(x)), (1, f'(x)) \rangle = D_1G(x, f(x)) + D_2G(x, f(x)) f'(x). \tag{IX.5.9}$$

Da stets $F(x, f(x)) = 0$, ist genauso

$$0 = \langle (\operatorname{grad} F)(x, f(x)), (1, f'(x)) \rangle = D_1F(x, f(x)) + D_2F(x, f(x)) f'(x). \tag{IX.5.10}$$

Wertet man diese Gleichungen bei x_0 aus, erhält man

$$f'(x_0) = -\frac{D_1F(x_0,y_0)}{D_2F(x_0,y_0)}$$

und weiter aus $h'(x_0) = 0$

$$D_1G(x_0,y_0) = D_2G(x_0,y_0) \frac{D_1F(x_0,y_0)}{D_2F(x_0,y_0)}. \tag{IX.5.11}$$

Mit $\lambda = D_2G(x_0,y_0)/D_2F(x_0,y_0)$ folgt daher

$$D_1G(x_0,y_0) = \lambda\, D_1F(x_0,y_0), \qquad D_2G(x_0,y_0) = \lambda\, D_2F(x_0,y_0);$$

Ersteres nach (IX.5.11), Letzteres nach Definition von λ. Das liefert die Behauptung. □

Die Zahl λ wird *Lagrangescher Multiplikator* genannt.

Um Kandidaten (x_0, y_0) für Extrema zu finden, haben wir drei Gleichungen für die drei Unbekannten x_0, y_0, λ zu studieren, nämlich

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} G)(x_0, y_0) &= \lambda(\operatorname{grad} F)(x_0, y_0)\\ F(x_0, y_0) &= 0.\end{aligned}$$

(In der ersten Zeile stehen ja zwei Gleichungen.) Im eingangs genannten Beispiel sind dies die Gleichungen

$$\begin{aligned}y_0 &= \lambda \cdot 2\\ x_0 &= \lambda \cdot 2\\ 2x_0 + 2y_0 &= 1\end{aligned}$$

Man schließt unmittelbar $x_0 = y_0$ und dann $x_0 = y_0 = 1/4$; der einzige Kandidat für das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt ist also das Quadrat.

Um zu verifizieren, ob das wirklich so ist, betrachten wir h'' mit h wie im obigen Beweis. Indem man h', gegeben in (IX.5.9), differenziert und die partiellen Ableitungen von G einsetzt, erhält man bei x_0

$$h''(x_0) = 2f'(x_0) + x_0 f''(x_0) = -2\frac{D_1F(x_0, y_0)}{D_2F(x_0, y_0)} + x_0 f''(x_0) = -2 + \frac{1}{4}f''(x_0).$$

Um $f''(x_0)$ zu berechnen (ohne $F(x, f(x)) = 0$ explizit nach f aufzulösen – das ist ja der Witz bei der Sache!), differenzieren wir (IX.5.10) erneut und setzen die partiellen Ableitungen von F bei x_0 und y_0 ein; das liefert $0 = 2f''(x_0)$ und so $h''(x_0) = -2$. Daher liegt in der Tat ein lokales Maximum vor.

Im Allgemeinen ist es schwieriger nachzuweisen, dass die Kandidaten für Extrema tatsächlich welche sind.

Ausgehend von Satz IX.5.3 kann man eine höherdimensionale Version der Lagrangeschen Multiplikatorregel aufstellen; siehe z.B. Forsters Analysis 2.

IX.6 Iterierte Integrale

Für eine Funktion von zwei Veränderlichen auf einem kompakten Rechteck, sagen wir der Einfachheit halber $f\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, nennt man die (Doppel-) Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) dy \quad \text{bzw.} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx$$

iterierte Integrale. Wir weden in diesem Abschnitt zeigen, dass für stetiges f beide Integrale existieren und übereinstimmen. (In der Analysis III lernt man mit Hilfe der Lebesgueschen Integrationstheorie erheblich allgemeinere Situationen kennen, wo dieser Sachverhalt gilt.)

Hier das erste Lemma.

Lemma IX.6.1 *Sei $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei*

$$F\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy.$$

Dann ist F stetig.

Beweis. Der Schlüssel zum Beweis ist die gleichmäßige Stetigkeit von f; siehe Satz VIII.5.8. Zu $\varepsilon > 0$ existiert also $\delta > 0$ mit

$$(x,y) \in [0,1]^2,\ (x',y') \in [0,1]^2,\ \|(x,y)-(x',y')\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y)-f(x',y')| < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt

$$x, x' \in [0,1],\ y \in [0,1],\ |x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y) - f(x',y)| < \varepsilon.$$

Daher folgt für solche x, x'

$$|F(x) - F(x')| \le \int_0^1 |f(x,y) - f(x',y)|\,dy < \int_0^1 \varepsilon\,dy = \varepsilon.$$

Das war zu zeigen. □

Indem man dieses Lemma auf $(x,y) \mapsto f(y,x)$ anwendet, sieht man, dass auch $y \mapsto \int_0^1 f(x,y)\,dx$ stetig ist.

Nun zu einem weiteren Lemma.

Lemma IX.6.2 *Sei $f\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ so, dass für jedes $x \in [0,1]$ die partielle Funktion $y \mapsto f(x,y)$ stetig ist, und sei*

$$F\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy.$$

Ferner existiere die partielle Ableitung $D_1 f$ und sei stetig. Dann ist F differenzierbar mit der Ableitung

$$F'(x) = \int_0^1 D_1 f(x,y)\,dy.$$

Beweis. Die Funktion F ist wohldefiniert wegen der ersten Voraussetzung über f.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\Bigl|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_0^1 D_1 f(x,y)\,dy\Bigr| \le \varepsilon \qquad \text{für } |h| < \delta.$$

(Beachten Sie, dass $y \mapsto D_1 f(x,y)$ für jedes x integrierbar ist, weil $D_1 f$ als stetig vorausgesetzt war.) Die linke Seite ist stets

$$\le \int_0^1 \Bigl|\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} - D_1 f(x,y)\Bigr|\,dy.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein von x und y abhängiges ξ zwischen x und $x+h$, also $|\xi - x| \le |h|$, mit

$$\Bigl|\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - D_1 f(x,y)\Bigr| = |D_1 f(\xi,y) - D_1 f(x,y)|.$$

Nun benutzen wir die gleichmäßige Stetigkeit von $D_1 f$; es existiert demnach ein $\delta > 0$ mit

$$|D_1 f(x,y) - D_1 f(x',y')| < \varepsilon \qquad \text{für } \|(x,y)-(x',y')\| < \delta,$$

insbesondere ist für $|h| < \delta$, $y \in [0,1]$

$$|D_1 f(\xi,y) - D_1 f(x,y)| < \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich für $|h| < \delta$

$$\Bigl|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_0^1 D_1 f(x,y)\,dy\Bigr| \le \int_0^1 \varepsilon\,dy = \varepsilon;$$

das war zu zeigen. □

Man drückt die Aussage dieses Lemmas auch mit den Worten aus, es könne „unter dem Integral“ abgeleitet werden.

Satz IX.6.3 *Sei $f\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

Beweis. Beide Integrale existieren nach Lemma IX.6.1. Der Trick beim Beweis des Satzes besteht nun darin, die Ableitungen

$$\frac{d}{db}\int_0^b\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{und} \quad \frac{d}{db}\int_0^1\int_0^b f(x,y)\,dx\,dy$$

zu vergleichen.

Setze

$$F_1(b) = \int_0^b\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx, \qquad F_2(b) = \int_0^1\int_0^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

Nach Lemma IX.6.1 ist $x \mapsto \int_0^1 f(x,y)\,dy$ stetig, also erstens F_1 wohldefiniert, und zweitens ist nach dem Hauptsatz F_1 differenzierbar mit der Ableitung

$$F_1'(b) = \int_0^1 f(b,y)\,dy.$$

Aus dem gleichen Grund ist $y \mapsto \int_0^b f(x,y)\,dx$ für jedes b stetig, also $F_2(b)$ stets wohldefiniert. Ferner sei

$$g(b,y) = \int_0^b f(x,y)\,dx;$$

wir wollen Lemma IX.6.2 mit dem Integranden g anwenden. Die Funktion g erfüllt die Voraussetzungen dieses Lemmas; sie ist für jedes b stetig in y (Lemma IX.6.1), und sie ist nach b partiell differenzierbar mit stetiger partieller Ableitung $D_1 g = f$. Nach Lemma IX.6.2 darf man „unter dem Integral" differenzieren, d.h.

$$F_2'(b) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial b}\Big[\int_0^b f(x,y)\,dx\Big]\,dy = \int_0^1 f(b,y)\,dy = F_1'(b).$$

Daher ist $F_1' - F_2' = 0$ und $F_1 - F_2$ eine Konstante. Setzt man hier $b = 0$ ein, sieht man, dass die Konstante $F_1(0) - F_2(0) = 0 - 0 = 0$ ist. Daher ist $F_1 = F_2$. Setzt man $b = 1$ ein, erhält man mit $F_1(1) = F_2(1)$ die Behauptung. □

Die Aussage von Satz IX.6.3 über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist ein Spezialfall des *Satzes von Fubini* aus der Analysis III, in dem allgemeinere Funktionen und auch unbeschränkte Integrationsintervalle zugelassen sind. Wir beobachten jedoch, dass sich Satz IX.6.3 nicht unmittelbar auf uneigentliche Integrale übertragen lässt. Ein Beispiel ist das Integral

$$I = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy.$$

Um das innere Integral auszuwerten, setzen wir für $b \ge 1$

$$J_1 = \int_1^b \frac{1}{x^2+y^2}\,dx, \quad J_2 = \int_1^b \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx.$$

Der Trick ist nun, J_1 mit partieller Integration mit dem künstlichen Faktor 1 auszuwerten (obwohl es explizit bekannt ist, denn $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$):

$$J_1 = \int_1^b \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 1\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_1^b + 2\int_1^b \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx.$$

Das zweite Integral ist

$$\int_1^b \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \int_1^b \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx - y^2\int_1^b \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx = J_1 - y^2 J_2,$$

so dass

$$J_1 = \frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_1^b + 2J_1 - 2y^2 J_2$$

und

$$\int_1^b \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx = \int_1^b \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx - 2y^2 J_2 = J_1 - 2y^2 J_2 = \frac{-x}{x^2 + y^2}\bigg|_1^b .$$

Das liefert

$$\int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1 + y^2} - \frac{b}{b^2 + y^2}\right) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Daher ist

$$I = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{1 + y^2}\,dy = \lim_{b\to\infty} \arctan y\Big|_1^b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Wegen der Symmetrie des Integranden folgt genauso

$$I' = \int_1^\infty\!\!\int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy\,dx = -\frac{\pi}{4} \neq I.$$

Kapitel X

Kurven im $\mathbb{R}^m$

X.1 Kurven und ihre Spuren

Im Gegensatz zur landläufigen Auffassung ist eine Kurve in der Differentialgeometrie eine Abbildung und nicht ihr Bild, wie die folgende Definition erklärt.

Definition X.1.1 Eine Abbildung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ auf einem Intervall heißt eine *Kurve*. Sie heißt stetig, differenzierbar etc., wenn γ diese Eigenschaften hat. Die *Spur* von γ ist die Menge

$$\Gamma = \{\gamma(t)\colon t \in I\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Es interessiert also nicht nur die Spur Γ, sondern auch, wie diese durchlaufen wird.

Wir werden γ mit Hilfe seiner Koordinatenfunktionen platzsparend als Zeile $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ schreiben. Bei ebenen (bzw. räumlichen) Kurven ist auch die Notation $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (bzw. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$) gebräuchlich.

Beispiele X.1.2 (a) Betrachte die Kurven $\gamma^{(j)}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma^{(1)}(t) = (t, 0), \quad \gamma^{(2)}(t) = (t^2, 0), \quad \gamma^{(3)}(t) = (1-t, 0).$$

Alle drei Kurven haben dieselbe Spur $\Gamma = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$; aber sie wird unterschiedlich durchlaufen. Interpretiert man t als Zeit, so ist bei $\gamma^{(1)}$ die Geschwindigkeit konstant, bei $\gamma^{(2)}$ wächst sie an, und bei $\gamma^{(3)}$ wird die Orientierung umgekehrt: Hier wird Γ „von rechts nach links“ durchlaufen.

(b) Im $\mathbb{R}^2$ kann der obere Halbkreis mit Radius r um den Ursprung als Spur von

$$\gamma^{(1)}\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(1)}(t) = (r\cos t, r\sin t)$$

bzw.

$$\gamma^{(2)}\colon [-r,r] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(2)}(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$$

dargestellt werden. Hier ist $\gamma^{(1)}$ differenzierbar, $\gamma^{(2)}$ aber nicht, und $\gamma^{(1)}$ verläuft gegen den Uhrzeigersinn, $\gamma^{(2)}$ jedoch im Uhrzeigersinn.

Der einmal im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufene Vollkreis wird durch

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

oder kurz

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

parametrisiert.

(c) Allgemeiner als beim Halbkreis ist für eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto (t, f(t)) \qquad (t \in I)$$

eine stetige Kurve, deren Spur der Graph von f ist.

(d) Die Kurve

$$t \mapsto (r \cos t, r \sin t, ct) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

beschreibt eine *Schraubenlinie* (Skizze?).

(e) Die Kurve

$$t \mapsto (t^2, t^3) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

heißt *Neilsche Parabel*. Obwohl sie beliebig oft differenzierbar ist, sieht man bei $\gamma(0) = (0, 0)$ eine Spitze in der Spur $\{(x, y)\colon y = \pm\sqrt{x^3}\}$. Das hat damit zu tun, dass hier $\gamma'(0) = (0, 0)$ ist (vgl. Definition X.1.4).

(f) Eine Kurve braucht nicht injektiv zu sein. Bei

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

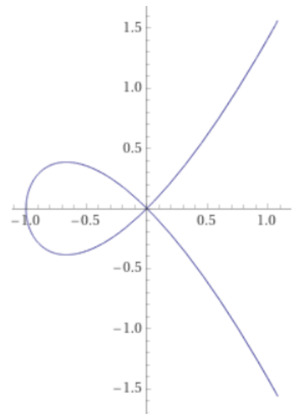
ist $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$; jedoch ist γ auf $[0, 2\pi)$ injektiv. Man spricht von einer *einfach geschlossenen Kurve*.

(g) Ein interessanteres Beipiel einer nicht injektiven Kurve ist

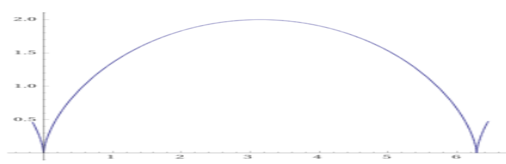
$$t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Hier ist $\gamma(1) = \gamma(-1) = (0, 0)$; man spricht von einem *Doppelpunkt*. Die Spur von γ ist

$$\Gamma = \{(x, y)\colon y^2 = x^2(x + 1) = x^3 + x^2\}.$$



(h) Eine *Zykloide* (genauer ihre Spur) entsteht, wenn ein Kreis (sagen wir vom Radius 1) reibungsfrei auf einer Geraden abrollt; sie beschreibt die Bahn des Auflagepunkts.



Die Zykloide wird durch

$$t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

beschrieben; ein Bogen der Zykloide entspricht dem Parameterbereich $[0, 2\pi]$.

Es sei γ: $I \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Kurve, ferner seien J ein weiteres Intervall und ϕ: $J \to I$ bijektiv und stetig. Dann ist $\gamma \circ \phi$ ebenfalls eine stetige Kurve mit derselben Spur wie γ; sind γ und ϕ differenzierbar bzw. stetig differenzierbar, trifft das auch auf $\gamma \circ \phi$ zu. Als stetige bijektive Funktion auf einem Intervall ist ϕ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend; im ersten Fall erhält $\gamma \circ \phi$ die Orientierung von γ, im zweiten Fall wird sie umgekehrt. Man spricht von ϕ als *Parametertransformation*. Der folgende Fall ist von besonderem Interesse.

Definition X.1.3 Eine bijektive Parametertransformation ϕ: $[\alpha, \beta] \to [a, b]$ heißt C^1-*Parametertransformation*, wenn ϕ und seine Umkehrfunktion ϕ^{-1} stetig differenzierbar sind.

Bei einer C^1-Parametertransformation ϕ ist eine Kurve γ genau dann stetig differenzierbar, wenn es $\gamma \circ \phi$ ist. Außerdem ist für eine C^1-Parametertransformation stets $\phi'(t) \neq 0$, da nach der Kettenregel $1 = \frac{d}{dt}(\phi^{-1} \circ \phi)(t) = (\phi^{-1})'(\phi(t))\phi'(t)$.

Definition X.1.4 Eine stetig differenzierbare Kurve γ heißt *regulär*, wenn stets $\gamma'(t) \neq 0$ ($\in \mathbb{R}^m$) ist. Eine Stelle mit $\gamma'(t) = 0$ heißt *singuläre Stelle* von γ.

Bei einer C^1-Parametertransformation ϕ und einer regulären Kurve γ ist auch $\gamma \circ \phi$ regulär (und umgekehrt). In Beispiel X.1.2(c), dem Kreis, ist γ regulär, denn dort ist stets $\|\gamma'(t)\| = r \neq 0$. Die Neilsche Parabel (Beispiel X.1.2(e)) ist nicht regulär, $t = 0$ ist eine singuläre Stelle.

Manche ebenen Kurven werden am einfachsten in Polarkoordinaten dargestellt. In Satz VI.5.2 haben wir die Polardarstellung einer komplexen Zahl in der Form $z = re^{i\varphi}$ kennengelernt. Übertragen auf die reelle Ebene werden Punkte in $\mathbb{R}^2$ in der Form

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

angegeben; hier ist $r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Für $r \neq 0$ ist φ eindeutig modulo Vielfache von 2π bestimmt (siehe Satz VI.5.2); man nennt r und φ *Polarkoordinaten* von (x,y). In Polarkoordinaten wird eine Kurve durch

$$r = \rho(\varphi) \qquad (\varphi \in I)$$

beschrieben; dem entspricht die Parametrisierung in kartesischen Koordinaten

$$\varphi \mapsto (\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \qquad (\varphi \in I).$$

Beispiele sind ein Vollkreis mit Radius r_0

$$r = \rho(\varphi) = r_0 \qquad (\varphi \in [0, 2\pi])$$

oder die *logarithmische Spirale* ($c \in \mathbb{R}$ eine Konstante)

$$r = \rho(\varphi) = e^{c\varphi} \qquad (\varphi \in \mathbb{R}),$$

die in kartesischen Koordinaten gemäß

$$\varphi \mapsto (e^{c\varphi}\cos\varphi, e^{c\varphi}\sin\varphi) \qquad (\varphi \in \mathbb{R})$$

parametrisiert wird.

X.2 Tangentialvektoren und Bogenlänge

Die Definition des Tangentialvektors an eine differenzierbare Kurve ist kanonisch.

Definition X.2.1 Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Kurve, und sei $t_0 \in I$. Dann heißt $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^m$ der *Tangentialvektor* von γ in t_0. Ist $\gamma'(t_0) \neq 0$, nennt man $\gamma'(t_0)/\|\gamma'(t_0)\|$ den *Tangentialeinheitsvektor*.

Wenn im Fall $m = 2$ die Spur von γ der Graph einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist, ist also $(1, f'(t_0))$ der Tangentialvektor in Übereinstimmung mit der Definition der Ableitung von f.

Wir untersuchen das Verhalten des Tangentialvektors bei einer C^1-Parametertransformation $\phi\colon J \to I$. Ist $\phi(\tau_0) = t_0$, so ist $(\gamma\circ\phi)'(\tau_0) = \gamma'(\phi(\tau_0))\phi'(\tau_0)$ $= \gamma'(t_0)\phi'(\tau_0)$. Wenn ϕ streng monoton wachsend (also orientierungserhaltend) ist, ändert sich die Richtung des Tangentialvektors nicht, höchstens seine Länge. Wenn ϕ streng monoton fallend (also orientierungsumkehrend) ist, wird der Tangentialvektor umgedreht. Das entspricht der dynamischen Vorstellung, dass die Spur von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ bzw von $\gamma(b)$ nach $\gamma(a)$ mit der Geschwindigkeit $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ durchlaufen wird.

Mi Hilfe des Tangentialvektors kann man den Schnittwinkel zweier regulärer Kurven $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ und $\tilde\gamma\colon \tilde I \to \mathbb{R}^m$ angeben. Gelte $\gamma(t_0) = \tilde\gamma(\tilde t_0)$. Das Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$ ist ein Maß für den Winkel α zwischen zwei von 0 verschiedenen Vektoren; dieser Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ ist in der Tat durch die aus der Schulmathematik bekannte Formel $\langle v, w\rangle = \|v\|\,\|w\| \cos\alpha$ *definiert.*

Definition X.2.2 Der Schnittwinkel α zwischen den regulären Kurven $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ und $\tilde\gamma\colon \tilde I \to \mathbb{R}^m$ im Schnittpunkt $\gamma(t_0) = \tilde\gamma(\tilde t_0)$ ist der Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos\alpha = \frac{\langle \gamma'(t_0), \tilde\gamma'(\tilde t_0)\rangle}{\|\gamma'(t_0)\|\,\|\tilde\gamma'(\tilde t_0)\|}.$$

Auf der rechten Seite erkennt man das Skalarprodukt der Tangentialeinheitsvektoren. Bei C^1-Parametertransformationen ϕ bzw. $\tilde\phi$ ändert sich der Schnittwinkel also nicht, wenn beide orientierungserhaltend oder beide orientierungsumkehrend sind, andernfalls wird aus α der Schnittwinkel $\pi - \alpha$ in Übereinstimmung mit der geometrischen Intuition.

In Beispiel X.1.2(g) wurde das Beispiel einer sich selbst durchdringenden Kurve gegeben, nämlich

$$\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

mit $\gamma(1) = \gamma(-1)$. Es ist $\gamma'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$, also $\gamma'(1) = (2, 2)$ und $\gamma'(-1) =$ $(-2, 2)$, welches orthogonale Vektoren sind. Der Schnittwinkel ist demnach $\pi/2$.

Wir kommen zur Bogenlänge. Die Grundidee hierbei ist, für eine Kurve $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$ das Intervall $[a, b]$ mit einer Zerlegung $Z = \{t_0, \dots, t_n\}$, $a =$ $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, in Teilintervalle zu zerlegen, die Länge des Polygonzugs zwischen den Punkten $\gamma(t_j)$ zu berechnen und das Supremum über diese Längen zu nehmen:

$$L(\gamma, Z) = \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|, \qquad L(\gamma) = \sup_Z L(\gamma, Z).$$

(Dieses Supremum kann auch $= \infty$ sein.) Das Supremum wird über alle Zerlegungen genommen; die Anzahl der Teilpunkte ist dabei keiner Beschränkung unterworfen. Wegen der Dreiecksungleichung ist

$$L(\gamma, Z) \le L(\gamma, Z') \qquad \text{für } Z \subset Z'. \tag{X.2.1}$$

Wie in Abschnitt V.1 nennen wir

$$\eta(Z) = \max_{k=1,\dots,n} (t_k - t_{k-1})$$

die *Feinheit* der Zerlegung $Z = \{t_0, \dots, t_n\}$.

Definition X.2.3 Die Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *rektifizierbar*, wenn $L(\gamma) < \infty$. In diesem Fall heißt $L(\gamma)$ die *Bogenlänge* von γ.

Das folgende[1] Beispiel zeigt, dass es stetige Kurven gibt, die nicht rektifizierbar sind; ein positives Resultat folgt in Satz X.2.5.

Beispiel X.2.4 Sei $f\colon [-\frac{1}{\pi}, 0] \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = t \cos \frac{1}{t}$ für $t \neq 0$ bzw. $f(0) = 0$, und sei $\gamma\colon [-\frac{1}{\pi}, 0] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$; die Spur von γ ist also der Graph von f. Betrachte die Zerlegungen $Z_n = \{-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}, \dots, -\frac{1}{n\pi}, 0\}$. Hier ist für $k = 1, \dots, n-1$

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \ge |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \frac{1}{(k+1)\pi} + \frac{1}{k\pi} \ge \frac{1}{k\pi},$$

also $L(\gamma, Z_n) \ge \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi}$ und $L(\gamma) = \infty$.

Satz X.2.5 *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Dann ist γ rektifizierbar mit*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt. \tag{X.2.2}$$

Beweis. Zuerst wird die Rektifizierbarkeit gezeigt. Da γ' stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist, zeigt die Mittelwertungleichung aus Satz IX.4.3 die Existenz einer Konstanten K mit

$$\|\gamma(s) - \gamma(t)\| \le K|s - t| \qquad \text{für alle } s, t \in [a,b].$$

Also ist für eine Zerlegung $Z = \{t_0, \dots, t_n\}$

$$L(\gamma, Z) \le \sum_{k=1}^{n} K(t_k - t_{k-1}) = K(b-a)$$

und deshalb $L(\gamma) \le K(b-a)$.

[1] Ein anderes Beispiel ist die von Kochsche *Schneeflockenkurve* – bitte googeln.

Nun zu (X.2.2). Sei $\varepsilon > 0$. Wir werden eine Zerlegung angeben, so dass

$$\Bigl|\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt - \sum_{k=1}^n \|\gamma'(t_k)\|(t_k - t_{k-1})\Bigr| < \varepsilon, \tag{X.2.3}$$

$$\Bigl|\sum_{k=1}^n \|\gamma'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}) - L(\gamma, Z)\Bigr| < \varepsilon, \tag{X.2.4}$$

$$|L(\gamma, Z) - L(\gamma)| < \varepsilon. \tag{X.2.5}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, ist so die Behauptung gezeigt.

Für die erste dieser Abschätzungen benutzen wir Satz V.1.8 über Riemannsche Summen, genauer die im Anschluss an diesen Satz genannte Verallgemeinerung. Diese impliziert (wie?), dass (X.2.3) gilt, wenn die Feinheit $\eta(Z)$ klein genug ist, sagen wir für $\eta(Z) < \delta_1$.

Für die zweite Abschätzung benutzen wir die gleichmäßige Stetigkeit der Koordinatenfunktionen γ_i' (vgl. Lemma V.1.7 oder Satz VIII.5.8). Diese liefert ein $\delta_2 > 0$ mit[2]

$$|\gamma_i'(s) - \gamma_i'(t)| < \frac{1}{\sqrt{m}}\,\frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{für } |s-t| < \delta_2,\ i = 1, \dots, m.$$

Gelte $\eta(Z) < \delta_2$. Nach dem Mittelwertsatz gilt für geeignete $\xi_{k,i} \in (t_{k-1}, t_k)$

$$\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \gamma_i'(\xi_{k,i})(t_k - t_{k-1}),$$

also

$$\begin{aligned}
|\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) - \gamma_i'(t_k)(t_k - t_{k-1})| &= |\gamma_i'(\xi_{k,i}) - \gamma_i'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) \\
&< \frac{1}{\sqrt{m}}\,\frac{\varepsilon}{b-a}(t_k - t_{k-1}),
\end{aligned}$$

da $\eta(Z) < \delta_2$. Daher ist für solche Z

$$\begin{aligned}
\Bigl|\sum_{k=1}^n \|\gamma'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}) - L(\gamma, Z)\Bigr| &\le \sum_{k=1}^n \bigl|\|\gamma'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}) - \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|\bigr| \\
&\le \sum_{k=1}^n \|\gamma'(t_k)(t_k - t_{k-1}) - (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))\| \\
&< \sum_{k=1}^n \sqrt{m}\frac{1}{\sqrt{m}}\,\frac{\varepsilon}{b-a}(t_k - t_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon;
\end{aligned}$$

[2] Die Wahl des Parameters $\varepsilon/(\sqrt{m}(b-a))$ erklärt sich in der folgenden Rechnung.

im ersten Schritt wurden die Definition von $L(\gamma, Z)$ und die Dreiecksungleichung für den Betrag benutzt, im zweiten die umgekehrte Dreiecksungleichung für die Norm und im dritten die Ungleichung $\|v\| \le \sqrt{m}\max_i |v_i|$ für Vektoren $v \in \mathbb{R}^m$. Das beweist (X.2.4).

Für die dritte Abschätzung wähle zunächst eine Zerlegung Z_0 mit $L(\gamma) - L(\gamma, Z_0) < \varepsilon$. Für jede feinere Zerlegung Z, also $Z_0 \subset Z$, gilt dann ebenfalls $L(\gamma) - L(\gamma, Z) < \varepsilon$, vgl. (X.2.1). Es reicht nun, zu Z_0 noch weitere Punkte hinzuzunehmen, so dass eine Zerlegung Z mit $\eta(Z) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entsteht; für solch ein Z gelten alle drei Abschätzungen von oben. □

Bevor wir zu Beispielen kommen, wollen wir überlegen, dass für eine C^1-Parametertransformation $\phi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ die stetig differenzierbaren Kurven γ und $\gamma\circ\phi$ dieselbe Bogenlänge haben. Das folgt sofort aus der Substitutionsregel, da $(\gamma \circ \phi)'(\tau) = \gamma'(\phi(\tau))\phi'(\tau)$:

$$\int_\alpha^\beta \|(\gamma \circ \phi)'(\tau)\|\, d\tau = \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\phi(\tau))\|\, |\phi'(\tau)|\, d\tau = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt,$$

denn $|\phi'(\tau)| = \phi'(\tau)$, wenn ϕ streng monoton wachsend ist, sowie $|\phi'(\tau)| = -\phi'(\tau)$ und $\phi(\alpha) = b$, $\phi(\beta) = a$, wenn ϕ streng monoton fallend ist.

Korollar X.2.6 *Für eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die Bogenlänge des Graphen*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

Beispiele X.2.7 (a) Der Umfang eines Vollkreises mit Radius r (also $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$), ist

$$\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = 2\pi r,$$

und die Länge eines Kreisbogens zum Winkel α ist

$$\int_0^\alpha \|\gamma'(t)\|\, dt = \alpha r$$

in Übereinstimmung mit der Schulmathematik.

(b) Nach Korollar X.2.6 ist die Länge L des Parabelbogens (t, t^2), $0 \le t \le b$,

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + 4t^2}\, dt.$$

Die Auswertung dieses Integrals ist ziemlich trickreich, zumindest, wenn man – wie in diesem Jahrhundert zu erwarten – noch nie etwas von Hyperbelfunktionen gehört hat. Man substituiert nämlich $2t = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (das ist der sinus hyperbolicus[3], abgekürzt sinh), so dass $1 + 4t^2 = (\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}))^2$ und

$$\int_0^b \sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_0^B \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\frac{e^x + e^{-x}}{4}\,dx$$

mit $\frac{e^B - e^{-B}}{4} = b$. Das letzte Integral ist

$$\frac{1}{8}\int_0^B (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\,dx = \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big)\Big|_0^B = \frac{e^{2B} - e^{-2B}}{16} + \frac{B}{4}.$$

Die Größe $\beta = e^B$ erfüllt nach Definition von B die Gleichung

$$\beta - \frac{1}{\beta} = 4b, \quad \text{d.h. } \beta^2 - 4b\beta - 1 = 0$$

mit der positiven Lösung $\beta = 2b + \sqrt{4b^2+1}$. Nach Erweitern von $1/\beta$ mit $\sqrt{4b^2+1} - 2b$ erhält man $\beta^{-1} = \sqrt{4b^2+1} - 2b$ und so

$$L = \frac{\beta^2 - \beta^{-2}}{16} + \frac{\log\beta}{4} = \frac{1}{4}\Big(2b\sqrt{4b^2+1} + \log\Big(2b + \sqrt{4b^2+1}\Big)\Big).$$

Mit der physikalisch-dynamischen Interpretation, dass ein Teilchen die Spur Γ von γ gemäß dem Ort-Zeit-Gesetz $t \mapsto \gamma(t)$ durchläuft, ist die Aussage von Satz X.2.5 fast selbstverständlich: Der Absolutbetrag der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist $\|\gamma'(t)\|$, und die Integration des Geschwindigkeit-Zeit-Gesetzes liefert den zurückgelegten Weg.

Man kann eine reguläre stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ mit Hilfe der Bogenlänge umparametrisieren. Für eine solche Kurve setze

$$\lambda\colon [a,b] \to [0, L(\gamma)], \quad \lambda(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\,d\tau. \tag{X.2.6}$$

Weil die Kurve regulär ist, ist λ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend; es sei $\sigma\colon [0, L(\gamma)] \to [a,b]$ die Umkehrfunktion von λ. Wenn man mittels σ umparametrisiert, hat $\gamma \circ \sigma$ stets betragsmäßig die Geschwindigkeit 1, denn es ist ja $(\gamma\circ\sigma)'(s) = \gamma'(\sigma(s))\sigma'(s)$ und $\sigma'(s) = 1/\lambda'(\sigma(s))$ sowie $\lambda'(t) = \|\gamma'(t)\|$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, also zusammen

$$\|(\gamma\circ\sigma)'(s)\| = \|\gamma'(\sigma(s))\|\,\frac{1}{\|\gamma'(\sigma(s))\|} = 1.$$

Man sagt, die Kurve sei *nach Bogenlänge umparametrisiert.*

[3]Der cosinus hyperbolicus ist $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; man beachte die Ähnlichkeit zu (VI.4.3) – Merkspruch: Sinus ist minus.

X.3 Die Krümmung ebener Kurven

Krümmung entsteht durch Änderung der Richtung – je schneller die Änderung, um so stärker die Krümmung. Für eine zweimal stetig differenzierbare Kurve γ sollte das Maß der Krümmung (und ihre Richtung – nach links oder rechts) also mit Hilfe der 2. Ableitung γ'' ausgedrückt werden können. Andererseits spielt sicher auch die Geschwindigkeit eine Rolle, zumindest lehrt das die Alltagserfahrung.

Sei nun $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve in der Ebene; es gelte $\gamma'(t) \neq 0$ an einer Stelle $t \in I$. Wir haben in Definition X.2.1 bereits den Tangentialeinheitsvektor

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \in \mathbb{R}^2$$

eingeführt. Durch Drehung um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn ensteht der *Normaleneinheitsvektor* $N(t)$, der mittels der Drehmatrix $D = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ als

$$N(t) = DT(t)$$

geschrieben werden kann. Das Paar $(T(t), N(t))$ wird das *begleitende Zweibein* an der Stelle t genannt.

Für das weitere Vorgehen sei zunächst γ eine zweimal differenzierbare ebene Kurve mit Geschwindigkeit 1, d.h. $\|\gamma'(s)\| = 1$ für alle s. Die Funktion $s \mapsto \|\gamma'(s)\|^2$ ist also konstant und hat daher an jeder Stelle die Ableitung 0. Durch Anwenden der „Produktregel“

$$\frac{d}{ds}\langle f(s), g(s)\rangle = \langle f'(s), g(s)\rangle + \langle f(s), g'(s)\rangle$$

(Beweis?) erhält man

$$0 = \frac{d}{ds}\|\gamma'(s)\|^2 = \frac{d}{ds}\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle = 2\langle \gamma'(s), \gamma''(s)\rangle.$$

Der Vektor $\gamma''(s) = T'(s)$ ist also orthogonal zu $\gamma'(s)$ und daher ein Vielfaches des Normaleneinheitsvektors; der Proportionalitätsfaktor sei $\kappa(s)$.

Definition X.3.1 Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine zweimal differenzierbare ebene Kurve mit $\|\gamma'(s)\| = 1$ für alle $s \in I$. Dann heißt die durch

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

bestimmte Zahl $\kappa(s)$ die *Krümmung* von γ an der Stelle s.

Offensichtlich ist hier

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s)\rangle.$$

Nun wollen wir uns von der Voraussetzung lösen, dass stets $\|\gamma'(s)\| = 1$ ist. Am Ende von Abschnitt X.2 wurde gezeigt, wie man eine reguläre Kurve γ nach Bogenlänge umparametrisieren kann; die neue Parametrisierung $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$ (Bezeichnung siehe dort) hat dann die Eigenschaft $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ für alle s. Mit diesen Bezeichnungen und λ aus (X.2.6), d.h. $\lambda = \sigma^{-1}$, setzen wir:

Definition X.3.2 Die Krümmung einer regulären zweimal differenzierbaren Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ an der Stelle t ist die Krümmung von $\tilde{\gamma}$ an der Stelle $s = \lambda(t)$.

Beispiel X.3.3 Sei $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, die Kreislinie vom Radius r, die den Ursprung einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft. Hier ist $\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ und $\|\gamma'(t)\| = r$. Die Umparametrisierung auf Geschwindigkeit 1 ist

$$\tilde{\gamma}(s) = (r\cos s/r, r\sin s/r), \qquad 0 \le s \le 2\pi r,$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{T}(s) &= \tilde{\gamma}'(s) = (-\sin s/r, \cos s/r), \\ \tilde{T}'(s) &= \tilde{\gamma}''(s) = \frac{1}{r}(-\cos s/r, -\sin s/r), \\ \tilde{N}(s) &= D\tilde{T}(s) = (-\cos s/r, -\sin s/r), \end{aligned}$$

also

$$\tilde{\kappa}(s) = \langle \tilde{T}'(s), \tilde{N}(s) \rangle = \frac{1}{r}.$$

Damit ist auch die Krümmung κ von γ stets $\kappa(t) = 1/r$.

Wird der Kreis einmal im Uhrzeigersinn durchlaufen, also $\gamma(t) = (r\cos t, -r\sin t)$, erhält man $\kappa(t) = -1/r$.

Diese Werte stehen in Übereinstimmung mit der Intuition, dass die Krümmung eines Kreises umgekehrt proportional zu seinem Radius sein sollte; ferner korrespondiert $\kappa(t) > 0$ bzw. $\kappa(t) < 0$ mit einer Links- bzw. Rechtskrümmung.

In konkreten Beispielen kann man die Krümmung mit Hilfe des folgenden Satzes berechnen.

Satz X.3.4 *Sei $\gamma\colon t \mapsto (x(t), y(t))$ eine reguläre zweimal differenzierbare ebene Kurve. Dann gilt*

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}.$$

Beweis. Wir parametrisieren γ nach Bogenlänge um (mit σ und λ wie oben): $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$; alle Größen, die sich auf $\tilde{\gamma}$ beziehen, tragen wie in Beispiel X.3.3 eine

Tilde. Dann ist

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(s) &= \gamma'(\sigma(s))\sigma'(s),\\
\tilde{T}'(s) &= \gamma''(\sigma(s))(\sigma'(s))^2 + \gamma'(\sigma(s))\sigma''(s)\\
\tilde{N}(s) &= D\tilde{T}(s),\\
\langle \tilde{T}'(s), \tilde{N}(s)\rangle &= \langle \gamma''(\sigma(s))(\sigma'(s))^2, D\gamma'(\sigma(s))\sigma'(s)\rangle\\
&\qquad + \langle \gamma'(\sigma(s))\sigma''(s), D\gamma'(\sigma(s))\sigma'(s)\rangle\\
&= \langle \gamma''(\sigma(s)), D\gamma'(\sigma(s))\rangle(\sigma'(s))^3.
\end{aligned}$$

Setzt man $\gamma'' = (x'', y'')$ und $D\gamma' = (-y', x')$ ein und beachtet man $\sigma'(s) = 1/\|\gamma'(\sigma(s))\|$ (siehe den Schluss von Abschnitt X.2), lautet das Ergebnis mit $t = \sigma(s)$

$$\kappa(t) = \langle \tilde{T}'(s), D\tilde{T}(s)\rangle = \frac{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}},$$

wie behauptet. □

Korollar X.3.5 *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt für die Krümmung des Graphen im Punkt $(t, f(t))$*

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}}.$$

Beweis. Wende Satz X.3.4 auf $\gamma\colon t \mapsto (t, f(t))$ an. □

Banales Beispiel: Die Krümmung der Kosinuskurve im Punkte $(0, 1)$ ist -1.

Man beachte, wie Korollar X.3.5 die Vorstellung, dass der Graph von Funktionen mit positiver bzw. negativer 2. Ableitung links- bzw. rechtsgekrümmt ist, präzisiert.

Ausblick. Bei ebenen Kurven gibt es nur eine Richtung, die (modulo $\pm$) zu einem Tangentialvektor orthogonal ist; bei räumlichen Kurven gibt es derer viele; der Orthogonalraum zum Tangentialvektor hat die Dimension 2. Wie bei $m = 2$ kann man auch im höherdimensionalen Fall den Betrag der Krümmung als $\kappa_b(s) = \|T'(s)\|$ bei zweimal differenzierbaren Kurven mit Geschwindigkeit 1 definieren. Bei räumlichen solchen Kurven ($m = 3$) setzt man (im Fall $\kappa_b(s) \neq 0$) $N(s) = T'(s)/\kappa_b(s)$, den *Hauptnormalenvektor*, und[4] $B(s) = T(s) \times N(s)$, den *Binormalenvektor*. Diese drei Vektoren bilden eine Orthonormalbasis; man spricht vom *begleitenden Dreibein*. Die *Frenetschen Formeln* besagen

$$T'(s) = \kappa_b(s)N(s), \quad N'(s) = -\kappa_b(s)T(s) + \tau(s)B(s), \quad B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

für eine gewisse Zahl $\tau(s)$. Diese wird die *Windung* oder *Torsion* von γ bei s genannt. Bei einer beliebigen Geschwindigkeit parametrisiert man wieder nach Bogenlänge um. Im Fall einer Schraubenlinie $t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ct)$, $t \in \mathbb{R}$, kann man $\kappa_b(t) = r/(r^2 + c^2)$ und $\tau(t) = c/(r^2 + c^2)$ zeigen.

[4] $v \times w$ bezeichnet das Kreuzprodukt dieser Vektoren.

Kapitel XI

Gewöhnliche Differentialgleichungen

XI.1 Beispiele und elementare Lösungsmethoden

Unter einer Differentialgleichung versteht man – grob gesagt – eine Gleichung, in der Funktionen und ihre Ableitungen vorkommen. Handelt es sich um Funktionen einer reellen Veränderlichen, spricht man von *gewöhnlichen Differentialgleichungen*; handelt es sich um Funktionen mehrerer Veränderlicher und kommen partielle Ableitungen vor, so spricht man von *partiellen Differentialgleichungen*. Standardbeispiele sind $y'(t) = y(t)$ (gewöhnliche Differentialgleichung) bzw. $\partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^2 u/\partial x_2^2 = 0$ (partielle Differentialgleichung).

Traditionell wird die gesuchte Funktion in einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit y bezeichnet, die unabhängige Variable mit t oder x. Da in Anwendungen diese häufig die Dimension einer Zeit hat, wird in diesem Kapitel meistens t verwendet. Außerdem unterdrückt man in der Regel die unabhängige Variable, wenn sie nicht explizit auftaucht, schreibt also z.B. $y' = t^2 + y^2$ statt $y'(t) = t^2 + y(t)^2$.

Präziser ausgedrückt handelt es sich bei einer *expliziten gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung* um eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f\bigl(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\bigr), \qquad \text{(XI.1.1)}$$

wo f eine auf einer Teilmenge G des $\mathbb{R}^{n+1}$ definierte Funktion ist. Nur um solche Gleichungen werden wir uns hier kümmern, und meistens ist $n = 1$. Eine *implizite* gewöhnliche Differentialgleichung hat die Form $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Man beachte, dass nach dieser Nomenklatur $y'(t) = y(y(t))$ oder $y'(t) = y(t-1)$ keine gewöhnlichen Differentialgleichungen sind; solche Gleichungen sind

---

Dieses Kapitel ist eine für die Bedürfnisse der Ana II zurechtgestutzte Version von Teilen von Kapitel III meines Buches *Einführung in die höhere Analysis*, 2. Auflage, Springer 2009.

als Funktional-Differentialgleichungen bekannt. Enthält (XI.1.1) die Variable t nicht explizit (wie z.B. $y'' = y^2 - y'$), so heißt die Gleichung *autonom*.

Um (XI.1.1) zu lösen, sind ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine n-mal differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$\bigl(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\bigr) \in G \qquad \text{für alle } t \in I$$

und

$$y^{(n)}(t) = f\bigl(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\bigr) \qquad \text{für alle } t \in I$$

anzugeben. (Offenbar ist die erste Bedingung notwendig, um die zweite überhaupt formulieren zu können.)

Betrachten wir zunächst einige Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Beispiel XI.1.1 Sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Offensichtlich bedeutet das Lösen der Differentialgleichung $y' = \varphi(t)$, eine Stammfunktion von φ zu finden; deswegen wird das Lösen einer Differentialgleichung auch ihre Integration genannt. Diese Gleichung hat also die Form (XI.1.1) mit $n = 1$, $G = [a,b] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und $f(t,u) = \varphi(t)$. Ihre allgemeine Lösung hat die Form

$$y(t) = \int_a^t \varphi(s)\,ds + c,$$

wo $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist; die Lösung enthält also eine freie Konstante und ist nicht eindeutig bestimmt. Betrachtet man jedoch das Anfangswertproblem

$$y' = \varphi(t), \qquad y(a) = y_0,$$

wo $y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben ist, so wird die Lösung eindeutig, nämlich

$$y(t) = \int_a^t \varphi(s)\,ds + y_0.$$

Bei einem *Anfangswertproblem* für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung handelt es sich um eine Differentialgleichung (XI.1.1) zusammen mit der Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}; \tag{XI.1.2}$$

hier ist $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$. Unter einer Lösung des Anfangswertproblems versteht man eine Lösung der Differentialgleichung (XI.1.1), die auch (XI.1.2) erfüllt.

Beispiel XI.1.2 Ein Auto verliert mit der Zeit an Wert, und zwar ein neues schneller als ein altes. Man kann annehmen, dass der Wertverlust pro Zeiteinheit zu jedem Zeitpunkt dem aktuellen Wert proportional ist, das heißt, bezeichnet $y(t)$ den Wert zur Zeit t, so ändert sich in der Zeitspanne Δt der Wert um $k\,y(t)\,\Delta t$:

$$\Delta y = k\,y(t)\,\Delta t.$$

(In unserem Beispiel ist k negativ, da ein Verlust symbolisiert werden soll.) Division durch Δt und Übergang zum Limes $\Delta t \to 0$ suggeriert, dass die zeitliche Entwicklung durch die Differentialgleichung

$$y' = ky$$

beschrieben wird. Zusammen mit der Angabe des Neuwerts

$$y(0) = y_0$$

erhalten wir ein typisches Anfangswertproblem 1. Ordnung (mit $G = \mathbb{R}^2$ und $f(t,u) = ku$). Um es zu lösen, verwenden wir die folgende „Physikermethode“ und erhalten nacheinander

$$y' = \frac{dy}{dt} = ky \rightsquigarrow \frac{dy}{y} = k\,dt \ (?!) \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = \int k\,dt \rightsquigarrow \log|y| = kt + c$$

mit einer beliebigen Konstanten c und daher mit $c_1 = \pm e^c$

$$y = c_1 e^{kt}.$$

Die Forderung $y(0) = y_0$ führt zu $c_1 = y_0$ und daher zur Lösung

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Nun war unsere Methode durchaus fragwürdig, aber eine Probe zeigt, dass die obige Exponentialfunktion wirklich unser Anfangswertproblem löst. Gibt es möglicherweise eine weitere Lösung $\tilde{y}$, die auch auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist? Für die Hilfsfunktion $z(t) = \tilde{y}(t)/e^{kt}$, $t \in \mathbb{R}$, gilt dann

$$z'(t) = \frac{\tilde{y}'(t)e^{kt} - \tilde{y}(t)ke^{kt}}{e^{2kt}} = 0$$

sowie $z(0) = y_0$, woraus $z(t) = y_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt. Das heißt, das obige Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar.

Mit derselben Differentialgleichung können diverse Zerfalls- ($k < 0$) sowie Wachstumsprozesse ($k > 0$) modelliert werden.

Beispiel XI.1.3 Während sich im letzten Beispiel für Zerfallsprozesse (also $k < 0$) die vernünftige Konsequenz $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ ergibt, erhält man für $k > 0$ und $y_0 > 0$ unbeschränktes Wachstum $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$, was – insbesondere bei Populationswachstumsmodellen – wegen der Beschränktheit der Ressourcen als nicht realistisch erscheint.

Schreibt man $k = \gamma - \sigma$ mit einer „Geburtsrate“ $\gamma > 0$ und einer „Sterberate“ $\sigma > 0$, so lautet die Differentialgleichung aus Beispiel XI.1.2 $y' = \gamma y - \sigma y$. 1838 schlug Verhulst vor, stattdessen das Populationswachstum durch die Differentialgleichung

$$y' = \gamma y - \sigma y^2$$

zu modellieren, in der er den Geburts- und Sterbeprozess unterschiedlich wichtete und die er *logistische Differentialgleichung*[1] nannte. Zur Lösung verwenden wir die Methode von oben:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y - \sigma y^2 \rightsquigarrow \frac{dy}{\gamma y - \sigma y^2} = dt \rightsquigarrow \int \frac{dy}{\gamma y - \sigma y^2} = \int dt = t + c,$$

also erhält man nach kurzer Rechnung

$$y(t) = \frac{\gamma}{\sigma + \sigma c e^{-\gamma t}}.$$

Durch Probe bestätigt man, dass

$$y(t) = \frac{\gamma}{\sigma + \left(\frac{\gamma}{y_0} - \sigma\right) e^{-\gamma t}} \tag{XI.1.3}$$

in der Tat das Anfangswertproblem

$$y' = \gamma y - \sigma y^2, \qquad y(0) = y_0 \ (> 0)$$

löst; beachte $\lim_{t\to\infty} y(t) = \gamma/\sigma$, so dass die Population stabil wird.

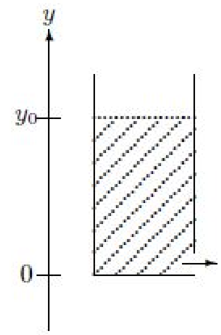
Mit Satz XI.1.8 werden wir uns der Mühe entheben, in diesem und ähnlich gelagerten Beispielen stets die Probe machen zu müssen, da wir solch zweifelhafte Operationen wie Multiplikation mit dt vorgenommen haben. Dort wird gezeigt, dass (XI.1.3) die einzige Lösung des Anfangswertproblems ist.

Beispiel XI.1.4 Betrachte für $a > 0$ und $y_0 \geq 0$ das Anfangswertproblem

$$y' = -a\sqrt{y}, \qquad y(0) = y_0;$$

es liegt also die Form von (XI.1.1) mit $G = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ und $f(t, u) = -a\sqrt{u}$ vor. Dieses Anfangswertproblem modelliert das Auslaufen einer Flüssigkeit aus einem zylindrischen Gefäß:

[1] Der Name hat weder etwas mit Logik noch mit Logistik zu tun; der Ursprung ist in dem französischen Wort *logis* zu suchen.



Die Abnahme des Flüssigkeitsspiegels, also y', ist, da die Flüssigkeit inkompressibel ist, der Auslaufgeschwindigkeit u proportional, die sich nach dem Energieerhaltungssatz berechnen lässt. Mit den Bezeichnungen $p =$ Druck, $\rho =$ Dichte, $m =$ Masse, $g =$ Erdbeschleunigung, $q =$ Querschnitt und $V =$ Volumen erhält man für die potentielle Energie eines Probevolumens

$$pq\Delta y = y\rho g q\Delta y = y\rho g\Delta V$$

und für die kinetische Energie

$$\frac{m}{2}u^2 = \frac{1}{2}\Delta V\rho u^2.$$

Daraus folgt $u = \sqrt{2gy}$ und deshalb $y' = -a\sqrt{y}$. Wir schreiben hier $-a$ mit einer Konstanten $a > 0$; das Minuszeichen macht es augenfällig, dass es sich um eine Abnahme des Flüssigkeitsspiegels handelt.

Die uns bekannte Lösungstechnik liefert hier als Lösungsvorschlag

$$\tilde{y}(t) = \left(\sqrt{y_0} - \frac{a}{2}t\right)^2,$$

jedoch wäre für große t die Ableitung $\tilde{y}'(t)$ positiv, während die Differentialgleichung stets negative Werte verlangt. Daher modifizieren wir $\tilde{y}$ zu

$$y(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{y_0} - \frac{a}{2}t\right)^2 & \text{für } t \leq \frac{2}{a}\sqrt{y_0}, \\ 0 & \text{für } t > \frac{2}{a}\sqrt{y_0}. \end{cases}$$

(Skizze!) Der Fall $y_0 = 0$ nimmt eine Sonderstellung ein: Neben der angegebenen ist auch $y = 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems, das also nicht eindeutig lösbar ist. (Wie ist diese Nichteindeutigkeit der Lösung physikalisch zu erklären?)

Beispiel XI.1.5 Die Differentialgleichung

$$y' = y^2$$

wird, wie scharfes Hinsehen zeigt, von den Funktionen $y(t) = -1/(t-c)$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig, gelöst. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass es außer $y = 0$ keine weiteren Lösungen gibt (Satz XI.1.8 enthält eine allgemeinere Aussage). Dieses Beispiel zeigt, dass, obwohl die rechte Seite der Differentialgleichung (also $f(t, u) = u^2$) auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist, es keine von 0 verschiedene Lösung gibt, die auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

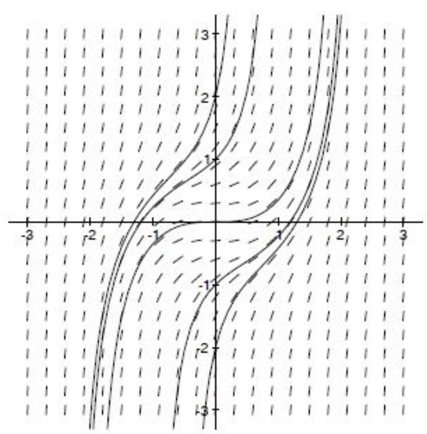
Beispiel XI.1.6 Die bisher betrachteten Beispiele hatten gemeinsam, dass man die auftauchenden Differentialgleichungen geschlossen lösen konnte. Liouville hat jedoch 1841 gezeigt, dass die Differentialgleichung

$$y' = t^2 + y^2$$

nicht geschlossen gelöst werden kann in demselben Sinn, wie $\int e^{-x^2}\,dx$ nicht geschlossen ausgeführt werden kann. Es stellt sich daher die Frage, ob eine gegebene Differentialgleichung überhaupt eine Lösung besitzt und wie man sie erhält bzw. approximiert[2]. Einen groben Anhaltspunkt, wie eine Lösung aussehen könnte, liefert das *Richtungsfeld* der Differentialgleichung. Sei etwa

$$y' = f(t, y)$$

vorgelegt. Durch die Punkte der (t, y)-Ebene legt man kurze Strecken der Steigung $f(t, y)$. Da eine Lösung der Differentialgleichung, die durch einen Punkt (t_0, y_0) geht, dort die Steigung $f(t_0, y_0)$ hat, erhält man so Aufschluss über den Verlauf der Lösungen. Die folgende Skizze zeigt Richtungsfeld und einige Lösungen der Differentialgleichung $y' = t^2 + y^2$:



[2]Einen allgemeinen Existenzsatz lernen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf in Satz XI.3.3 kennen.

Beispiel XI.1.7 Als letztes Beispiel betrachten wir eine Gleichung 2. Ordnung, die *Schwingungsgleichung.* Wird eine Feder aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt, so greift nach dem Hookeschen Gesetz eine Rückstellkraft an, die der Auslenkung y proportional, aber entgegengesetzt ist. Diese beschleunigt eine Probemasse m gemäß dem Newtonschen Kraftgesetz „Kraft = Masse × Beschleunigung“, was auf die Differentialgleichung ($k > 0$ die Federkonstante)

$$my'' = -ky$$

bzw. mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$y'' + \omega_0^2 y = 0$$

führt. Man sieht sofort, dass $y_1(t) = \sin \omega_0 t$ und $y_2(t) = \cos \omega_0 t$ die Gleichung lösen; allgemeiner ist bei beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ auch $c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung, denn die linke Seite der Schwingungsgleichung hängt linear von y ab. Es seien nun Anfangsbedingungen, also eine Anfangsauslenkung s_0 und eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 vorgelegt. Dann sind c_1 und c_2 so wählbar, dass das Anfangswertproblem

$$y'' + \omega_0^2 y = 0, \qquad y(t_0) = s_0,\ y'(t_0) = v_0 \tag{XI.1.4}$$

lösbar ist; wir müssen nämlich nur erreichen, dass das lineare Gleichungssystem in c_1 und c_2

$$\begin{aligned} c_1 \sin \omega_0 t_0 + c_2 \cos \omega_0 t_0 &= s_0 \\ c_1 \omega_0 \cos \omega_0 t_0 - c_2 \omega_0 \sin \omega_0 t_0 &= v_0 \end{aligned}$$

lösbar ist. Da die Determinante der das System regierenden Matrix $-\omega_0 \neq 0$ ist, existiert also genau eine Lösung von (XI.1.4) der Form $c_1 y_1 + c_2 y_2$; dass es auch keine anderen Lösungen gibt, wird in Vorlesungen über Differentialgleichungen gezeigt (siehe dazu auch den Ausblick am Ende des Kapitels).

Bei einer gedämpften Schwingung müssen Reibungskräfte, die zur Geschwindigkeit proportional sind, berücksichtigt werden. Im Newtonschen Kraftgesetz taucht dann auf der rechten Seite noch die Reibungskraft $-ry'$ auf:

$$my'' = -ry' - ky.$$

Das führt mit $2p = r/m > 0$ und $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ auf das Anfangswertproblem

$$y'' + 2py' + \omega_0^2 y = 0, \qquad y(t_0) = s_0,\ y'(t_0) = v_0.$$

(Es wird sich als günstig erweisen, die Konstante bei y' als $2p$ statt p zu schreiben.)

Nach etwas Bedenkzeit könnte man auf die Idee kommen, eine Lösung als $e^{\lambda t}$ mit passendem λ anzusetzen. Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2p\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

d.h.

$$\lambda^2 + 2p\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Wenn diese Gleichung zwei reelle Lösungen $\lambda_{1/2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$ hat, kann man bei beliebigen c_1, c_2

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

als Lösung ansetzen, analog dem ungedämpften Fall c_1 und c_2 den Anfangsbedingungen anpassen und auch die Eindeutigkeit der Lösung beweisen. Da in diesem Fall, dem Fall starker Dämpfung $p^2 > \omega_0^2$, die $\lambda_{1/2} < 0$ sind, ist die Lösung stabil ($\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$), in Übereinstimmung mit der physikalischen Intuition.

Der Fall $p^2 = \omega_0^2$, der in der Physik *aperiodischer Grenzfall* genannt wird, führt auf eine doppelte Nullstelle der Bestimmungsgleichung von λ und nimmt eine Sonderstellung ein. Bis jetzt haben wir in diesem Fall nur eine einparametrige Schar von Lösungen, nämlich ce^{-pt}. Man sollte vermuten, dass sich noch eine zweite Lösung versteckt hält; wir werden in Satz XI.2.3 sehen, wie man sie findet.

Es bleibt der Fall $p^2 < \omega_0^2$, in welchem zwei konjugiert komplexe Nullstellen existieren. Mit $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$ erhalten wir formal Lösungen als Linearkombinationen von $e^{(-p+i\omega)t}$ und $e^{(-p-i\omega)t}$; das sind jedoch komplexwertige Funktionen. Um reellwertige Lösungen zu erhalten, beachte man, dass Real- und Imaginärteil selbst wieder Lösungen sind, denn die Koeffizienten der Differentialgleichung sind reell (einsetzen und nachrechnen!). Das führt auf die zweiparametrige Schar reeller Lösungen

$$c_1 e^{-pt} \sin \omega t + c_2 e^{-pt} \cos \omega t; \tag{XI.1.5}$$

wieder lehrt die allgemeine Theorie, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Als nächstes wird ein Satz formuliert, der das Vorgehen in den Beispielen XI.1.2 und XI.1.3 rechtfertigt. Dazu betrachten wir eine *Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen*

$$y' = g(y) \cdot h(t).$$

Die obigen Beispiele legen folgende Lösungsstrategie nahe:

$$\frac{dy}{dt} = g(y) \cdot h(t) \rightsquigarrow \frac{dy}{g(y)} = h(t)\,dt \rightsquigarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)\,dt + c,$$

und es bleibt, nach ausgeführter Integration die linke Seite nach y aufzulösen. Im folgenden Satz wird präzisiert, wann dieses Verfahren wirklich gerechtfertigt ist.

Satz XI.1.8 *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, und $h\colon I \to \mathbb{R}$ sowie $g\colon J \to \mathbb{R}$ seien stetig. Es sei $t_0 \in I$, und y_0 sei ein innerer Punkt von J.*

(a) *Falls* $g(y_0) \neq 0$*, existiert eine Umgebung* U *von* t_0*, so dass das Anfangswertproblem*

$$y' = g(y) \cdot h(t), \qquad y(t_0) = y_0$$

auf $I \cap U$ *eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Man erhält sie durch Auflösen von*

$$\int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$$

nach y*.*

(b) *Falls* $g(y_0) = 0$*,* $g(y) \neq 0$ *für* $0 < |y - y_0| \leq \eta$ *und die (uneigentlichen) Integrale* $\int_{y_0}^{y_0+\eta} g(u)^{-1}\,du$ *sowie* $\int_{y_0-\eta}^{y_0} g(u)^{-1}\,du$ *divergieren, ist* $y = y_0$ *die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems auf ganz* I*.*

Beweis. (a) Wir setzen

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)}, \qquad H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds.$$

Da g stetig und $g(y_0) \neq 0$ ist, ist G auf einem offenen Teilintervall $\tilde{J}$ um y_0 wohldefiniert, nämlich, wo $g(y) \neq 0$ ist. Da dort $G'(y) = 1/g(y)$ stets positiv oder stets negativ ist, ist G streng monoton, und die Umkehrfunktion G^{inv}: $G(\tilde{J}) =: \tilde{I} \to \mathbb{R}$ existiert. Nun ist $y_0 \in \tilde{J}$, und $\tilde{J}$ und daher auch $\tilde{I}$ sind offen. Da $H(t_0) = 0 = G(y_0) \in \tilde{I}$, existiert wegen der Stetigkeit von H eine Umgebung U von t_0 mit

$$H(t) \in \tilde{I} \qquad \text{für alle } t \in I \cap U.$$

Für diese t ist $y(t) := G^{\mathrm{inv}}(H(t))$ erklärt, und nach Definition ist

$$y'(t) = (G^{\mathrm{inv}})'(H(t)) \cdot H'(t) = \frac{1}{G'(G^{\mathrm{inv}}(H(t)))} H'(t) = g(y(t)) \cdot h(t)$$

sowie $y(t_0) = G^{\mathrm{inv}}(0) = y_0$.

Damit ist eine Lösung des Anfangswertproblems gefunden. Wir zeigen jetzt, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Sei z ebenfalls eine Lösung; dann ist, sofern nur $g(z(t)) \neq 0$ ist (was in einer Umgebung von t_0 sicher erfüllt ist),

$$\frac{z'(t)}{g(z(t))} = h(t),$$

daher

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{z'(s)}{g(z(s))}\,ds = \int_{y_0}^{z(t)} \frac{du}{g(u)} = G(z(t)),$$

weshalb $z = G^{\mathrm{inv}} \circ H = y$ folgt.

(b) Wegen $g(y_0) = 0$ ist die konstante Funktion $y = y_0$ natürlich eine Lösung des Anfangswertproblems. Nehmen wir an, es gäbe eine weitere nichtkonstante Lösung z. Ohne Einschränkung existiert dann eine Stelle $t_1 > t_0$ mit $y_1 := z(t_1) > y_0$. Damit ist z Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = g(y) \cdot h(t), \qquad y(t_1) = y_1,$$

und wegen $g(y_1) \neq 0$ folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in (a)

$$\int_{y_1}^{z(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_1}^{t} h(s)\, ds \tag{XI.1.6}$$

für $t > t^* := \sup\{\tau < t_1\colon z(\tau) = y_0\}$; für diese t ist nämlich $g(z(t)) \neq 0$. Macht man den Grenzübergang $t \to t^*$ in (XI.1.6), so erhält man im Widerspruch zur Voraussetzung, dass

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{du}{g(u)} = \int_{t^*}^{t_1} h(s)\, ds$$

existiert. □

In Beispiel XI.1.4 war ein Beispiel eines nicht eindeutig lösbaren Anfangswertproblems gegeben; in den Bezeichnungen von Satz XI.1.8 war dort $g(y) = -a\sqrt{y}$, $h(t) = 1$ und $y_0 = 0$, und das Integral $\int_0^\eta du/\sqrt{u}$ ist konvergent. In Beispiel XI.1.2 hatten wir eindeutige Lösbarkeit beobachtet, was wegen der Divergenz von $\int_0^\eta du/u$ ein Spezialfall des Satzes ist.

Man beachte, dass die Aussagen in (a) lokaler Natur sind: Existenz und Eindeutigkeit sind nur in einer Umgebung von t_0 behauptet, nicht auf ganz I. Zur Bestätigung betrachte noch einmal die Beispiele XI.1.4 mit dem Anfangswert $y(-1) = 1$ und XI.1.5.

In Satz XI.1.8 ist es übrigens wesentlich, dass y_0 ein innerer Punkt des Definitionsintervalls von g ist (wo wurde das im Beweis benutzt?).

XI.2 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten als nächstes einen sehr wichtigen Typ einer Differentialgleichung 1. Ordnung, nämlich eine *lineare Differentialgleichung*

$$y' = a(t)y + b(t).$$

Hier seien a und b stetige Funktionen auf einem Intervall I. Die Gleichung heißt linear, da die Transformation $L\colon y \mapsto y' - ay$ zwischen den Vektorräumen der stetig differenzierbaren Funktionen und der stetigen Funktionen linear ist. In Analogie zu linearen Gleichungssystemen nennt man diese Differentialgleichung *homogen*, wenn $b = 0$ ist, andernfalls *inhomogen*.

Als Spezialfall von Satz XI.1.8 erhält man sofort:

Satz XI.2.1 *Sei I ein Intervall, die Funktion $a\colon I \to \mathbb{R}$ sei stetig sowie $t_0 \in I$. Dann ist das Anfangswertproblem*

$$y' = a(t)y, \qquad y(t_0) = y_0$$

für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ eindeutig auf ganz I lösbar, und zwar ist

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$$

diese Lösung.

Beachte, dass im linearen Fall die Lösung auf ganz I existiert und nicht bloß lokal.

Betrachten wir nun das inhomogene Anfangswertproblem

$$y' = a(t)y + b(t), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Man löst es mit der genialen Methode der *Variation der Konstanten*. Die Idee ist, in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$$y(t) = ce^{A(t)}, \quad \text{mit } A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds,$$

die Konstante c durch eine Funktion $t \mapsto c(t)$ zu ersetzen, um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu erhalten. Wie müsste so eine Funktion aussehen? Da dann

$$y'(t) = c'(t)e^{A(t)} + c(t)A'(t)e^{A(t)}$$

gilt, müsste, damit y die inhomogene Differentialgleichung löst, c die Gleichung

$$c'(t)e^{A(t)} + c(t)A'(t)e^{A(t)} = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t),$$

also wegen $A' = a$

$$c'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

erfüllen, woraus durch Integration c sofort gefunden werden kann.

Satz XI.2.2 *Sei I ein Intervall, $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ seien stetig, und es sei $t_0 \in I$. Dann ist das Anfangswertproblem*

$$y' = a(t)y + b(t), \qquad y(t_0) = y_0$$

für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ eindeutig auf ganz I lösbar, und zwar durch

$$y(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}\,ds + y_0\right)e^{A(t)},$$

wo $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$.

Beweis. Dass die genannte Funktion eine Lösung ist, folgt durch Rückwärtsrechnen aus der Vorbemerkung. Kommen wir zur Eindeutigkeit. Sei $\tilde{y}$ ebenfalls eine Lösung. Dann löst $u := y - \tilde{y}$ das homogene Anfangswertproblem

$$u' = a(t)u, \qquad u(t_0) = 0,$$

und aus Satz XI.2.1 folgt $u = 0$ und deswegen $\tilde{y} = y$. □

Ist man an der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung statt des Anfangswertproblems interessiert, die im allgemeinen eine freie Konstante enthält, kann man die Sätze XI.2.1 und XI.2.2 auch so aussprechen:

- Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t)y$ ist
$$y(t) = ce^{A(t)},$$
wo A eine Stammfunktion von a ist.

- Da sich zwei Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(t)y + b(t)$ nur um eine Lösung der homogenen Gleichung unterscheiden, ist ihre allgemeine Lösung
$$y(t) = y_p(t) + ce^{A(t)},$$
wo y_p irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist (eine sogenannte *partikuläre Lösung*). Insbesondere ist
$$y_p(t) = C(t)e^{A(t)}$$
eine partikuläre Lösung, wo C eine Stammfunktion von be^{-A} ist.

Als Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = 2ty + t^3, \qquad y(0) = 1.$$

Hier ist $a(t) = 2t$, $b(t) = t^3$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist ce^{t^2}; eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y_p(t) = C(t)e^{t^2},$$

wo $C'(t) = t^3e^{-t^2}$. Partielle Integration liefert schnell

$$C(t) = -\frac{t^2+1}{2}e^{-t^2} \ (+ \text{const.}),$$

so dass $y_p(t) = -\frac{1}{2}(t^2+1)$ eine partikuläre Lösung ist. Damit erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(t) = -\frac{t^2+1}{2} + ce^{t^2}.$$

Um das Anfangswertproblem zu lösen, ist die Konstante c so zu wählen, dass $y(0) = 1$ gilt, d.h. $c = 3/2$.

Es ist möglich, manche nichtlineare Gleichung in eine lineare zu transformieren. Betrachte etwa die logistische Differentialgleichung

$$y' = \gamma y - \sigma y^2$$

aus Beispiel XI.1.3. Ist $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung ohne Nullstellen, so gilt für $z = 1/y$

$$z' = \frac{-y'}{y^2} = \frac{-\gamma}{y} + \sigma = -\gamma z + \sigma.$$

Ist umgekehrt z eine Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung ohne Nullstellen, so definiert $y = 1/z$ eine Lösung der logistischen Differentialgleichung.

Wir behandeln jetzt die allgemeine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; sie hat die Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(t) \tag{XI.2.1}$$

mit Zahlen a_j und einer stetigen Funktion $b\colon I \to \mathbb{R}$. Wieder nennen wir die Gleichung homogen, wenn $b = 0$ ist. Für das zugehörige Anfangswertproblem fordert man die Anfangsbedingung

$$y(t_0) = u_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = u_n.$$

Es wird praktisch sein, über $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ zu rechnen. Dazu muss erklärt werden, was die Ableitung einer komplexen Funktion ist. Da man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren kann, ist dafür einfach auf (IX.3.1) zu verweisen. Anders gesagt: Zerlegt man $f\colon I \to \mathbb{C}$ in Real- und Imaginärteil, ist f' definitionsgemäß $(\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$. Das für uns wichtigste Beispiel ist $f(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Hier ist $\operatorname{Re} e^{\lambda t} = e^{\alpha t}\cos\beta t$, $\operatorname{Im} e^{\lambda t} = e^{\alpha t}\sin\beta t$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\alpha t}\cos\beta t &= (\alpha\cos\beta t - \beta\sin\beta t)e^{\alpha t} \\ \frac{d}{dt} e^{\alpha t}\sin\beta t &= (\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t)e^{\alpha t} \end{aligned}$$

und

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = (\alpha\cos\beta t - \beta\sin\beta t)e^{\alpha t} + i(\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t)e^{\alpha t} = \lambda e^{\lambda t},$$

was genauso wie in der Ana I aussieht.

Es seien im Folgenden $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, und für eine n-mal differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y.$$

Dann ist $L\colon C^n(I) \to C(I)$ linear; hier ist

$$\begin{aligned} C^n(I) &= \{y\colon I \to \mathbb{C}\colon\ y \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar}\},\\ C(I) &= \{y\colon I \to \mathbb{C}\colon\ y \text{ ist stetig}\}. \end{aligned}$$

Daher ist der Kern von L, also die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung $Ly = 0$, ein Untervektorraum; und in fortgeschrittenen Vorlesungen zu Differentialgleichungen zeigt man[3]

$$\dim \ker L = n.$$

Ein System von n linear unabhängigen Lösungen von $Ly = 0$, also eine Basis des Lösungsraums $\ker L$, nennt man ein *Fundamentalsystem*; wir wollen jetzt ein Fundamentalsystem für $Ly = 0$ angeben.

Wir suchen also n linear unabhängige Lösungen der Gleichung $Ly = 0$ und machen dazu den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$; genau dann gilt für diese Ansatzfunktionen $Ly = 0$, wenn

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

ist.

Hat P die n verschiedenen komplexen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, erhält man n komplexe Lösungen von $Ly = 0$, nämlich $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$. Diese sind wirklich linear unabhängig: Ist nämlich $\sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} = 0$ für alle $t \in I$, so folgt durch wiederholtes Differenzieren

$$\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^k e^{\lambda_j t} = 0 \qquad \text{für alle } t \in I,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Betrachtet man jetzt $t = 0$ und $k = 0, \ldots, n-1$, so folgt

$$\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^k = 0$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

Da die Determinante dieser Matrix (die Vandermondesche Determinante)

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

[3] Das folgt aus dem im Ausblick am Ende dieses Kapitels angesprochenen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungssysteme; denn dieser Satz zeigt in der Übersetzung auf lineare Gleichungen höherer Ordnung, dass die Abbildung, die einem Vektor $(u_0, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems $Ly = 0$, $y^{(j)}(t_0) = u_j$ zuordnet, ein Vektorraumisomorphismus ist.

ist, hat das obige Gleichungssystem nur die triviale Lösung $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Über den Fall mehrfacher Nullstellen berichtet der folgende Satz. Wir betrachten L und P wie oben.

Satz XI.2.3 *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine k-fache Nullstelle von P, so sind*

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ \dots,\ t^{k-1}e^{\lambda t} \tag{XI.2.2}$$

Lösungen von $Ly = 0$. Auf diese Weise erhält man insgesamt n linear unabhängige komplexwertige Lösungen von $Ly = 0$, also ein Fundamentalsystem dieser Gleichung.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Funktionen in (XI.2.2) tatsächlich die Differentialgleichung lösen. Zu zeigen ist also: Falls $l < k$ und $y(t) = t^l e^{\lambda t}$, so ist $Ly = 0$. Der Trick besteht nun darin,

$$t^l e^{\lambda t} = \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} e^{\lambda t}$$

zu beobachten. Mit $a_n = 1$ ist dann (beim dritten Gleichheitszeichen geht der Satz von Schwarz, Satz IX.1.6, ein)

$$\begin{aligned} Ly(t) &= \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^j}{dt^j} y(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} e^{\lambda t} \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \frac{\partial^j}{\partial t^j} e^{\lambda t} = \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j e^{\lambda t} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{l} \binom{l}{r} \frac{\partial^r}{\partial \lambda^r} P(\lambda) t^{l-r} e^{\lambda t} = 0, \end{aligned}$$

da λ eine k-fache Nullstelle von P und damit Nullstelle der r-ten Ableitung, $r < k$, ist. Die vorletzte Gleichheit ergibt sich aus der Leibnizschen Produktregel für höhere Ableitungen.

Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra ist klar, dass auf diese Weise n Lösungen entstehen. Wir zeigen jetzt durch Induktion nach der Anzahl m der verschiedenen Nullstellen von P, dass diese linear unabhängig sind.

Das ist klar für $m = 1$. Für den Induktionsschritt von m auf $m+1$ seien jetzt $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von P mit den Vielfachheiten $k_1, \dots, k_{m+1}$. Eine Linearkombination der oben beschriebenen Lösungen führt auf den Term

$$\sum_{j=1}^{m+1} p_j(t) e^{\lambda_j t},$$

wo p_j ein Polynom vom Grad $< k_j$ ist. Wir müssen zeigen, dass dieser Term nur dann identisch verschwindet, wenn alle $p_j = 0$ sind. Gelte also

$$0 = \sum_{j=1}^{m+1} p_j(t)e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^{m} p_j(t)e^{\lambda_j t} + p_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1} t} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Setze nun $\mu_j = \lambda_j - \lambda_{m+1}$ für $j = 1, \dots, m$; dann sind die $\mu_j \neq 0$ und paarweise verschieden. Es folgt

$$0 = \sum_{j=1}^{m} p_j(t)e^{\mu_j t} + p_{m+1}(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Diese Gleichung wird nun so lange differenziert, bis p_{m+1} „verschwunden" ist. Da $\frac{d}{dt}p_j(t)e^{\mu_j t} = (p_j'(t)+\mu_j p_j(t))e^{\mu_j t}$ von der Form $\tilde{p}_j(t)e^{\mu_j t}$ mit einem Polynom $\tilde{p}_j$ vom selben Grad wie p_j ist (da $\mu_j \neq 0$), erhält man eine Gleichung der Form

$$0 = \sum_{j=1}^{m} q_j(t)e^{\mu_j t} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind alle $q_j = 0$, und da die p_j denselben Grad haben, sind auch alle $p_j = 0$, $j = 1, \dots, m$; und dann ist auch $p_{m+1} = 0$. Das war zu zeigen. $\square$

Sind die a_j reell, so möchte man auch, dass die Lösungen reellwertig sind. Dazu betrachte man Real- und Imaginärteil der in Satz XI.2.3 beschriebenen Lösungen. Diese haben die Form ($\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$)

$$t^l \cos\beta_j t \; e^{\alpha_j t} \quad \text{bzw.} \quad t^l \sin\beta_j t \; e^{\alpha_j t}. \tag{XI.2.3}$$

Da mit λ auch $\bar{\lambda}$ Nullstelle des reellen Polynoms P ist, ergibt sich im reellen Fall:

Satz XI.2.4 *Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine k-fache Nullstelle von P und sind die a_j reell, bilden die Funktionen der Form* (XI.2.2) *aus Satz XI.2.3 reellwertige Lösungen von $Ly = 0$. Ist hingegen $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine k-fache Nullstelle von P, betrachte man stattdessen die Funktionen in* (XI.2.3) *für $l < k$. All diese Funktionen zusammen bilden ein Fundamentalsystem aus reellwertigen Lösungen.*

Beispiel XI.2.5 In Beispiel XI.1.7 war die Gleichung des *harmonischen Oszillators*

$$y'' + 2py' + \omega_0^2 y = 0$$

($p \geq 0$) vorgestellt worden. Im Fall $p = \omega_0$ hatten wir damals der Gleichung nur eine Lösung ansehen können; jetzt sieht man die zweite, nämlich te^{-pt} (vgl. Satz XI.2.3).

Betrachten wir nun eine *erzwungene Schwingung*, die von einer periodisch wirkenden äußeren Kraft K erregt wird. Statt der Differentialgleichung (vgl. Beispiel XI.1.7)

$$my'' + ry' + ky = 0$$

taucht nun auf der rechten Seite der Term $K(t)$ auf. Mit

$$p = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad b = \frac{K}{m}$$

bekommt man die inhomogene Gleichung

$$y'' + 2py' + \omega_0^2 y = b(t). \tag{XI.2.4}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir eine reine Kosinusschwingung mit der Erregerfreqenz ω_1 an, d.h.

$$b(t) = b_0 \cos \omega_1 t.$$

Wir werden im Folgenden den Fall schwacher Dämpfung, d.h. $0 \leq p < \omega_0$ annehmen. Zuerst gehen wir von (XI.2.4) zur komplexifizierten Gleichung

$$z'' + 2pz' + \omega_0^2 z = b_0 e^{i\omega_1 t} \tag{XI.2.5}$$

über; zur Erinnerung $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Der Realteil einer Lösung von (XI.2.5) ist dann eine Lösung von (XI.2.4) für unser b. Wir machen jetzt den Ansatz

$$z(t) = Ae^{i\omega_1 t}$$

mit $\omega_1 > 0$, um eine (sogenannte partikuläre) Lösung von (XI.2.5) zu finden. Daraus erhält man unmittelbar

$$A(-\omega_1^2 + 2p\omega_1 i + \omega_0^2) = b_0. \tag{XI.2.6}$$

Falls die Klammer $\neq 0$ ist, kann man nach A auflösen und erhält eine Lösung von (XI.2.5).

Wir unterscheiden jetzt die Fälle $p = 0$ und $0 < p < \omega_0$. Zuerst zu $p = 0$, d.h. zur ungedämpften Schwingung. Falls $\omega_0 \neq \omega_1$ ist, folgt aus (XI.2.6)

$$A = \frac{b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2},$$

was eine reelle Zahl ist. Eine partikuläre Lösung von (XI.2.4) ist daher

$$\mathrm{Re}(Ae^{i\omega_1 t}) = \frac{b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t,$$

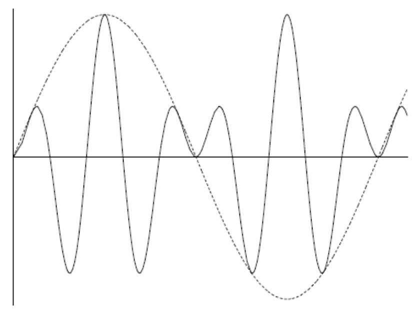
und die allgemeine Lösung lautet (vgl. Beispiel XI.1.7)

$$c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t.$$

Ein anfänglich ruhender Massenpunkt ($y(0) = 0$, $y'(0) = 0$) vollführt, durch die äußere Kraft angeregt, Schwingungen der Form ($c_1 = -b_0/(\omega_0^2 - \omega_1^2)$, $c_2 = 0$)

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_0 t) = \frac{2b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\sin\frac{\omega_0 - \omega_1}{2}t\sin\frac{\omega_0 + \omega_1}{2}t \\ &=: A(\omega_1, t)\sin\frac{\omega_0 + \omega_1}{2}t, \end{aligned}$$

sogenannte *amplitudenmodulierte Schwingungen.*



Graph von y und $A(\omega_1, \cdot)$ (gestrichelt)

Im Fall $\omega_0 = \omega_1$, wo die Erregerfrequenz ω_1 mit der *Eigenfrequenz* ω_0 des harmonischen Oszillators übereinstimmt, klappt der Ansatz $z(t) = Ae^{i\omega_1 t}$ nicht, denn (XI.2.6) lautet dann $A \cdot 0 = b_0$. Jetzt bestimmt man eine partikuläre Lösung von (XI.2.4) per Variation der Konstanten, was in fortgeschrittenen Texten vorgestellt wird. Als Ergebnis erhält man

$$z(t) = \frac{b_0}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t + \frac{b_0}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t.$$

Die Lösung ist unbeschränkt! In der Praxis bedeutet das, dass nach endlicher Zeit die Feder, an der der Massenpunkt hängt, reißen wird. Dieses Phänomen wird *Resonanz* genannt.

Es taucht auch im schwach gedämpften Fall auf, der Schwingungsphänomene realistischer beschreibt. Wir nehmen also jetzt $0 < p < \omega_0$ an. Man kann dann (XI.2.6) stets nach A auflösen, da der Imaginärteil der Klammer $\neq 0$ ist. Das liefert die partikuläre Lösung

$$z(t) = \frac{b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2p\omega_1 i}e^{i\omega_1 t} = b_0\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2 - 2p\omega_1 i}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4p^2\omega_1^2}(\cos\omega_1 t + i\sin\omega_1 t) \tag{XI.2.7}$$

von (XI.2.5), deren Realteil

$$\frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)b_0}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4p^2\omega_1^2}\cos\omega_1 t+\frac{2p\omega_1 b_0}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4p^2\omega_1^2}\sin\omega_1 t \tag{XI.2.8}$$

eine partikuläre Lösung von (XI.2.4) darstellt. Wir wollen diesen Term vereinfachen. Dazu beachte man mit $a^2 = a_1^2 + a_2^2$

$$\begin{aligned} a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha &= a\Big(\frac{a_1}{a}\cos\alpha+\frac{a_2}{a}\sin\alpha\Big)\\ &= a(\sin\varphi\cos\alpha+\cos\varphi\sin\alpha) = a\sin(\alpha+\varphi)\end{aligned}$$

für ein φ, denn $(a_1/a)^2 + (a_2/a)^2 = 1$. Also wird aus (XI.2.8)

$$\frac{b_0}{\big((\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4p^2\omega_1^2\big)^{1/2}}\sin(\omega_1 t+\varphi),$$

und die allgemeine Lösung von (XI.2.4) lautet

$$y(t) = e^{-pt}(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t) + \frac{b_0}{\big((\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4p^2\omega_1^2\big)^{1/2}}\sin(\omega_1 t+\varphi) \tag{XI.2.9}$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$; vgl. Beispiel XI.1.7.

Da der erste Term mit $t\to\infty$ verschwindet (er beschreibt den Einschwingvorgang), wird das Langzeitverhalten vom zweiten Term bestimmt. Dieser beschreibt eine phasenverschobene Sinusschwingung mit der Erregerfrequenz, was physikalisch natürlich erscheint, und der Amplitude

$$A(\omega_1) = \frac{b_0}{\big((\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4p^2\omega_1^2\big)^{1/2}}.$$

Elementare Rechnungen zeigen, dass $A(\omega_1)$ im Fall $p \geq \omega_0/\sqrt{2}$ für $\omega_1 \to \infty$ streng monoton gegen 0 konvergiert. Im Fall $0 < p < \omega_0/\sqrt{2}$ ergibt sich bei $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}$ (der *Resonanzfrequenz*) der Maximalwert

$$A_{\max} = \frac{b_0}{2p\sqrt{\omega_0^2-p^2}},$$

und der kann zu groß sein; es kommt zur *Resonanzkatastrophe*: Die Brücke[4] stürzt ein, die Kreide quietscht, Oskar Matzerath lässt Scheiben zerspringen etc. Dasselbe Phänomen kann aber auch durchaus erwünscht sein (Radio, Mikrowellenherd etc.).

[4] Es wird gelegentlich kolportiert, preußischen Soldaten sei es wegen dieser Resonanzphänomene verboten worden, im Gleichschritt über eine Brücke zu marschieren. In seiner Kolumne „Stimmt's?“ in der ZEIT vom 1. 8. 1997 verweist Christoph Drösser diese Geschichte allerdings ins Reich der Legenden.

XI.3 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

In diesem Abschnitt beweisen wir einen fundamentalen Satz über die eindeutige Lösbarkeit einer Klasse von Anfangswertproblemen. Das nächste Lemma ist grundlegend für den Beweis des folgenden Existenzsatzes.

Lemma XI.3.1 *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und sei $f\colon G \to \mathbb{R}$ stetig. Ferner seien I ein Intervall und $y\colon I \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion mit $(t, y(t)) \in G$ für alle $t \in I$, und es seien $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $(t_0, y_0) \in G$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *y ist differenzierbar und löst das Anfangswertproblem*

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

(ii) *y ist stetig und löst die Integralgleichung*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt offensichtlich durch Integration; beachte, dass mit y und f auch $s \mapsto f(s, y(s))$ stetig und deshalb integrierbar ist (Beweis?).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Klar ist $y(t_0) = y_0$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hängt die rechte Seite in (ii) differenzierbar von t ab, und ihre Ableitung ist $f(t, y(t))$, denn der Integrand ist stetig, wie oben beobachtet. Das bedeutet, dass (i) gilt. □

Der Vorteil von (ii) gegenüber dem ursprünglichen Anfangswertproblem liegt darin, dass die Lösung der Integralgleichung als *Fixpunkt* einer Abbildung erscheint, nämlich der Abbildung T, die eine Funktion φ auf

$$T\varphi\colon t \mapsto (T\varphi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \tag{XI.3.1}$$

abbildet. Mit dieser Abbildung kann man (ii) einfach durch

$$y = Ty$$

wiedergeben.

Mit dem Banachschen Fixpunktsatz (Satz VIII.3.9) haben wir ein kraftvolles Mittel an der Hand, dieses Problem zu lösen. Dazu ist eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset C(I)$ des Raums der stetigen Funktionen auf einem geeigneten kompakten Intervall I zu finden, so dass T die Menge M kontraktiv in sich abbildet. Hier sind M und $C(I)$ mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz versehen, die von der Supremumsnorm

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in I} \|\varphi(t)\|$$

induziert ist (vgl. Korollar VIII.4.9 und Korollar VIII.4.10).

Die Existenz solch eines Raums M ist mit gewissen Eigenschaften von f verknüpft, die wir jetzt einführen.

Definition XI.3.2 Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$, und $f\colon G \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.

(a) f erfüllt eine *Lipschitzbedingung bzgl. der zweiten Komponente in* G, falls es ein $L \geq 0$ mit

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L|u-v| \qquad \text{für alle } (t,u),(t,v) \in G$$

gibt. Solch ein L heißt dann Lipschitzkonstante.

(b) f erfüllt eine *lokale Lipschitzbedingung bzgl. der zweiten Komponente*, falls es zu jedem $(t_0,u_0) \in G$ eine Umgebung U gibt, so dass f in U eine Lipschitzbedingung bzgl. der zweiten Komponente erfüllt.

Ein wichtiges Beispiel bilden die stetig differenzierbaren Funktionen. Sei G offen, und f sei stetig differenzierbar. Zu $(t_0,u_0) \in G$ betrachte eine abgeschlossene Kugel U mit diesem Mittelpunkt, die in G liegt. In U erfüllt f dann eine Lipschitzbedingung bzgl. der zweiten Komponente mit der Lipschitzkonstanten $L = \sup_{(t,u)\in U} |(D_2 f)(t,u)|$. Das folgt aus dem Mittelwertsatz; es ist $L < \infty$, da U kompakt ist. Also erfüllen stetig differenzierbare Funktionen eine lokale Lipschitzbedingung.

Damit sind alle Vorbereitungen für den Hauptsatz über gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung getroffen.

Satz XI.3.3 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)
Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon G \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. der zweiten Komponente. Dann existiert zu jedem $(t_0,y_0) \in G$ ein Intervall $I = [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, so dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung auf I besitzt.

Beweis. Gemäß Lemma XI.3.1 reicht es, einen Fixpunkt der durch

$$T\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds \tag{XI.3.2}$$

definierten Abbildung zu finden, und das werden wir mit dem Banachschen Fixpunktsatz in Angriff nehmen.

Bis jetzt haben wir den Definitionsbereich von T noch nicht spezifiziert, und wie im Beweis des Satzes über implizite Funktionen (Satz IX.5.1) ist das auch hier die eigentliche Schwierigkeit. Das folgende Verfahren führt zum Erfolg. Zunächst wählen wir ein kompaktes Rechteck (wo $a,b>0$)

$$R = \{(t,u)\colon |t-t_0| \leq a,\ |u-y_0| \leq b\} \subset G,$$

auf dem mit einem geeigneten $L > 0$

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L|u - v|$$

gilt; das ist möglich wegen der lokalen Lipschitzbedingung. Alsdann setze

$$K = \sup_{(t,u)\in R} |f(t,u)|;$$

da f stetig und R kompakt ist, ist $K < \infty$. Nun definiere noch

$$\alpha = \min\Big\{a, \frac{b}{K}, \frac{1}{2L}\Big\}.$$

(Wir dürfen $K > 0$ voraussetzen, da andernfalls die Behauptung des Satzes evident ist.) Schließlich sei

$$I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

sowie

$$M = \{\varphi \in C(I)\colon |\varphi(t) - y_0| \leq b \ \text{ für alle } t \in I\};$$

zur Erinnerung: $C(I)$ bezeichnet den Vektorraum der stetigen Funktionen auf I, der mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz ein vollständiger metrischer Raum ist.

Wir überprüfen nun, dass damit die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind. Zunächst ist klar, dass M eine abgeschlossene Teilmenge von $C(I)$ und damit ein vollständiger metrischer Raum ist; siehe Korollar VIII.4.9.

Als nächstes zeigen wir, dass die in (XI.3.2) definierte Abbildung T den Raum M in sich überführt; wir haben für $\varphi \in M$ also

$$\left|\int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))\,ds\right| \leq b \qquad \text{für alle } t \in I$$

zu zeigen. In der Tat gilt für $t \in I$, $t \geq t_0$,

$$\left|\int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))\,ds\right| \leq \int_{t_0}^t |f(s,\varphi(s))|\,ds \leq |t - t_0| \cdot K \leq \alpha K \leq b; \tag{XI.3.3}$$

und für $t < t_0$ geht es genauso mit $\int_t^{t_0} |\dots|\,ds$.

Es bleibt, $\|T\varphi - T\psi\|_\infty$ abzuschätzen; dazu benutzen wir die Lipschitzbedingung. Für (ohne Einschränkung) $t \geq t_0$ hat man

$$\begin{aligned}
|T\varphi(t) - T\psi(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))|\,ds \\
&\leq L\int_{t_0}^t |\varphi(s) - \psi(s)|\,ds \\
&\leq L \cdot |t - t_0| \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty \\
&\leq L\alpha\|\varphi - \psi\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes folgt nun sofort aus dem Banachschen Fixpunktsatz, denn die Abschätzung (XI.3.3) zeigt, dass jede Lösung des Anfangswertproblems, die auf I definiert ist, notwendig in M liegt. □

Bemerkungen. (a) Es sei betont, dass der Satz von Picard-Lindelöf nur die lokale Lösbarkeit eines Anfangswertproblems garantiert; in der Tat braucht wie in Beispiel XI.1.5 eine Lösung nicht auf ganz $\mathbb{R}$ zu existieren. Vergleiche jedoch Korollar XI.3.6 zum globalen Verhalten von Lösungen.

(b) Ohne die vorausgesetzte Lipschitzbedingung kann die Eindeutigkeit der Lösung verletzt sein (siehe Beispiel XI.1.4); man kann jedoch für bloß stetige rechte Seiten f in der Differentialgleichung immer noch die Existenz einer Lösung zeigen (*Existenzsatz von Peano*).

(c) Wie oben erklärt, erfüllen insbesondere stetig differenzierbare f die Voraussetzung von Satz XI.3.3.

(d) Der Satz von Picard-Lindelöf eröffnet die Möglichkeit, die Lösung eines Anfangswertproblems konstruktiv zu ermitteln: Man beginne mit einer beliebigen Funktion $\varphi_0 \in M$ (meistens der konstanten Funktion $\varphi_0 = y_0$) und berechne iterativ $T\varphi_0$, $T^2\varphi_0$, $T^3\varphi_0$ etc. Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich dann als gleichmäßiger Limes dieser Folge; dank des Banachschen Fixpunktsatzes hat man auch eine Fehlerabschätzung in der Hand. Es ist instruktiv, dieses Verfahren mit dem eindimensionalen Anfangswertproblem

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

durchzuführen.

Manchmal gelingt es, die globale eindeutige Lösbarkeit zu zeigen.

Satz XI.3.4 *Es sei $G = I \times \mathbb{R}$ mit einem kompakten Intervall I, $f\colon G \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle eine Lipschitzbedingung bzgl. der zweiten Komponente in G. Dann ist für jedes $(t_0, y_0) \in G$ das Anfangswertproblem*

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0$$

auf ganz I eindeutig lösbar.

Beweis. Der Beweis ist eine Modifikation des Beweises von Satz XI.3.3. Diesmal kann man $M = C(I)$ wählen; die Details seien zur Übung überlassen. □

Wir beschreiben jetzt das größte Intervall, auf dem die Lösung eines Anfangswertproblems unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf existiert.

Satz XI.3.5 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, und $f\colon G \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. des 2. Arguments. Es sei $\mathscr{J}$ die Menge aller Intervalle, auf denen das Anfangswertproblem $y' = f(t,y)$, $f(t_0) = y_0$ eine Lösung besitzt, sowie $I_{\max} = \bigcup_{J\in\mathscr{J}} J$. Dann ist $I_{\max}$ ein Intervall; setze $a = \inf I_{\max}$ und $b = \sup I_{\max}$.*

(a) *Das obige Anfangswertproblem besitzt auf* $I_{\max}$ *genau eine Lösung* $y_{\max}$*, und* $I_{\max}$ *ist das größte Intervall, auf dem eine Lösung existiert.*

(b) $I_{\max}$ *ist offen, d.h.* $a, b \notin I_{\max}$.

(c) *Es gilt (mindestens) eine der folgenden Aussagen (analoge Aussagen können für den linken Randpunkt getroffen werden):*

(1) $b = \infty$,

(2) $\limsup_{t \to b} |y_{\max}(t)| = \infty$,

(3) $\liminf_{t \to b} \operatorname{dist}\big((t, y_{\max}(t)), \partial G\big) = 0$.

Man nennt $I_{\max}$ das *maximale Existenzintervall* und $y_{\max}$ die *maximale Lösung* des Anfangswertproblems. Die maximale Lösung verläuft also nach links und rechts jeweils so weit, bis sie an ihre „natürlichen" Grenzen stößt.

Beweis. (a) ist eine direkte Konsequenz des Satzes von Picard-Lindelöf; natürlich garantiert dieser Satz insbesondere, dass $\mathscr{J} \neq \emptyset$ ist.

(b) Wäre etwa $b \in I_{\max}$, wäre auch $(b, y_{\max}(b)) \in G$, und das Anfangswertproblem $y' = f(t, y)$, $y(b) = y_{\max}(b)$ hätte eine Lösung auf einem Intervall I' um b. Da $y_{\max}$ und diese Lösung wegen der Eindeutigkeit auf $I' \cap I_{\max}$ übereinstimmen, folgt $I_{\max} \cup I' \in \mathscr{J}$ und damit der Widerspruch $I_{\max} \cup I' \subset I_{\max}$.

(c) Falls weder (1), (2) noch (3) zutreffen, liegt $\{(t, y_{\max}(t)) \colon t_0 \le t < b\}$ in einer kompakten Teilmenge K von G. Da nach Lemma XI.3.1

$$y_{\max}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{\max}(s))\, ds \qquad \text{für alle } t_0 \le t < b$$

und der Integrand beschränkt ist (denn die stetige Funktion f ist auf dem Kompaktum K beschränkt), existiert der Grenzwert $\lim_{t \to b} y_{\max}(t)$, und wiederum nach Lemma XI.3.1 folgt $b \in I_{\max}$ im Widerspruch zu (b). □

Korollar XI.3.6 *Es sei* $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. des 2. Arguments. Falls ein* $M \ge 0$ *existiert, so dass eine Lösung des Anfangswertproblems* $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ *auf welchem Intervall auch immer durch* M *beschränkt ist, so ist die maximale Lösung auf ganz* $\mathbb{R}$ *definiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung scheiden (2) und (3) aus Bedingung (c) im letzten Satz aus. □

Ausblick. Wir haben in diesem Kapitel nur einzelne Differentialgleichungen betrachtet, aber die Methoden lassen sich fast wörtlich auf Systeme von Differentialgleichungen anwenden. Der Deutlichkeit halber sollen jetzt vektorielle Größen im Fettdruck dargestellt werden.

Bei einem Differentialgleichungssystem (1. Ordnung) sucht man n Funktionen $y_1, \dots, y_n$, die das folgende System von n Differentialgleichungen lösen:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Das kann man mit Hilfe der aus diesen Komponenten zusammengesetzten Funktionen $\mathbf{y}$ und $\mathbf{f}$ kompakter als

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

schreiben, ein zugehöriger Anfangswert ist $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{u}_0$. In dieser Schreibweise lässt sich der Satz von Picard-Lindelöf vollkommen analog formulieren und beweisen; die eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. der 2. Komponente definierende Gleichung ist jetzt $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Die einzige kitzlige Stelle tritt bei der Integration einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{g}$ auf. Zunächst ist das Integral $\int_a^b \mathbf{g}(t)\,dt$ komponentenweise definiert, d.h.

$$\int_a^b \mathbf{g}(t)\,dt = \Big(\int_a^b g_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b g_n(t)\,dt\Big).$$

Die problematische Stelle ist der Beweis der Dreiecksungleichung für vektorwertige Integrale ($a \leq b$)

$$\Big\|\int_a^b \mathbf{g}(t)\,dt\Big\| \leq \int_a^b \|\mathbf{g}(t)\|\,dt. \tag{XI.3.4}$$

Setzt man einfach die Definition ein, erhält man auf der rechten Seite den Faktor $\sqrt{n}$; daher bedarf es eines Tricks, um (XI.3.4) zu zeigen. Damit kann man dann den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf für Systeme genauso führen wie für Gleichungen.

Gleichungen höherer Ordnung wie in Abschnitt XI.2 haben eine enge Beziehung zu Differentialgleichungssystemen. Betrachten wir die lineare Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{XI.3.5}$$

Dieser Gleichung ordnen wir das folgende System zu:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \dots - a_{n-1} y_n \end{aligned}$$

Ist y eine Lösung von (XI.3.5), so ist $\mathbf{y} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ eine Lösung des Systems, und ist $\mathbf{y}$ eine Lösung des Systems, so ist die erste Komponente y_1 eine Lösung von (XI.3.5). Entsprechend übertragen sich Anfangsbedingungen $y^{(j)}(t_0) = u_j$ $(j = 0, \dots, n-1)$ vs. $\mathbf{y}(t_0) = (u_0, \dots, u_{n-1})$.

Da auf das obige System der Satz von Picard-Lindelöf (für Systeme) anwendbar ist, erhält man die *eindeutige* Lösbarkeit des zu (XI.3.5) gehörigen Anfangswertproblems; das wurde an einigen Stellen in diesem Kapitel erwähnt.

Literaturhinweise

Propädeutische Texte und Überblicke:

L. Alcock: *Wie man erfolgreich Mathematik studiert.* Springer-Spektrum 2017.

A. Beutelspacher: *„Das ist o.B.d.A. trivial!“* Springer-Vieweg, 9. Auflage 2009.

O. Deiser, C. Lasser, E. Vogt, D. Werner: 12×12 *Schlüsselkonzepte zur Mathematik.* Springer-Spektrum, 2. Auflage 2015.

T. Gowers: *Mathematics. A Very Short Introduction.* Oxford Univ. Press 2002. (Deutsch unter dem Titel *Mathematik.* Reclam 2011.)

D. Grieser: *Mathematisches Problemlösen und Beweisen.* Springer-Spektrum, 2. Auflage 2017.

I. Hilgert, J. Hilgert: *Mathematik – ein Reiseführer.* Springer-Spektrum 2012.

K. Houston: *Wie man mathematisch denkt.* Springer-Spektrum 2012.

H. Schichl, R. Steinbauer: *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Springer 2009.

Dicke Lehrbücher:

E. Behrends: *Analysis, Band 1.* Springer-Vieweg, 6. Auflage 2015.

E. Behrends: *Analysis, Band 2.* Vieweg, 2. Auflage 2007.

O. Deiser: *Analysis 1.* Springer, 2. Auflage 2013. [▶ Speziell für Lehramtsstudierende!]

O. Deiser: *Analysis 2.* Springer, 2. Auflage 2015. [▶ Speziell für Lehramtsstudierende!]

H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* Springer-Vieweg, 17. Auflage 2009.

H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2.* Springer-Vieweg, 14. Auflage 2008.

Dünne Lehrbücher:

O. Forster: *Analysis 1.* Springer-Spektrum, 11. Auflage 2013.

O. Forster: *Analysis 2.* Springer-Spektrum, 11. Auflage 2017.

D. Grieser: *Analysis 1.* Springer-Spektrum 2015.

H. Junek: *Analysis.* Springer-Vieweg 1998. [▶ Speziell für Lehramtsstudierende!]

J. Pöschel: *Etwas Analysis.* Springer-Spektrum 2014.

J. Pöschel: *Etwas mehr Analysis.* Springer-Spektrum 2014.

Tutorien:

O. Deiser: *Erste Hilfe in Analysis.* Springer-Spektrum 2012.

K. Fritzsche: *Trainingsbuch zur Analysis 1.* Springer-Spektrum 2013.

F. Modler, M. Kreh: *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1.* Springer-Spektrum, 3. Auflage 2014.

F. Modler, M. Kreh: *Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2.* Springer-Spektrum, 3. Auflage 2015.